ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

А. С. Вшивцев, Д. В. Перегудов, А. В. Татаринцев

Аннотация. Для анизотропных сред с различными типами симметрии сформулированы условия, при которых наблюдается вращение плоскости поляризации волн. Полученные результаты могут представлять интерес при решении обратной задачи построения моделей геофизических сред по наблюдаемому эффекту вращения плоскости поляризации.

Введение

Многие процессы в окружающем нас мире имеют волновую природу. Распространение волн в твердых телах описывается основным уравнением теории упругости [1–2]:

$$\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{ijkl}\nabla_j\nabla_l\right)u_k = 0. \tag{1}$$

Здесь $u_k(\mathbf{x},t)$ — вектор смещения, а c_{ijkl} — так называемый тензор Гука, характеризующий упругие свойства среды. Он удовлетворяет условиям симметрии:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij},$$

что позволяет трактовать уравнение (1) как лагранжево с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl},$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ — тензор деформаций. Кроме того, на c_{ijkl} накладывается условие

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} > 0$$

положительной определенности потенциальной энергии упругой деформации. Решения уравнения (1) и построение функции Грина этого уравнения детально обсуждались в работе [17] (см. также цитированную там литературу). Существенную роль при этом играла лагранжевость уравнения (1) (эрмитовость входящего в него дифференциального оператора).

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Магницкому, А. А. Гвоздеву и S. Treitel за интерес к работе и обсуждения.

The research described in this publication was made possible in part by Grant № MRU300 from International Science Foundation and Russian Government.

В настоящей работе мы предлагаем обобщение уравнения (1):

$$\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{ijkl}\nabla_j\nabla_l + 2\eta_{ikl}\nabla_l\right)u_k = 0, \tag{2}$$

которое, как будет показано, содержит новые эффекты. В “технических” целях и из эвристических соображений мы хотели бы сохранить лагранжевость, поэтому потребуем $\eta_{ikl} = -\eta_{kil}$; тогда η_{ikl} сводится к тензору более низкого ранга:

$$\eta_{ikl} = \varepsilon_{ikm}\Omega_{ml}$$

Впервые уравнение (2) было рассмотрено в работе [3]. Появление дополнительного слагаемого может быть объяснено в рамках теории эффективных сред и связанной с ней процедурой осреднения, а также с учетом неоднородности среды и наличием внешних гиротропных сил.

Импульсное представление и спектральная задача

Анализ уравнения (2) легче производить в импульсном представлении. Будем искать решения (2) в виде:

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_i e^{-i\omega t + i\mathbf{kx}}.$$

Тогда (2) примет вид алгебраической задачи на собственные значения:

$$(\omega^2\delta_{ik} - R_{ik})U_k = 0, \tag{3}$$

где $R_{ik} = 2ik(\varepsilon_{ikm}\Omega_{ml})n_l + k^2\Gamma_{ik}$, $\Gamma_{ik} = c_{ijkl}n_j n_l$ — тензор Грина—Кристоффеля, $n_i = k_i/k$ —вектор волновой нормали. В силу сделанных предположений матрица $\hat{R}$ является эрмитовой, и к решению задачи (3) применима техника, развитая в [17]. Правда, собственные векторы $\mathbf{U}^{(a)}$ не могут теперь быть выбраны вещественными (по крайней мере все три сразу). Они имеют вид:

$$\mathbf{U}^{(a)} = \mathbf{V}^{(a)} + i\mathbf{W}^{(a)},$$

где $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ — вещественные неколлинеарные векторы. Это соответствует эллиптической поляризации волн. Однако из собственных векторов по-прежнему можно составить ортонормированный базис:

$$(U_i^{(a)})^* U_i^{(b)} = \delta^{ab}, \tag{4}$$

а для построения функции Грина применим метод проекционных операторов.

Вращение плоскости поляризации

Под вращением плоскости поляризации обычно понимают следующее. Пусть в среде распространяется плоская монохроматическая волна (то есть фиксированы частота и направление волнового вектора, но не фиксированы его модуль и поляризация). Пусть в некоторой точке пространства колебания происходят вдоль какого-либо определенного направления (линейная поляризация). Если при сформулированных условиях колебания во всех остальных точках пространства также происходят вдоль определенных направлений, но сами направления меняются от точки к точке, то говорят о вращении плоскости поляризации.

Для получения этого эффекта нужно, чтобы решениями спектральной задачи (3) были поляризованные по кругу волны с разными волновыми векторами и совпадающими плоскостями поляризации. Именно такова ситуация в электродинамике, где при определенных условиях решениями спектральной задачи для уравнений Максвелла являются волны правой и левой круговых поляризаций, а сам эффект носит имя Фарадея [5,6]. Теория упругости сложнее тем, что спектральная задача (3) имеет три решения. В силу (4) мы не можем требовать совпадения плоскостей поляризации всех трех волн, а только двух из них.

Покажем, что уравнение (2) описывает эффект вращения плоскости поляризации. Потребуем совпадения плоскостей поляризации двух решений спектральной задачи (3). В силу (4) третий собственный вектор $\mathbf{U}^{(3)}$ ортогонален этой плоскости и может быть выбран вещественным. Спектральная задача для $\mathbf{U}^{(3)}$ распадается на два уравнения:

$$\varepsilon_{ikm}(\Omega_{ml}n_l)U_k^{(3)} = 0,$$
$$(\omega^2\delta_{ik} - \Gamma_{ik})U_k^{(3)} = 0.$$

Первое из них означает, что $U_k^{(3)} \sim \Omega_{kl}n_l$, тогда второе дает искомый критерий: уравнение (2) описывает вращение плоскости поляризации, если для некоторого ω выполняется соотношение:

$$(\omega^2\delta_{ik} - \Gamma_{ik})\Omega_{kl}n_l = 0. \tag{5}$$

Мы в состоянии продвинуться в анализе еще дальше, если, пользуясь известным нам собственным вектором $\mathbf{U}^{(3)}$, совершим редукцию спектральной задачи. Спроецируем $\hat{R}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{U}^{(3)}$. Выберем в этой плоскости базис из собственных векторов $\hat{\Gamma}$. В этом базисе $\hat{\Gamma}$ будет диагональна:

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} v_1^2(\mathbf{n}) & 0 \\ 0 & v_2^2(\mathbf{n}) \end{pmatrix},$$

где $v_1(\mathbf{n})$ и $v_2(\mathbf{n})$ — скорости волн в обычной теории. Антисимметричная матрица $\varepsilon_{ikm}(\Omega_{ml}n_l)$ характеризуется единственным отличным от нуля элементом:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega(\mathbf{n}) \\ -\Omega(\mathbf{n}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, матрица $\hat{R}$ приобретает вид:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} k^2v_1^2(\mathbf{n}) & 2ik\Omega(\mathbf{n}) \\ -2ik\Omega(\mathbf{n}) & k^2v_2^2(\mathbf{n}) \end{pmatrix}.$$

Мы можем тут же выписать ее собственные значения:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(k^2(v_1^2(\mathbf{n}) + v_2^2(\mathbf{n})) \pm k\sqrt{16\Omega^2(\mathbf{n}) + k^2(v_1^2(\mathbf{n}) - v_2^2(\mathbf{n}))^2}\right).$$

Выражение для ω_2 таково, что всегда существует область импульсов с $\omega_2^2 < 0$. Мнимая частота интерпретируется как нарушение устойчивости среды по отношению к данному типу возмущений. Это принципиальное свойство рассматриваемой модели; мы не можем избавится от него, не потеряв одновременно вращения плоскости поляризации.

Собственные векторы для произвольного направления распространения отвечают эллиптически поляризованным волнам; эффекта вращения плоскости поляризации обычно не наблюдается. Однако для акустических осей кристалла, когда $v_1(\mathbf{n}) = v_2(\mathbf{n})$, собственные векторы соответствуют волнам правой и левой круговых поляризаций и эффект вращения плоскости поляризации имеет место (в полной аналогии с электродинамикой, см. [5]). Количество и расположение акустических осей в кристаллах различной симметрии обсуждались в работе [18].

В своем "чистом" виде вращение плоскости поляризации будет наблюдаться, когда колебания поляризованы в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{U}^{(3)}$. В каждой точке пространства колебания будут происходить вдоль какого-то направления, а само направление будет меняться от точки к точке. Если же в некоторой точке пространства существует также $\mathbf{U}^{(3)}$-составляющая вектора смещения, то колебания в этой и других точках будут эллиптическими. Плоскость поляризации колебаний будет проходить через вектор $\mathbf{U}^{(3)}$ и поворачиваться от точки к точке.

Уравнение (5) имеет два очевидных решения, которые мы и обсудим ниже.

Изотропная среда

Тензор Гука изотропной среды строится из δ-символов и с учетом свойств симметрии имеет вид:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Одним из собственных векторов тензора Грина—Кристоффеля

$$\Gamma_{ik} = \mu\delta_{ik} + (\lambda + \mu)n_i n_k$$

будет вектор волновой нормали $\mathbf{n}$. Очевидно, мы удовлетворим критерию (5), если возьмем $\Omega_{kl} = \Omega\delta_{kl}$ (впервые эта модель была предложена в [3]). Поставим спектральную задачу:

$$\begin{aligned}&(\omega^2\delta_{ik} - R_{ik})U_k = 0,\\ &R_{ik} = k^2(v_t^2\delta_{ik} + (v_l^2 - v_t^2)n_i n_k) + 2ik\Omega\varepsilon_{ikl}n_l.\end{aligned} \tag{6}$$

($v_l^2 = \lambda + 2\mu$ и $v_t^2 = \mu$ — квадраты скоростей продольной и поперечной волн в обычной теории.) Как уже отмечалось, одним из ее решений является $\mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{n}$ (с собственным значением $\omega^2 = k^2 v_l^2$). Два оставшихся решения могут быть описаны следующим образом. Введем единичные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, так что $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ составляют правую тройку. Тогда комбинации $\mathbf{U}^{(1,2)} = (\mathbf{l} + i\mathbf{m})/\sqrt{2}$ будут собственными векторами с собственными значениями $\omega_{1,2}^2 = k^2 v_t^2 \mp 2k\Omega$. Как видно, это векторы правой и левой круговых поляризаций. Их линейная комбинация

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{U}^{(1)} e^{-i\varphi} + \mathbf{U}^{(2)} e^{i\varphi}) = \mathbf{l}\cos\varphi + \mathbf{m}\sin\varphi$$

описывает линейно поляризованные (ориентация задается углом φ) колебания. Угол φ связан с разностью набега фаз волн с векторами поляризации $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)}$.

Во введении уже отмечалось, что к построению функции Грина уравнения (2) применима техника проекционных операторов [17]. Поскольку в данном случае все три собственных значения различны, проекторы вычисляются по формулам:

$$\hat{\Pi}_1 = \frac{(\hat{R} - \omega_2^2)(\hat{R} - \omega_3^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}, \quad \hat{\Pi}_2 = \frac{(\hat{R} - \omega_1^2)(\hat{R} - \omega_3^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega_3^2)},$$
$$\hat{\Pi}_3 = \frac{(\hat{R} - \omega_1^2)(\hat{R} - \omega_2^2)}{(\omega_3^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_2^2)}.$$

Подставляя $\hat{R}$ из (6), находим

$$\Pi_{ik}^{(1,2)} = \tfrac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k \mp i\varepsilon_{ikl} n_l), \qquad \Pi_{ik}^{(3)} = n_i n_k.$$

Функция Грина в импульсном представлении имеет вид:

$$\hat{G} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\hat{\Pi}_a}{\omega_a^2 - \omega^2}$$

Поперечно-изотропная среда

Одним из наиболее простых, но важным примером анизотропной среды является поперечно-изотропная среда. Свойства анизотропии такой среды описываются единичным характеристическим вектором $\mathbf{a}$. Тензор Гука строится из δ-символов и векторов a_i:

$$c_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\ + C a_i a_j a_k a_l + D(a_i a_j \delta_{kl} + a_k a_l \delta_{ij}) + \\ + E(a_i a_k \delta_{jl} + a_j a_k \delta_{il} + a_i a_l \delta_{jk} + a_j a_l \delta_{ik}).$$

Тензор Грина—Кристоффеля будет следующим:

$$\Gamma_{ik} = \delta_{ik}(B + E(\mathbf{na})^2) + n_i n_k (A + B) + \\ + a_i a_k (E + C(\mathbf{na})^2) + (n_i a_k + a_i n_k)(E + D)(\mathbf{na}).$$

Обычно принято в качестве независимых параметров использовать компоненты тензора Гука в системе координат, где $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Введенные коэффициенты A, B, C, D, E связаны с ними равенствами:

$$c_{11} = A + 2B, \qquad c_{12} = A, \qquad c_{13} = A + D,$$
$$c_{33} = A + 2B + C + 2D + 4E, \qquad c_{44} = B + 4E.$$

Одним из собственных векторов тензора Грина—Кристоффеля является в этом случае вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$. Мы можем удовлетворить критерию (5), если положим $\Omega_{kl} = \Omega\varepsilon_{klm}a_m$. Спектральная задача принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&(\omega^2\delta_{ik} - R_{ik})U_k = 0,\\
&R_{ik} = k^2\big[\delta_{ik}(B + E(\mathbf{na})^2) + n_in_k(A + B) +\\
&\qquad + a_ia_k(E + C(\mathbf{na})^2) + (n_ia_k + a_in_k)(E + D)(\mathbf{na})\big] +\\
&\qquad + 2ik\Omega(n_ia_k - a_in_k).
\end{aligned}
$$

Одним ее решением является, конечно же, вектор $\mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$ с собственным значением $\omega^2 = k^2(B + E(\mathbf{na})^2)$. Два оставшихся могут быть найдены редукцией спектральной задачи. Напишем

$$
\begin{aligned}
R_{ik}n_k &= \big[k^2(A + 2B + (D + 2E)(\mathbf{na})^2) + 2ik\Omega(\mathbf{na})\big]\, n_i +\\
&+ \big[k^2(C(\mathbf{na})^3 + (D + 2E)(\mathbf{na})) - 2ik\Omega\big]\, a_i,\\
R_{ik}a_k &= \big[k^2(A + B + D + E)(\mathbf{na}) + 2ik\Omega\big]\, n_i +\\
&+ \big[k^2(B + E + (C + D + 2E)(\mathbf{na})^2) - 2ik\Omega(\mathbf{na})\big]\, a_i.
\end{aligned}
$$

Будем искать собственные векторы $\hat{R}$ в виде суперпозиции векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$. Тогда мы придем к спектральной задаче для матрицы

$$
\begin{pmatrix}
\begin{gathered} k^2(A + 2B + (D + 2E)(\mathbf{na})^2) + \\ +2ik\Omega(\mathbf{na}) \end{gathered} & \begin{gathered} k^2(A + B + D + E)(\mathbf{na}) + \\ +2ik\Omega \end{gathered} \\
\begin{gathered} k^2(C(\mathbf{na})^3 + (D + 2E)(\mathbf{na})) - \\ -2ik\Omega \end{gathered} & \begin{gathered} k^2(B + E + (C + D + 2E)(\mathbf{na})^2) - \\ -2ik\Omega(\mathbf{na}) \end{gathered}
\end{pmatrix}
$$

Мы не будем явно выписывать частот, поляризационных векторов и функции Грина. Соответствующие выражения слишком громоздки. Не составляет труда получить их (все манипуляции описаны выше), но это имеет смысл, только если вы собираетесь производить дальнейшие численные расчеты.

Нелинейное уравнение

Теории распространения волн (1) и (2) являются линейными. Они не учитывают взаимодействия волн и других нелинейных эффектов. Такое приближение допустимо почти для всех типов анизотропных сред и малых амплитуд смещений. Наряду с линейной теорией, описываемой уравнением (1), широко используется уравнение, содержащее дополнительный градиентный член [8]:

$$
\left[\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(c_{ijkl} + c^*_{ijklmn}(\nabla_m u_n)\right)\nabla_j\nabla_l\right] u_k = 0. \tag{7}
$$

Тензор модулей упругости 6-го ранга c^*_{ijklmn} включает учет как собственно нелинейных упругих сил, так и геометрическую нелинейность, обусловленную присутствием квадратичных членов в полном тензоре деформаций. Обычно на него накладывают определенные свойства симметрии, аналогичные свойствам симметрии тензора c_{ijkl}.

В некоторых работах (см., например, [9]) осуществлялись попытки связать объяснение эффекта вращения плоскости поляризации со свойствами решений нелинейного уравнения (7). При этом решение, как и в работе [8], строилось в виде ряда теории возмущений. В качестве начального приближения использовалась гармоническая функция $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{U}^{(0)} \sin\psi$, где $\psi = \omega_0 t - (\mathbf{kx})$. Ряды теории возмущений с таким выбором начального приближения являются асимптотическими [10]. Подобный способ построения приводит к нефизическим эффектам типа роста амплитуды решения в неактивной среде, генерации кратных гармоник и т. п. Результат этого построения, строго говоря, справедлив лишь в локальной области $\psi = 0$. Как было указано ранее [11], существование нелинейного члена в волновом уравнении (7), даже при наличии малого параметра при производной, качественно меняет класс решений этого уравнения. Для данного типа нелинейности базовыми функциями при построении ряда теории возмущений должны являться не тригонометрические $\sin\psi$ и $\cos\psi$, а эллиптические функции Якоби [12,13], позволяющие учитывать солитонные решения нелинейных уравнений.

Отметим также, что данный класс функций наиболее интересен с точки зрения теории устойчивости для волновых уравнений нелинейного типа. Частные случаи эллиптических волн — решения вида уединенных волн (солитонов) и кинков появляются во многих нелинейных уравнениях (Кортевега—де-Фриза, sin-Гордона, нелинейном уравнении Шредингера и т. д.). Их характерной особенностью является нелинейная устойчивость. Данное свойство не может быть выявлено на наивном уровне линеаризации уравнения (устойчивость по Ляпунову), а нуждается в применении сложных математических методов [14], в частности спектральной теории операторов. Точно так же и теория возмущений, построенная на классе тригонометрических функций, соответствует процедуре линеаризации уравнения в области неустойчивости решения.

Результаты, полученные таким образом, не обладают необходимой степенью достоверности, а их ценность (или отсутствие таковой) и область применимости может быть установлена только на основе сравнения с экспериментальными данными.

Подобные вопросы обсуждались авторами данной работы еще в теории поля (неабелевы калибровочные поля), которая в некоторых вопросах близка к рассматриваемой модели (7). Наличие неустойчивых (в линейном приближении) полевых мод приводило к необходимости учета нелинейных слагаемых в уравнениях теории поля. Таким методом достигалась стабилизация растущего в линейном приближении волнового возмущения [15,16].

В то же время теория возмущений, построенная на начальном приближении из класса эллиптических функций, качественно верно описывает физику явления для всех значений ψ и является более предпочтительной.

Так, например, для начального приближения $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{U}^{(0)} \operatorname{th}\psi$ (имеющего форму кинка) с параметрами, удовлетворяющими уравнению

$$(v_0^2 \delta_{ik} - \Gamma_{ik}) U_k^{(0)} = 0, \qquad v_0 = \omega/k,$$

первая поправка ряда теории возмущений будет иметь вид:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{th}\psi \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} \operatorname{th}^2\psi\right).$$

Вектор $\mathbf{U}^{(1)}$ находится из уравнения:

$$(v_0^2\delta_{ik} - \Gamma_{ik})U_k^{(1)} = k\Gamma^*_{ikm}U_k^{(0)}U_m^{(0)}.$$

Здесь $\Gamma^*_{ikm} = c^*_{ijklmn}n_j n_l n_n$. Поправка $\mathbf{u}^{(1)}$ модифицирует форму решения, не меняя качественно его поведения. Асимптотики полного решения $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$ при $\psi \to \pm\infty$ будут следующими:

$$\mathbf{u}|_{\psi\to\pm\infty} \to \pm\left[\mathbf{U}^{(0)} + \tfrac{1}{3}\mathbf{U}^{(1)}\right].$$

Наличие таких поправок не связано с вращением плоскости поляризации в смысле, изложенном выше. Если же (при ином способе решения) подобные эффекты появляются, то их следует считать артефактами теории возмущений.

Заключение

В ряде геофизических экспериментов реально наблюдается эффект вращения плоскости поляризации упругих волн, распространяющихся в анизотропных средах. Предпринимались попытки связать этот эффект с нелинейными свойствами среды, а также объяснить его неверным построением теории возмущений для нелинейных уравнений. Мы продемонстрировали, что эффект вращения плоскости поляризации может быть объяснен в рамках линейной теории. При наличии нелинейности в волновом уравнении он также имеет место, но обуславливается теми же физическими причинами, что и в линейном случае. Это позволяет ставить вопрос о построении модельных (эффективных) геофизических сред, имеющих свойства, близкие к наблюдаемым в экспериментах. Такой подход позволит более точно описывать геофизические среды на уровне физических моделей и, возможно, даст правильное представление о их внутренней структуре.

Литература

1. В. А. Магницкий, *Внутреннее строение и физика Земли*, М. Недра, 1965, p. 379.
2. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах*, М. Наука, 1965, p. 386.
3. А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, А. В. Татаринцев, *О вращении плоскости поляризации волн, распространяющихся в упругих анизотропных средах* (1994), Препринт ИФВЭ 94-80, Протвино.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля (Теоретическая физика, т. 2)*, М. Наука, 1988, p. 512.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред (Теоретическая физика, т. 8)*, М. Наука, 1982, p. 620.
6. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, М. Наука, 1975, p. 415.
7. А. С. Вшивцев, А. В. Татаринцев, Е. М. Чесноков, *Построение функции Грина при наличии анизотропии среды*, Изв. РАН, Физика Земли **9** (1994), 80–87.
8. В. Е. Лямов, *Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах*, М. Изд. Моск. ун-та, 1983, p. 224.
9. И. Д. Цванкин, Е. М. Чесноков, *Плоские волны в нелинейно-упругой анизотропной среде*, Изв. АН СССР, Физика Земли **5** (1987), 3–11.
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М. Физматгиз, 1974, p. 503.
11. А. С. Вшивцев, Е. М. Чесноков, *Распространение упругих плоских волн солитонного типа в нелинейной анизотропной среде*, Изв. РАН, Физика Земли **7–8** (1994), 123–125.

12. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М. Наука, 1979, p. 832.
13. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, т. 3*, М. Наука, 1967, p. 299.
14. Е. П. Жидков, К. П. Кирчев, *Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики*, Физика ЭЧАЯ **16** (1985), no. 3, 597–648.
15. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, О. Ф. Семенов, А. В. Татаринцев, *Устойчивость постоянных неабелевых хромомагнитных полей*, Изв. Вузов. Физика **12** (1987), 14–16.
16. А. С. Вшивцев, А. В. Татаринцев, *Самосогласованные решения классических уравнений движения калибровочных полей и полей Хиггса*, Укр. Физ. журн. **33** (1988), no. 2, 165–171.
17. А. С. Вшивцев, Д. В. Перегудов, А. В. Татаринцев, *Метод проекционных операторов и построение функции Грина волнового уравнения*, Изв. Вузов. Физика **4** (1995), 101–111.
18. Б. М. Даринский, *Акустические оси в кристаллах*, Кристаллография **39** (1994), no. 5, 773–780.

Институт планетарной геофизики РАН

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

Московская Академия приборостроения и информатики