Ω-ПОТЕНЦИАЛ ЧАСТИЦЫ С АММ

А. С. Вшивцев и Д. В. Перегудов

Аннотация. В работе вычислен термодинамический потенциал нейтральных массивных частиц с аномальным магнитным моментом (нейтронного газа) в параллельных электрическом и магнитном полях и поле электромагнитной волны. Исследованы высокотемпературная (релятивистская), классическая и сугубо квантовая асимптотики. Изучен предел $m = 0$, соответствующий нейтрино.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является вычисление Ω-потенциала теории с лагранжианом Дирака—Паули:

$$L = \bar{\psi}\big[i\gamma\partial - m - \tfrac{i}{2}(\gamma F\gamma)\big]\psi, \tag{1}$$

где F — внешнее электромагнитное поле. Как видно, это лагранжиан дираковского поля без заряда, но с магнитным моментом (величина магнитного момента включена в F).

Спектр теории (1), необходимый для вычисления Ω-потенциала, исследовался в работе [1]. В случае однородных постоянных параллельных друг другу полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\varepsilon_{1,2}^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m^2 + E^2 + H^2 \pm 2\sqrt{m^2H^2 + p_\perp^2(E^2+H^2)}. \tag{2}$$

Здесь посредством $\varepsilon_{1,2}^2$ символически обозначены две ветви, соответствующие знаку $\pm$ перед радикалом, $p_\perp^2 = \mathbf{p}^2 - p_3^2$, а p_3 — компонента импульса вдоль направления E и H.

Условие $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ физически означает отсутствие потока энергии: $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}] = 0$. Случай этот не такой уж специальный, как может показаться, — с точностью до лоренцевского преобразования он охватывает все конфигурации полей, кроме поля электромагнитной волны (когда оба инварианта $E^2 - H^2$ и $\mathbf{EH}$ равны нулю). Спектр в поле электромагнитной волны имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{p}) &= -H + \sqrt{(p_3 - H)^2 + p_\perp^2 + m^2}, \\ \varepsilon_2(\mathbf{p}) &= H + \sqrt{(p_3 + H)^2 + p_\perp^2 + m^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $H(= E)$ — напряженность магнитного поля волны, p_3 — компонента импульса в направлении распространения волны, $p_\perp^2 = \mathbf{p}^2 - p_3^2$.

2. Классическая статистическая сумма

В качестве промежуточного шага вычислим классическую статистическую сумму

$$Z(\theta) = \sum_n e^{-\varepsilon_n/\theta} \tag{4}$$

со спектрами (2) и (3) (будем обозначать их соответственно $Z_\parallel$ и $Z_\perp$). Начнем со спектра (3).

$$\begin{aligned} Z_\perp &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(e^{-\varepsilon_1(\mathbf{p})/\theta} + e^{-\varepsilon_2(\mathbf{p})/\theta} \right) = \\ &= 2\operatorname{ch}\frac{H}{\theta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{-\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}{\theta}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Иначе говоря, $Z_\perp$ отличается от статсуммы без поля множителем $\operatorname{ch} H/\theta$. Для вычисления интеграла по импульсам избавимся от радикала в экспоненте. Это можно сделать при помощи интегрального представления цилиндрических функций

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-px-q/x}\, dx = 2\Big(\frac{q}{p}\Big)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{pq}\,). \tag{6}$$

Вспоминая, что $K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$, для $\nu = 1/2$ и $p = 1$ найдем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}\, e^{-x-q/x} = \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{q}}. \tag{7}$$

При такой "параметризации" интеграл по импульсам становится гауссовским и легко вычисляется. Оставшийся интеграл по параметру x снимается при помощи формулы (6). Окончательно

$$Z_\perp = \frac{\theta m^2}{\pi^2} \operatorname{ch}\frac{H}{\theta} K_2\Big(\frac{m}{\theta}\Big). \tag{8}$$

Перейдем теперь к вычислению $Z_\parallel$. Избавившись от радикала в экспоненте только что описанным приемом, найдем:

$$Z_\parallel = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{-x-\frac{\mathbf{p}^2+m^2+E^2+H^2}{4\theta^2 x}}\, 2\operatorname{ch}\left(\frac{2\sqrt{m^2H^2 + p_\perp^2(E^2+H^2)}}{4\theta^2 x} \right). \tag{9}$$

Взяв интеграл по p_3, приходим к выражению:

$$Z_\parallel = \frac{\theta}{\pi} \int_0^\infty dx\, e^{-x-\frac{m^2+E^2+H^2}{4\theta^2 x}}\, I\left(\frac{1}{4\theta^2 x}\right), \tag{10}$$

где

$$I(s)=\int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2}\,e^{-sp_\perp^2}\,2\operatorname{ch}\Bigl(2s\sqrt{m^2H^2+p_\perp^2(E^2+H^2)}\,\Bigr). \tag{11}$$

Обезразмерим интеграл заменой:

$$\begin{gathered} m^2H^2+p_\perp^2(E^2+H^2)=(E^2+H^2)^2\eta^2,\\ s(E^2+H^2)=\sigma,\\ \frac{mH}{E^2+H^2}=\alpha,\qquad \frac{mE}{E^2+H^2}=\beta. \end{gathered} \tag{12}$$

Следующую выкладку воспроизведем подробно:

$$\begin{aligned} I=&\frac{E^2+H^2}{4\pi}\int_\alpha^\infty 2\eta\,d\eta\,e^{-\sigma(\eta^2-\alpha^2)}2\operatorname{ch}(2\sigma\eta)=\\ =&\frac{E^2+H^2}{2\pi}e^{\sigma(\alpha^2+1)}\int_\alpha^\infty\eta\,d\eta\left(e^{-\sigma(\eta+1)^2}+e^{-\sigma(\eta-1)^2}\right)=\\ =&\frac{E^2+H^2}{2\pi}e^{\sigma(\alpha^2+1)}\left\{\int_{\alpha+1}^\infty(\xi-1)e^{-\sigma\xi^2}\,d\xi+\int_{\alpha-1}^\infty(\xi+1)e^{-\sigma\xi^2}\,d\xi\right\}=\\ =&\frac{E^2+H^2}{2\pi}e^{\sigma(\alpha^2+1)}\left\{\frac{1}{\sigma}\operatorname{ch}(2\alpha\sigma)e^{-\sigma(\alpha^2+1)}+\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}e^{-\sigma\xi^2}\,d\xi\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

(Мы не стали выписывать интеграл через функцию ошибок — это ничего не дает.) Теперь для $Z_\|$ получим:

$$\begin{aligned} Z_\|(\theta)=\frac{1}{2\pi^2\theta}\Biggl\{&\theta^2\left[(m+H)^2+E^2\right]K_2\left(\frac{\sqrt{(m+H)^2+E^2}}{\theta}\right)+\\ &+\theta^2\left[(m-H)^2+E^2\right]K_2\left(\frac{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}{\theta}\right)+\\ &+\theta(E^2+H^2)^{3/2}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}d\xi\,\sqrt{\xi^2+\beta^2}\,K_1\left(\frac{\sqrt{(E^2+H^2)(\xi^2+\beta^2)}}{\theta}\right)\Biggr\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Оставшийся в живых интеграл так просто не сдается. Мы не будем пытаться вычислить его на этом этапе.

3. Ω-потенциал

Как известно, Ω-потенциал вычисляется по формуле

$$\Omega=-T\sum_p\ln\left(1+e^{-\frac{\varepsilon_p-\mu}{T}}\right). \tag{15}$$

Раскладываем логарифм в ряд:

$$\Omega = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{\frac{\mu}{T}n}\left(\sum_p e^{-\frac{\varepsilon_p}{T}n}\right). \tag{16}$$

Выражение в скобках — классическая статсумма. Учтем вклад античастиц (с химпотенциалом $-\mu$) и получим формулу:

$$\Omega = 2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{ch}\Big(\frac{\mu}{T}n\Big)\,Z\Big(\frac{T}{n}\Big). \tag{17}$$

В поле волны:

$$\Omega_\perp = \frac{m^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\,\mathrm{ch}\Big(\frac{\mu}{T}n\Big)\,\mathrm{ch}\Big(\frac{H}{T}n\Big)\left(\frac{m}{T}n\right)^{-2}K_2\Big(\frac{m}{T}n\Big), \tag{18}$$

или, используя известную формулу тригонометрии:

$$\Omega_\perp = \frac{m^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\mathrm{ch}\,\frac{\mu+H}{T}n + \mathrm{ch}\,\frac{\mu-H}{T}n\Big)\left(\frac{m}{T}n\right)^{-2}K_2\Big(\frac{m}{T}n\Big). \tag{19}$$

Введем обозначение

$$\Lambda_\nu(\omega,a) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{ch}(\omega a n)(\omega n)^\nu K_\nu(\omega n). \tag{20}$$

Тогда (19) переписывается в виде

$$\Omega_\perp = \frac{m^4}{\pi^2}\left\{\Lambda_{-2}\Big(\frac{m}{T},\frac{\mu+H}{m}\Big) + \Lambda_{-2}\Big(\frac{m}{T},\frac{\mu-H}{m}\Big)\right\}. \tag{21}$$

Аналогично для $Z_\|$ находим выражение:

$$\begin{aligned}
\Omega_\| = \frac{1}{\pi^2}\Bigg\{&\left[(m+H)^2+E^2\right]^2\Lambda_{-2}\left(\frac{\sqrt{(m+H)^2+E^2}}{T},\frac{\mu}{\sqrt{(m+H)^2+E^2}}\right)+\\
&+\left[(m-H)^2+E^2\right]^2\Lambda_{-2}\left(\frac{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}{T},\frac{\mu}{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}\right)+\\
&+(E^2+H^2)^2\int_{\alpha-1}^{\alpha+1}d\eta\,(\beta^2+\eta^2)\,\Lambda_{-1}\left(\frac{\sqrt{E^2+H^2}\sqrt{\beta^2+\eta^2}}{T},\frac{\mu}{\sqrt{E^2+H^2}\sqrt{\beta^2+\eta^2}}\right)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

4. Высокотемпературная асимптотика

Асимптотику Ω-потенциала в области высоких температур $\frac{m}{T} \ll 1$ (это условие означает, что термостат способен легко рождать частицы) можно получить меллиновским пересуммированием исходного ряда [2]. Приведем выражения для Λ_{-1} и Λ_{-2}, полученные этим методом:

$$\begin{aligned}\Lambda_{-1}(\omega, a) = &-\frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\gamma}{4} - \\ &- \frac{1}{8}\ln\frac{\omega^2}{\pi^2} + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2}(a^2 + 1/4)\omega^2 + \ldots\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{-2}(\omega, a) = &-\frac{7\pi^4}{360\omega^4} - \frac{\pi^2}{12\omega^2}(a^2 - 1/2) - \\ &- \frac{a^4}{24} + \frac{a^2}{8} - \frac{3}{64} + \frac{\gamma}{16} + \\ &+ \frac{1}{32}\ln\frac{\omega^2}{\pi^2} - \frac{7\zeta(3)}{64\pi^2}(a^2 + 1/6)\omega^2 + \ldots\end{aligned} \tag{24}$$

В соответствии с (24)

$$\begin{aligned}\Omega_{\perp} = &-\frac{7\pi^2 T^4}{180} - \frac{m^2 T^2}{6}\left(\frac{\mu^2 + H^2}{m^2} - 1/2\right) - \\ &- \frac{\mu^4 + 6\mu^2 H^2 + H^4}{12\pi^2} + \frac{m^2}{4\pi^2}\left(\mu^2 + H^2\right) - \frac{m^4}{32\pi^2}(3 - 4\gamma) + \\ &+ \frac{m^4}{16\pi^2}\ln\frac{m^2}{\pi^2 T^2} - \frac{7\zeta(3)}{32\pi^4}\frac{m^6}{T^2}\left(\frac{\mu^2 + H^2}{m^2} + 1/6\right) + \ldots\end{aligned} \tag{25}$$

Вычисление $\Omega_{\parallel}$ более сложно. Непосредственно формулы (23)–(24) дают:

$$\begin{aligned}\Omega_{\parallel} = &-\frac{7\pi^2 T^4}{180} - \frac{\mu^2 T^2}{6} + \frac{T^2}{12}(m^2 + E^2 + H^2) - \\ &- \frac{\mu^4}{12\pi^2} + \frac{\mu^2}{4\pi^2}(m^2 + E^2 + H^2) - \frac{3 - 4\gamma}{32\pi^2}\left[(m^2 + E^2 + H^2)^2 + 4m^2 H^2\right] + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2}\left[(m^2 + E^2 + H^2)^2 + 4m^2 H^2\right]\ln\frac{(m^2 + E^2 + H^2)^2 - 4m^2 H^2}{\pi^4 T^4} + \\ &+ \frac{mH(m^2 + E^2 + H^2)}{8\pi^2}\ln\frac{(m + H)^2 + E^2}{(m - H)^2 + E^2} - \\ &- \frac{7\zeta(3)}{32\pi^4 T^2}\Big\{\mu^2\left[(m^2 + E^2 + H^2)^2 + 4m^2 H^2\right] + \\ &+ 1/6\left[(m^2 + E^2 + H^2)^3 + 12m^2 H^2(m^2 + E^2 + H^2)\right]\Big\} + \\ &+ (E^2 + H^2)\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} d\eta\left\{-\frac{T^2}{12} - \frac{\mu^2}{4\pi^2} + \frac{1 - 2\gamma}{8\pi^2}(E^2 + H^2)(\beta^2 + \eta^2) - \right. \\ &- \frac{(E^2 + H^2)(\beta^2 + \eta^2)}{8\pi^2}\ln\frac{(E^2 + H^2)(\beta^2 + \eta^2)}{\pi^2 T^2} +\end{aligned} \tag{26}$$

$$+ \frac{7\zeta(3)}{16\pi^4 T^2}(E^2+H^2)(\beta^2+\eta^2)\left(\mu^2 + \frac{(E^2+H^2)(\beta^2+\eta^2)}{4}\right)\Bigg\} + \dots$$

Помимо тривиального интегрирования степенных функций, в (26) встретится интеграл

$$\int d\eta\,(\beta^2+\eta^2)\ln(\beta^2+\eta^2) = \left(\frac{\eta^3}{3}+\beta^2\eta\right)\ln(\beta^2+\eta^2) - \\ - \frac{2}{9}\eta^3 - \frac{4}{3}\beta^2\eta + \frac{4}{3}\beta^3 \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\beta} \tag{27}$$

Окончательный результат:

$$\Omega_\parallel = -\frac{7\pi^2T^4}{180} + \frac{T^2}{6}\left(-\mu^2+\frac{m^2-E^2-H^2}{2}\right) + \\ + \frac{1}{32\pi^2}\left(m^4+2m^2(H^2-E^2)-\frac{(E^2+H^2)^2}{3}\right)\ln\frac{(m^2+E^2+H^2)^2-4m^2H^2}{\pi^4T^4} - \\ - \frac{\mu^4}{12\pi^2} + \frac{\mu^2}{4\pi^2}(m^2-E^2-H^2) - \frac{3-4\gamma}{32\pi^2}\left[(m^2+E^2+H^2)^2+4m^2H^2\right] + \\ + \frac{1-2\gamma}{4\pi^2}(E^2+H^2)\left(m^2+\frac{E^2+H^2}{3}\right) + \frac{1}{6\pi^2}\left(m^2H^2+2m^2E^2+\frac{E^2+H^2}{3}\right) - \\ - \frac{m^3E^3}{6(E^2+H^2)}\operatorname{arctg}\frac{2mE}{m^2-E^2-H^2} + \frac{m^3H^3}{12(E^2+H^2)}\ln\frac{(m+H)^2+E^2}{(m-H)^2+E^2} - \\ - \frac{7\zeta(3)}{32\pi^4T^2}\Bigg\{\mu^2\left(m^4+2m^2(H^2-E^2)-\frac{(E^2+H^2)^2}{3}\right) + \\ + \frac{m^6}{6} + \frac{m^2}{2}(3H^2-E^2)\left(m^2+\frac{E^2+H^2}{3}\right) - \frac{1}{30}(E^2+H^2)^3\Bigg\} + \dots \tag{28}$$

(Логарифм $\ln\frac{(m+H)^2+E^2}{(m-H)^2+E^2}$ может иначе быть записан как $2\operatorname{arth}\frac{2mH}{m^2+E^2+H^2}$.)

5. Классический случай

В классическом пределе выполняются соотношения

$$\frac{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}{T} \gg 1, \qquad \sqrt{(m-H)^2+E^2} > \mu. \tag{29}$$

(Первое означает, что термостат не способен рождать частицы, а второе — что паулиевским отталкиванием можно пренебречь.) В формуле (17) для Ω-потенциала нужно оставить только первый член

$$\Omega = -TZ(T)e^{\mu/T} + \dots \tag{30}$$

В классической статсумме мы должны использовать разложение функций Макдональда:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} + \dots \tag{31}$$

С учетом сказанного выражение для $\Omega_\perp$ принимает вид:

$$\Omega_\perp = -\frac{T^{5/2} m^{3/2}}{\pi^{3/2}\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{H}{T} e^{\frac{\mu - m}{T}} + \dots \tag{32}$$

Выписать $\Omega_\parallel$ с той же легкостью не удается. Промежуточное выражение выглядит устрашающе:

$$\begin{aligned}\Omega_\parallel = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\mu/T} \Bigg\{ & T^{5/2} \left[(m+H)^2 + E^2\right]^{3/4} e^{-\frac{\sqrt{(m+H)^2+E^2}}{T}} + \\ & + T^{5/2} \left[(m-H)^2 + E^2\right]^{3/4} e^{-\frac{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}{T}} + \\ & + T^{3/2} (E^2 + H^2)^{5/4} \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} d\xi \, (\beta^2 + \xi^2)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{(E^2+H^2)(\beta^2+\xi^2)}}{T}} \Bigg\} + \dots\end{aligned} \tag{33}$$

Без особых потерь можно вычислить интеграл в случае $\alpha = \frac{mH}{E^2+H^2} \gg 1$, $\beta = \frac{mE}{E^2+H^2} \gg 1$. С точностью до квадрата поля имеем:

$$\Omega_\parallel = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{\mu-m}{T}} T^{5/2} m^{3/2} \left\{ 1 + \frac{E^2}{m^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{m}{T}\right) + \frac{H^2}{m^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{m}{T} + \frac{m^2}{T^2}\right) \right\} + \dots \tag{34}$$

6. Сугубо квантовый предел

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$\frac{\sqrt{(m-H)^2+E^2}}{T} \gg 1, \qquad \sqrt{(m+H)^2+E^2} \ll \mu \tag{35}$$

(паулиевское отталкивание доминирует). Мы по-прежнему эксплуатируем асимптотику (31), но теперь уже в сумме (17) существенны все члены. Используя определение полилогарифма

$$Li_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\nu}, \tag{36}$$

перепишем $\Omega_\perp$ в виде:

$$\Omega_\perp = \frac{m^4}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ Li_{5/2}\left(-e^{\frac{\mu-m-H}{T}}\right) + Li_{5/2}\left(-e^{\frac{\mu-m+H}{T}}\right) \right\} + \dots \tag{37}$$

Очевидно, мы должны строить аналитическое продолжение функции, определенной рядом (36), в область $z > 1$. Воспользуемся формулой

$$Li_\nu(-e^a) + e^{i\pi\nu} Li_\nu(-e^{-a}) = -\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_C (z+a)^\nu \frac{e^z}{(e^z+1)^2}\, dz. \tag{38}$$

(Контур C идет вдоль вещественной оси и обходит точку ветвления сверху.) На самом деле (38) — просто соотношение Жонкье, в котором правая часть представлена в виде интеграла. Для получения степенной по $1/a$ асимптотики бином $(z+a)^\nu$ разлагается в ряд и почленно интегрируется (подробности см. в [3]). Приведем результат для $\Omega_\perp$:

$$\Omega_\perp = -\frac{2^{3/2} m^{3/2}}{15\pi^2} \Big\{ (\mu - m + H)^{5/2} + (\mu - m - H)^{5/2} + \\ + \frac{5\pi^2 T^2}{8} \left(\sqrt{\mu - m + H} + \sqrt{\mu - m - H} \right) + \dots \Big\} \tag{39}$$

Разложение для $\Omega_\parallel$ опять удается получить лишь в случае $\alpha \gg 1$, $\beta \gg 1$. Сохраняя только первые поправки по температуре и полю, найдем:

$$\Omega_\parallel = -\frac{2^{5/2} m^{3/2} (\mu - m)^{5/2}}{15\pi^2} \Big(1 + \frac{3}{8} \frac{2E^2 + H^2}{m^2} + \frac{5}{4} \frac{E^2 - H^2}{m(\mu - m)} + \\ + \frac{15}{8} \frac{H^2}{(\mu - m)^2} + \frac{5\pi^2}{8} \frac{T^2}{(\mu - m)^2} + \dots \Big) \tag{40}$$

7. Нулевая масса

Исследуем теперь перечисленные выше пределы в случае $m = 0$. Мы рассматриваем этот случай отдельно, так как он не может быть получен предельным переходом $m \to 0$ в предыдущих формулах.

Начнем с $\Omega_\perp$. Поскольку теперь $m = 0$, всегда реализуется высокотемпературный (релятивистский) предел:

$$\Omega_\perp = -\frac{7\pi^2 T^4}{180} - \frac{T^2(\mu^2 + H^2)}{6} - \frac{\mu^4 + 6\mu^2 H^2 + H^4}{12\pi^2} \tag{41}$$

Для $\Omega_\parallel$ все опять намного сложнее. Высокотемпературную асимптотику можно получить предельным переходом из формулы (28) (обозначим $W^2 = E^2 + H^2$):

$$\Omega_\parallel = -\frac{7\pi^2 T^4}{180} - \frac{T^2(\mu^2 + W^2/2)}{6} - \\ - \frac{W^4}{48\pi^2} \ln \frac{W^2}{\pi^2 T^2} - \frac{\mu^4}{12\pi^2} - \frac{\mu^2 W^2}{4\pi^2} - \\ - \frac{W^4}{\pi^2} \left(\frac{13}{288} - \frac{\gamma}{24} \right) + \frac{7\zeta(3) W^4}{96\pi^4 T^2} \left(\mu^2 + W^2/10 \right) + \dots \tag{42}$$

Классическая статсумма имеет вид (см. (14))

$$Z_{\|} = \frac{1}{\pi^2}\left[TW^2K_2\left(\frac{W}{T}\right) + W^3\int_0^1 K_1\left(\frac{W}{T}\xi\right)\xi\,d\xi\right] \tag{43}$$

(Интеграл выражается через функции Макдональда и Струве, но от этого мало радости.) В пределе $\frac{W}{T} \ll 1$ получаем

$$\Omega_{\|} = -\frac{e^{\mu/T}}{\pi^2}\left(2T^4 + \frac{T^2W^2}{2} + \ldots\right) \tag{44}$$

В сугубо квантовом случае, оставляя только первые поправки по полю и температуре:

$$\Omega_{\|} = -\frac{2^{5/2}W^{3/2}\mu^{5/2}}{15\pi^2}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{W}{\mu} + \frac{3}{8}\frac{W^2}{\mu^2} + \frac{5\pi^2}{8}\frac{T^2}{\mu^2} + \ldots\right) \tag{45}$$

8. Заключение

В работе вычислен термодинамический потенциал нейтральных массивных частиц с аномальным магнитным моментом (нейтронного газа) в параллельных электрическом и магнитном полях и поле электромагнитной волны. Исследованы высокотемпературная (релятивистская), классическая и сугубо квантовая асимптотики. Изучен предел $m = 0$, соответствующий нейтрино. Полученные результаты могут иметь приложения в ядерной физике и астрофизике при изучении термодинамических свойств нейтронного и нейтринного газов.

Литература

1. В. В. Скобелев, Н. С. Никитина, *Об инвариантных решениях обобщенного уравнения Дирака в постоянном внешнем поле*, в сб. Актуальные проблемы физики, М. МГОПИ, 1992.
2. А. С. Вшивцев, В. К. Перес-Фернандес, ДАН СССР **309** (1989), no. 1, 70.
3. И. А. Квасников, *Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем*, Изд. МГУ, 1991.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
117454, Проспект Вернадского, 78, Москва, Россия