

# Дифракция поперечных волн на границе ядро—мантия при наличии горизонтальной неоднородности

Д. В. Перегудов

Объединенный институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта

## Аннотация

В работе рассматривается задача дифракции поперечных волн на границе ядро—мантия при наличии горизонтальной неоднородности в лучевом приближении. По результатам работы составлена программа для расчета сейсмограмм дифрагированных волн.

## 1 Введение

Переходной слой на границе ядро—мантия, так называемая зона  $D''$ , давно привлекает внимание исследователей. Считается установленным, что этот слой характеризуется довольно сильной горизонтальной неоднородностью. Для изучения его свойств особенно удобными оказываются дифрагированные волны, значительная часть луча которых лежит в зоне  $D''$ . Для интерпретации записей дифрагированных волн нужно уметь рассчитывать волновые формы в моделях Земли с горизонтальной неоднородностью. В отличие от сферически-симметричных моделей, в которых расчет волновых форм может быть выполнен в некотором смысле точно, в моделях с горизонтальной неоднородностью приходится использовать приближения. Наиболее естественными и популярными являются рэлеевское приближение (слабая неоднородность с размерами меньше длины волны) и обратное ему лучевое приближение (параметры среды мало меняются на расстояниях порядка длины волны). Настоящая работа посвящена расчету волновых форм дифрагированных поперечных волн в лучевом приближении.

Следует отметить, что лучевому приближению, в том числе и для дифрагированных волн, посвящено большое число работ (см. например, [1, 2, 3, 5]). Однако, как правило, волновые формы в них явно не строятся. Обычно дело ограничивается общими формулами в частотной области, в которые входят лучи и геометрические расхождения, при этом вопрос о трассировании лучей и вычислении геометрических расхождений опускают. Кроме того, в основном рассматривается дифракция продольных волн. Наша же задача состояла в разработке алгоритма расчета волновых форм и последующей его реализации в виде программы, хотя бы для некоторого класса моделей с горизонтальной неоднородностью.

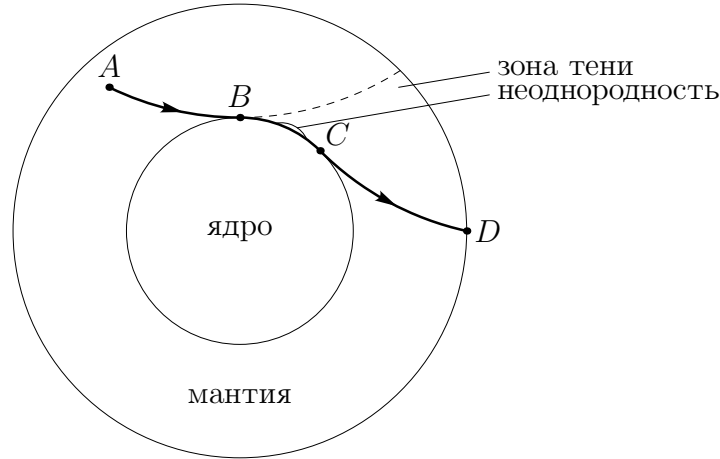


Рис. 1: К постановке задачи

Непосредственным стимулом к рассмотрению дифракции поперечных волн в модели с горизонтальной неоднородностью послужило часто наблюдаемое в записях расщепление  $SV$ - и  $SH$ -компонент. В сейсмологическом сообществе бытовало мнение, что подобное расщепление может быть объяснено не только анизотропией, но и горизонтальной неоднородностью в зоне  $D''$ . Скажем сразу, что эта надежда не оправдалась. В нашем приближении уравнения эйконала для обеих поляризаций оказываются одинаковыми. Однако иллюзия расщепления все же возможна из-за разной формы сигналов, а также из-за смешивания компонент, поскольку луч в горизонтально неоднородной модели уже не лежит в плоскости большого круга, содержащей источник и станцию. Наконец, нельзя исключать возможность расщепления в более сложных моделях, например, в моделях с волноводным слоем в зоне  $D''$ .

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим простейшую двухслойную модель Земли. Верхний слой — мантия — представляет собой изотропную неоднородную упругую среду, нижний слой — ядро — неоднородную жидкость. (Под двухслойной мы понимаем модель, не содержащую других разрывов параметров кроме разрыва на границе ядро—мантия.) Вертикальная неоднородность может быть достаточно произвольной, что же касается горизонтальной неоднородности, то ее мы будем считать сосредоточенной вблизи границы ядро—мантия.

Распространение волн в указанной модели будем рассматривать в лучевом приближении, ограничиваясь первыми неисчезающими членами соответствующих лучевых рядов. Поперечные волны не проходят сквозь жидкое ядро, поэтому образуется зона тени. Наблюдаемые в зоне тени колебания определяются дифрагированными волнами. Типичный луч такой волны изображен на рис. 1. Выходя из источника  $A$ , он касается границы  $S$  ядро—мантия в точке  $B$ , скользит по границе до точки  $C$ , в которой опять же по касательной соскальзывает с  $S$ , и выходит на поверхность в точке  $D$ . На участках  $AB$  и  $CD$  можно применять обычный лучевой метод, на участ-

ке  $BC$  (собственно дифракция) нужно модифицировать лучевое разложение. Подобная модификация хорошо разработана. В частности, задача дифракции продольных волн рассмотрена в работах [1, 5]. Мы считаем, что горизонтальная неоднородность сосредоточена вблизи внутренних точек кривой  $BC$ , а лучи  $AB$  и  $CD$  лежат в сферически-симметричной среде.

По методическим причинам нами принят следующий порядок изложения. Сначала рассмотрена основная часть задачи — дифракция на участке  $BC$ . Строится так называемая волна соскальзывания. Затем рассматривается сопряжение волны соскальзывания с обычным лучевым разложением в точке  $C$ , а также отражение волны в точке  $D$  (напомним, что смещение на поверхности есть сумма падающей и отраженной волн). Далее решается вопрос о начальных данных для лучевого разложения. Мы считаем, что источник  $A$  характеризуется произвольным тензором сейсмического момента (а полная сила и полный момент сил равны нулю). Наконец, обсуждается вычисление начальных данных для волны соскальзывания по лучевому разложению волны  $AB$ .

Поскольку мы имеем в виду практическое применение полученных формул, в последних разделах приведены вычисления геометрического расхождения и способ трассировки луча.

Все построения производятся в стационарной постановке, то есть зависимость от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ .

### 3 Построение волны соскальзывания

Метод построения волны соскальзывания для дифракции на свободной границе твердого тела подробно описан в работе [1]. Промежуточные вычисления оказываются довольно громоздкими, тем не менее результат оказывается очень простым. Поскольку мы рассматриваем дифракцию не на свободной границе твердого тела, а на границе твердое тело—жидкость, то промежуточные вычисления оказываются даже более громоздкими, чем в работе [1]. Мы не станем их приводить, а приведем только окончательный результат, который оказывается простым и мало отличается от результата работы [1]. Для записи этого результата нам придется ввести некоторые обозначения из [1].

Прежде всего введем удобную систему координат вблизи  $S$ . Пусть на  $S$  задана функция  $\tau$  (поверхностный эйконал), такая что  $(\nabla\tau)^2 = 1/v_s^2$ ,  $v_s$  — скорость поперечных волн. Линии уровня и линии градиента  $\tau$  образуют на  $S$  ортогональную сетку координат  $(\tau, \alpha)$ ,  $\alpha$  параметризует линии градиента (лучи). Мы предполагаем, что поле лучей регулярно. Метрический тензор этой системы координат (первая квадратичная форма поверхности) имеет отличные от нуля компоненты  $g_{\tau\tau} = v_s^2$  и  $g_{\alpha\alpha}$ .

Из каждой точки вблизи  $S$  можно единственным способом опустить нормаль на  $S$ , саму точку можно, следовательно, характеризовать координатами основания нормали  $\tau, \alpha$  и ее длиной  $\nu$ . Мы считаем координату  $\nu$  положительной в мантии и отрицательной в ядре. Система координат  $(\tau, \alpha, \nu)$  не является, вообще говоря, ортого-

нальной. Ее метрический тензор  $G$  с точностью до  $O(\nu^2)$  равен

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau} &= g_{\tau\tau} - 2\nu b_{\tau\tau} + O(\nu^2), & G_{\tau\nu} &= 0, \\ G_{\tau\alpha} &= -2\nu b_{\tau\alpha} + O(\nu^2), & G_{\alpha\nu} &= 0, \\ G_{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} - 2\nu b_{\alpha\alpha} + O(\nu^2), & G_{\nu\nu} &= 1, \end{aligned}$$

где  $b$  — вторая квадратичная форма поверхности  $S$  (для сферы радиуса  $R$  имеем  $b_{\tau\tau}/g_{\tau\tau} = -1/R$ ,  $b_{\alpha\alpha}/g_{\alpha\alpha} = -1/R$ ,  $b_{\tau\alpha} = 0$ ).

Из задач дифракции, допускающих точное решение (методом разделения переменных), известно, что колебания в волне соскальзывания сосредоточены в слое толщиной  $O(\omega^{-2/3})$ . Удобно “перенормировать” координату  $\nu$ , введя вместо нее

$$\zeta = \omega^{2/3}\nu.$$

Результат для смещения  $U$  в нулевом порядке выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} U^\alpha &= A(\alpha) \sqrt{\frac{b}{\rho g_{\alpha\alpha} j}} \exp\{i\omega\tau + i\omega^{1/3}\xi'\Delta\} w_1(\xi' - b\zeta), \\ U^\nu &= B(\alpha) \sqrt{\frac{b}{\rho j}} \exp\{i\omega\tau + i\omega^{1/3}\xi\Delta + i\Phi\} w_1(\xi - b\zeta), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $w_1(x)$  — функция Эйри с асимптотикой

$$w_1(-x) \sim x^{-1/4} \exp\left\{i\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$\xi$  и  $\xi'$  — нули функции Эйри и ее производной ( $w_1(\xi) = 0$ ,  $w_1'(\xi') = 0$ ),

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{2v_s}{R_{\text{эфф}}}\right)^{2/3} d\tau, \quad \Phi = \int_0^\tau \left(\frac{\rho}{\sqrt{1 - v_s^2/v_p^2}} + \frac{\rho_2}{\sqrt{1 - v_s^2/v_{p2}^2}}\right)^{-1} \frac{4\rho v_s d\tau}{R_{\text{эфф}}}.$$

Следуя работе [1], мы также использовали обозначения

$$j^2 = g_0 = g_{\tau\tau}g_{\alpha\alpha}, \quad \frac{1}{R_{\text{эфф}}} = -\frac{b_{\tau\tau}}{v_s^2} - \frac{v_s'}{v_s} = \frac{1}{R} - \frac{v_s'}{v_s}, \quad b^3 = \frac{2}{v_s^2 R_{\text{эфф}}}$$

(под  $v_s' = \partial v_s / \partial \nu$  понимается производная по нормали к поверхности  $S$ ). Индексом 2 помечены параметры ядра. Функции  $A(\alpha)$  и  $B(\alpha)$  остаются произвольными и должны быть определены из условия “сшивания” в точке  $B$ .

Кажущаяся разница в предэкспоненциальном множителе  $U^\alpha$  и  $U^\nu$  в действительности не имеет места. Напомним, что мы вычислили контравариантные компоненты вектора. Физический же смысл имеет модуль вектора  $U^2 = U^i U_i = U^i U^j g_{ij}$ . Поскольку  $g_{\nu\nu} = 1$ , для модулей получается одна и та же предэкспонента.

Величина  $j$  имеет смысл поверхностной расходимости лучей.

Нетрудно видеть, что компонента  $U^\alpha$  описывает  $SH$ -волну, а компонента  $U^\nu$  —  $SV$ -волну. Формула для  $SH$ -волны в точности совпадает с формулой работы [1], что не удивительно, поскольку  $SH$ -волна не порождает  $P$ -волны в ядре, а потому и

не “чувствует” его присутствия. Формула для  $SV$ -волны отличается от результата работы [1] выражением для величины  $\Phi$ . Мы считаем, что  $v_{p2} > v_s$ , поэтому величина  $\Phi$  вещественна.

Удивительной особенностью формул (1) является отсутствие смешивания  $SV$ - и  $SH$ -компонент. В обычном лучевом методе, если только луч не лежит в плоскости, вектор поляризации поперечных волн поворачивается вокруг луча по мере распространения, и компоненты  $SV$  и  $SH$  перемешиваются: если даже в какой-то точке луча есть только  $SV$ -компонента, то в других точках есть уже и  $SH$ , и наоборот. Тем не менее в конце концов смешивание имеет место, хотя и по другой причине: направление выхода луча в точке  $D$  не лежит в плоскости большого круга, содержащей источник и станцию.

## 4 Продолжение волны соскальзывания на произвольные расстояния от $S$

Мы построили волну соскальзывания в слое толщиной  $\sim \omega^{-2/3}$  вблизи поверхности  $S$ . В конечном итоге нас интересует смещение в точке  $D$ , поэтому нужно найти способ продолжить решение на произвольные расстояния от  $S$ . Непосредственно формулы (1) для этого не годятся. Однако, как уже отмечалось при постановке задачи, на всем пути  $CD$  (кроме окрестности точки  $C$ ) можно использовать обычное лучевое разложение. Первый член такого разложения имеет вид

$$U^i = \sqrt{\frac{v_s}{\mu J}} \chi^i \exp\{i\omega\tau_1\}, \quad (2)$$

где  $J$  — геометрическое расхождение. Граница  $S$  является каустикой для лучей соскальзывания типа  $CD$ , поэтому на  $S$  геометрическое расхождение обращается в нуль и обычное лучевое разложение неприменимо. Эйконал лучей соскальзывания  $\tau_1$  определяется просто: на поверхности  $S$  он совпадает с эйконалом  $\tau$ , а вдоль лучей соскальзывания изменяется в соответствии с известной формулой

$$\tau_1(D) = \int_{CD} \frac{ds}{v_s},$$

интегрирование ведется по длине дуги. Наша задача заключается в том, чтобы определить начальные данные  $\chi^i$ . Для этого применяется прием сращивания асимптотических разложений, который технологически состоит в следующем (для определенности рассмотрим  $SH$ -волну). Асимптотика (1) “незаконно” продолжается в область  $\nu \sim 1$ , при этом используется известная асимптотика функции Эйри

$$w_1(-x) \sim x^{-1/4} \exp\left\{i\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Мы находим (для модуля вектора)

$$U_{SH} \sim A(\alpha) \sqrt{\frac{b}{\rho j}} \exp\{i\omega\tau + i\omega^{1/3}\xi'\Delta\} (b\zeta)^{-1/4} \exp\left\{i\left(\frac{2}{3}(b\zeta)^{3/2} - (b\zeta)^{1/2}\xi' + \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Теперь мы в этом выражении переходим к пределу  $\nu \rightarrow 0$  и выделяем особенность

$$U_{SH} \sim A(\alpha) \sqrt{\frac{b_C}{\rho_C j_C}} \exp\{i\omega\tau_C + i\omega^{1/3}\xi'\Delta_C\} b_C^{-1/4} \omega^{-1/6} \nu^{-1/4} e^{i\pi/4}. \quad (3)$$

Используя асимптотическое уравнение луча  $CD$  вблизи точки  $C$

$$\nu = \frac{s^2}{2R_{эффC}} + \dots,$$

где  $s$  — расстояние от точки  $C$ , измеренное вдоль луча, и нормируя расходимость на луче  $CD$  условием

$$J = s + \dots,$$

из сравнения формул (2) и (3) находим

$$U_{SH}(D) = A(\alpha) \sqrt{\frac{b_C}{\rho_C j_C}} \exp\{i\omega\tau_1 + i\omega^{1/3}\xi'\Delta_C\} b_C^{-1/4} \omega^{-1/6} (2R_{эффC})^{1/4} \sqrt{\frac{\mu_C v_{sD}}{\mu_D v_{sC}}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{J_D}}, \quad (4)$$

где  $\tau_1$  представляет собой время пробега по лучу  $BCD$ . Аналогично для  $SV$ -волны получаем результат

$$U_{SV}(D) = B(\alpha) \sqrt{\frac{b_C}{\rho_C j_C}} \exp\{i\omega\tau_1 + i\omega^{1/3}\xi'\Delta_C + i\Phi_C\} b_C^{-1/4} \omega^{-1/6} (2R_{эффC})^{1/4} \sqrt{\frac{\mu_C v_{sD}}{\mu_D v_{sC}}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{J_D}}, \quad (5)$$

## 5 Отражение волны в точке $D$

Наблюдаемое смещение в точке  $D$  в действительности не равно вычисленному  $U(D)$ . Мы вычислили только падающую волну, а смещение свободной поверхности определяется суммой падающей и отраженной волн. В низшем приближении лучевого метода коэффициенты отражения такие же, как в однородной среде от плоской границы. Введем в точке  $D$  локальную систему координат  $x, y, z$ . Ось  $z$  направим вертикально, оси  $x$  и  $y$  — горизонтально, причем ось  $x$  лежит в плоскости падения луча. Заимствуя выражения для коэффициентов отражения из книги [4], найдем

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{2 \cos \delta (1 - 2 \sin^2 \delta)}{(1 - 2 \sin^2 \delta)^2 + 4 \sin^2 \delta \cos \delta \sqrt{v_s^2/v_p^2 - \sin^2 \delta}} U_{SV}(D), \\ U_y &= 2U_{SH}(D), \\ U_z &= -\frac{4 \sin \delta \cos \delta \sqrt{v_s^2/v_p^2 - \sin^2 \delta}}{(1 - 2 \sin^2 \delta)^2 + 4 \sin^2 \delta \cos \delta \sqrt{v_s^2/v_p^2 - \sin^2 \delta}} U_{SV}(D), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta$  — угол выхода луча в точке  $D$ .

## 6 Начальные данные для лучевого разложения в точке $A$

Вопрос о начальных данных для лучевого разложения поля точечного источника подробно исследовался в работе [2]. В низшем приближении рецепт прост. Нужно решить задачу о точечном источнике в однородной среде с параметрами, равными параметрам исходной неоднородной среды в точке, где находится источник. Такого рода решение для источника в виде тензора сейсмического момента можно найти, например, в книге [4]. Далее нужно выделить выражение для поля в дальней зоне, то есть выделить члены, убывающие обратно пропорционально расстоянию  $r$  до источника. Для рассматриваемого случая эти члены имеют вид

$$U_i \sim -i\omega \frac{n_i(M_{kp}(\omega)n_k n_p)}{4\pi\rho v_p^3} \frac{e^{i\omega r/v_p}}{r} - i\omega \frac{M_{ip}(\omega)n_p - n_i(M_{kp}(\omega)n_k n_p)}{4\pi\rho v_s^3} \frac{e^{i\omega r/v_s}}{r}.$$

Здесь  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении  $\vec{r}$ . Первое слагаемое описывает продольную волну, а второе — поперечную. Переходя к пределу  $r \rightarrow 0$  и сравнивая эту формулу (точнее, второй ее член) с низшим порядком лучевого разложения

$$U_i = \sqrt{\frac{v_s}{\mu J}} \psi_i \exp\{i\omega\tau_2\},$$

где  $\tau_2$  — время пробега по лучу  $AB$ , отсчитанное от точки  $A$ , получим

$$U_i(B) = -i\omega \frac{M_{ip}(\omega)n_p - n_i(M_{kp}(\omega)n_k n_p)}{4\pi\rho_A v_{sA}^3} \sqrt{\frac{\mu_A v_{sB}}{\mu_B v_{sA}}} \frac{e^{i\omega\tau_2}}{\sqrt{J_B}}, \quad (7)$$

где теперь вектор  $\vec{n}$  имеет смысл единичного вектора в направлении выхода луча  $AB$  из точки  $A$ . Расходимость  $J$  нормирована в точке  $A$  условием

$$J = r^2 + \dots$$

Мы допускаем некоторую вольность в обозначениях: в правую часть входят компоненты тензора момента и вектора  $\vec{n}$  в проекциях на локальный  $(P, SV, SH)$ -базис в точке  $A$ , тогда как в левой части стоит проекция на локальный базис в точке  $B$ .

## 7 Начальные данные для волны соскальзывания в точке $B$

Начальные данные для волны соскальзывания можно получить способом, описанным в работе [5]. Для этого сначала нужно построить решение, справедливое всюду в окрестности точки  $B$  (решение (1) справедливо только в зоне тени), а затем сшить это решение с падающей волной (7) и волной соскальзывания (1). В результате мы получаем связь коэффициентов  $A(\alpha)$  и  $B(\alpha)$  из формулы (1) (а также формул (4) и (5)) с падающей волной (7)

$$\begin{aligned} \frac{U_\alpha(B)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi' w_1^2(\xi')} &= A(\alpha) \sqrt{\frac{b_B}{\rho_B j_B}}, \\ \frac{U_\nu(B)}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{w_1^2(\xi)} \right) &= B(\alpha) \sqrt{\frac{b_B}{\rho_B j_B}}, \end{aligned} \quad (8)$$

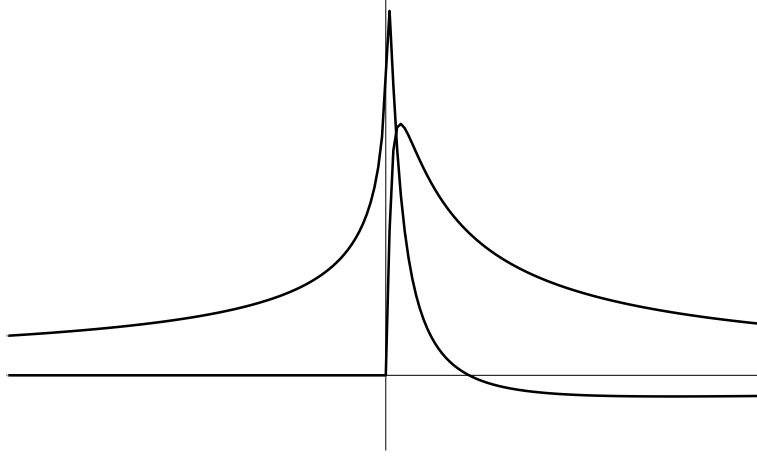


Рис. 2: Базисные функции волновых форм

Подставляя найденные коэффициенты в формулы (4) и (5), получим окончательный результат

$$U_{\left\{ \begin{smallmatrix} SH \\ SV \end{smallmatrix} \right\}}(D) = \sqrt{\frac{\mu_B}{\mu_D}} \left( \frac{R_{\text{эфф}B} R_{\text{эфф}C}}{v_{sB} v_{sC}} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{v_{sD} j_B}{J_D j_C}} 2^{7/6} \sqrt{\pi} \omega^{-1/6} e^{i\pi/12} \times \left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{U_\alpha(B)}{4t'v^2(-t')} \exp(i\omega\tau_1 + \omega^{1/3}\xi'\Delta_C) \right. \\ \left. \frac{U_\nu(B)}{4v'^2(-t)} \exp(i\omega\tau_1 + \omega^{1/3}\xi'\Delta_C + i\Phi_C) \right\} \end{array} \right). \quad (9)$$

Здесь величины  $U_\alpha(B)$   $U_\nu(B)$  определяются из формул (7), а частные значения функции Эйри  $w_1$  выражены через значения (вещественной) функции Эйри  $v(t)$ , которая имеет асимптотику

$$v(-t) \sim t^{-1/4} \sin \left\{ \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right\}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Во временной области смещение, вычисленное по формуле (9), представляет собой линейную комбинацию двух базисных функций, показанных на рис. 2 (на самом деле они являются вещественной и мнимой частями некоторой комплексной функции, аналитической в верхней полуплоскости).

## 8 Трассировка луча и вычисление геометрического расхождения

Трассировка лучей  $AB$  и  $CD$  и вычисление геометрических расхождений  $J_B$  и  $J_D$  могут быть проделаны в общем виде, поскольку эти лучи лежат в сферически симметричной среде. Формулы трассировки можно найти, например, в книге [4]

$$\tau = \int \frac{dr}{v(r)} \left( 1 - \frac{p^2 v^2(r)}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad \theta = \int \frac{pv(r) dr}{r^2} \left( 1 - \frac{p^2 v^2(r)}{r^2} \right)^{-1/2}.$$



Здесь  $\tau$  — время пробега по лучу,  $\theta$  — соответствующий центральный угол,  $p$  — лучевой параметр, скорость волны зависит только от радиуса  $r$  (для упрощения обозначений мы опускаем индекс  $s$  у скорости). Отметим сразу же, что в задаче дифракции лучевой параметр заранее известен: в точке  $B$  должно обращаться в нуль выражение  $1 - p^2 v^2 / r^2$ , откуда

$$p = r_B / v_B.$$

Сразу известны и углы наклона лучей в точках  $A$  и  $D$

$$\sin \alpha = p v_A / r_A, \quad \sin \delta = p v_D / r_D.$$

Для вычисления геометрических расхождений мы воспользуемся результатом работы [3], в которой была выведена формула

$$J = J^0 \frac{(ac - b^2) r^2 r_s \sin \theta}{(a^0 c^0 - (b^0)^2) (r^0)^2 r_s^0 \sin \theta^0},$$

где

$$a = \tau_{\theta\theta}^0 / \Delta^0 + \int_0^s \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} ds, \quad b = \tau_{\theta\phi}^0 / \Delta^0,$$

$$c = \tau_{\phi\phi}^0 / \Delta^0 + \int_0^s \frac{v}{r^2 r_s^2} ds, \quad \Delta^0 = \tau_{\theta\theta}^0 \tau_{\phi\phi}^0 - (\tau_{\theta\phi}^0)^2,$$

причем используются сферические координаты  $(\theta, \phi)$ ,  $r_s = \sqrt{1 - p^2 v^2 / r^2}$  — производная радиуса по дуге луча, и предполагается, что луч лежит в плоскости  $\phi = 0$ .

Нетрудно видеть, что эти формулы могут быть значительно упрощены. Во-первых, и на луче  $AB$  и на луче  $CD$  всюду  $\tau_{\theta\phi} = 0$ . Во-вторых, приведенная в [3] формула  $\tau_\theta / r^2 = \theta_s / v$  с учетом того, что  $\tau_\theta$  равно лучевому параметру  $p$ , позволяет вычислить один из интегралов. Окончательно

$$J = J^0 \frac{acr^2 r_s \sin \theta}{(r^0)^2 r_s^0 \sin \theta^0}, \quad (10)$$

где

$$a = 1 - \frac{\tau_{\phi\phi}^0}{p} (\text{ctg } \theta - \text{ctg } \theta^0), \quad c = 1 + \tau_{\theta\theta}^0 \int_0^s \frac{v}{r^2 r_s^2} ds.$$

## 8.1 Участок $AB$

Для вычисления геометрического расхождения  $J_B$  нужно ввести две вспомогательные точки  $A'$  и  $B'$  на луче  $AB$ , а затем перейти к пределу  $A' \rightarrow A$ ,  $B' \rightarrow B$ . Пусть луч  $AB$  лежит в плоскости  $\phi = 0$ , а точка  $A$  лежит на луче  $\theta = \pi/2$ . Тогда эйконал вблизи точки  $A$  равен

$$\tau = R / v_A + O(R^2),$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}_A|$ ,  $\vec{r} - \vec{r}_A = (r \sin \theta \cos \phi - r_A, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ , поэтому

$$(\tau_{\theta\theta})_{A'} = \frac{r_A^2 r_{sA}^2}{v_A R} + O(1), \quad (\tau_{\phi\phi})_{A'} = \frac{r_A^2}{v_A R} + O(1).$$

Согласно формуле (10)

$$J_{B'} = J_{A'} \left( -\frac{r_{B'}^2 r_{sB'} \sin \theta_{B'}}{r_A^2 r_{sA}} \frac{r_A^2 \operatorname{ctg} \theta_{B'}}{p v_A R} \frac{r_A^2 r_{sA}^2}{v_A R} \int_{AB'} \frac{v}{r^2 r_s^2} ds + O(1/R) \right).$$

Расходимость  $J_{A'}$  нормирована условием  $J_{A'} = R^2 + \dots$ , поэтому, переходя к пределу  $A' \rightarrow A$ , найдем

$$J_{B'} = \frac{r_{B'}^2 r_{sB'} r_A^2 r_{sA} \sin \theta_{AB'}}{p v_A^2} \int_{AB'} \frac{v}{r^2 r_s^2} ds.$$

Для перехода к пределу  $B' \rightarrow B$  нужно сперва проинтегрировать по частям в оставшемся интеграле. Имеем (штрих обозначает дифференцирование по радиусу)

$$\left( \frac{1}{r_s} \right)' = -\frac{p^2 v^2}{r_s^3 r^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{v'}{v} \right),$$

а потому (временно обозначим  $1/\rho = 1/r - v'/v$ )

$$\int_{AB'} \frac{v}{r^2 r_s^2} ds = - \int_{r_A}^{r_{B'}} \frac{v dr}{r^2 r_s^3} = \frac{\rho}{p^2 v r_s} \Big|_A^{B'} - \int_{AB'} \left( \frac{\rho}{p^2 v} \right)' \frac{dr}{r_s} = \frac{R_{\text{эфф}B}}{p^2 v_{B'} r_{sB'}} + O(1).$$

Окончательно

$$J_B = \frac{r_A^2 r_{sA} v_B^2 R_{\text{эфф}B} \sin \theta_{AB'}}{v_A^2 r_B}.$$

## 8.2 Участок $BC$

Для вычисления поверхностной расходимости удобно наряду с координатой  $\alpha$  ввести в окрестности рассматриваемого луча  $BC$  координату  $\beta$  так, чтобы  $(\tau, \beta)$  составляли римановы нормальные координаты (см., например [6]). В отличие от координаты  $\alpha$  координата  $\beta$  уже не постоянна вдоль лучей (кроме центрального луча  $BC$ , на котором она равна нулю). Справедливо равенство

$$(\tau_{\beta\beta})_{\tau} + \tau_{\beta\beta}^2 = -R/2,$$

где  $R$  — кривизна эйкональной метрики  $ds^2/v^2$  (величину  $R/2$  называют еще гауссовой кривизной). Кривизна является скаляром, поэтому может быть вычислена по заданной скорости  $v$  в любых координатах [7].

Подстановкой  $\tau_{\beta\beta} = a_{\tau}/a$  уравнение линеаризуется

$$a_{\tau\tau} + (R/2)a = 0. \quad (11)$$

Оказывается, что  $a$  весьма просто связана с расходимостью. Из общей формулы

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[ \left( \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} f_1 \right)_1 + \left( \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} f_2 \right)_2 \right],$$

справедливой для любых ортогональных координат, в частном случае римановых нормальных координат  $(\tau, \beta)$ , для которых на луче  $BC$   $g_{\tau\tau} = g_{\beta\beta} = v^2$ ,  $\tau_{\beta} = 0$ , находим

$$\Delta \tau = \tau_{\beta\beta}/v^2.$$

В случае координат  $(\tau, \alpha)$  имеем  $g_{\tau\tau} = v^2$ ,  $\tau_\alpha = 0$  всюду, а потому

$$\Delta\tau = \frac{1}{v\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \left( \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{v} \right)_\tau = \frac{1}{j} \left( \frac{j}{v^2} \right)_\tau.$$

Из сравнения двух выражений для  $\Delta\tau$  видно, что  $j = av^2$ .

Итак, вычисление поверхностной расходимости сводится к решению уравнения (11). К нему нужно поставить два начальных условия. Начальное значение  $a$  можно задать произвольно, например  $a = 1$ . Тогда значение производной  $a_\tau = \tau_{\beta\beta}$ . Пусть луч  $AB$  лежит в плоскости  $\phi = 0$ , а точка  $B$  лежит на луче  $\theta = \pi/2$ . Тогда в точке  $B$  имеем  $\tau_{\beta\beta} = (v_B/r_B)^2 \tau_{\phi\phi}$ . Согласно результатам работы [3] и сделанным выше замечаниям к ним,

$$\frac{1}{(\tau_{\phi\phi})_B} = \frac{1}{(\tau_{\phi\phi})_{A'}} + \int_{A'B} \frac{v ds}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{(\tau_{\phi\phi})_{A'}} - (\text{ctg } \theta_B - \text{ctg } \theta_{A'})/p.$$

В пределе  $A' \rightarrow A$  величина  $(\tau_{\phi\phi})_{A'} \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\frac{1}{(\tau_{\phi\phi})_B} = \frac{1}{p} \text{tg } \theta_{AB},$$

а второе начальное условие для уравнения (11) выглядит так

$$a_\tau = (v_B/r_B) \text{ctg } \theta_{AB}.$$

### 8.3 Участок $CD$

Для вычисления расходимости на луче  $CD$  положим, что он лежит в плоскости  $\phi = 0$ , а точка  $C$  — на луче  $\theta = \pi/2$ . В точке  $C$   $\tau_{\theta\theta} = 0$  и

$$\tau_{\phi\phi} = (r_B/v_B)^2 \tau_{\beta\beta} = r_B^2 \Delta\tau = \frac{r_B^2}{j} \left( \frac{j}{v_B^2} \right)_\tau = (r_B/v_B)^2 (\ln j)_\tau.$$

Вблизи точки  $C$   $r_s = s/R_{\text{эфф}B} + \dots$ . По формуле (10), учитывая нормировку  $J = s + \dots$  вблизи точки  $C$ , получим

$$J_D = \frac{r_D^2 r_s D R_{\text{эфф}C} \cos \theta_{CD}}{r_C^2} \left( 1 + \frac{r_C}{v_C} \text{tg } \theta_{CD} \frac{\partial \ln j}{\partial \tau} \right).$$

Таким образом, в формулах (7) и (9) все величины определены.

## 9 Неоднородность специального вида

Для практического вычисления волновых форм нужно как-то задавать базовую сферически-симметричную модель мантии и горизонтальную неоднородность в зоне  $D''$ . Что касается сферически-симметричной модели, то здесь существуют хорошо разработанные способы описания, так что этого вопроса мы вовсе не будем касаться. Отметим только, что от сферически-симметричной модели нам нужны лишь времена пробега по лучам  $AB$  и  $CD$ , да соответствующие этим лучам центральные углы  $\theta_{AB}$  и  $\theta_{CD}$ .

В качестве первого шага естественно рассмотреть простейшую модель неоднородности, в которой скорость зависит только от сферического угла  $\theta$ . Возьмем

$$v = v_B \frac{\alpha + \beta u/u_0}{1 + u}, \quad 0 < u < u_0, \quad (12)$$

где  $u = \text{tg}^2 \theta/2$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  можно выразить через разницу скоростей в центре и на краю неоднородности  $\Delta v$  и ее угловой размер  $u_0 = \text{tg}^2 \theta_0/2$

$$\alpha = 1 + \Delta v/v_B, \quad \alpha + \beta = 1 + u_0.$$

Если  $\Delta u \rightarrow 0$ , то  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow u_0$ . В дальнейшем будем считать, что  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Выбранная форма неоднородности интересна тем, что кривизна

$$R = \frac{2v_B^2 \alpha \beta}{r_B^2 u_0}$$

постоянна. Таким образом, можно наглядно представлять неоднородность как часть сферы радиуса  $\tilde{r} = r_B \sqrt{u_0/\alpha\beta}$ , а всю границу ядро–мантия — как поверхность двух слипшихся мыльных пузырей разных радиусов. Понятно, что трассирование лучей и вычисление геометрических расхождений на такой поверхности сводится к решению сферических треугольников.

Практически, однако, внутри самой неоднородности удобнее решать уравнение (11) для расходимости и уравнения Гамильтона для луча. Решение уравнения (11) тривиально

$$a = c_1 \cos \frac{v_B \tau}{\tilde{r}} + c_2 \sin \frac{v_B \tau}{\tilde{r}}$$

(аналогичная формула с заменой  $\tilde{r}$  на  $r_B$  справедлива вне неоднородности). Гамильтониан для трассирования луча равен

$$H = \frac{v^2}{2r_B^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

Законы сохранения

$$p_\phi = \text{const}, \quad H = 1/2 \quad (13)$$

(последний есть просто уравнение эйконала) позволяют вычислить угол отклонения луча в неоднородности и время пробега

$$\begin{aligned} \cos \phi &= -\frac{1 - 2\varepsilon^2(\alpha^2 + \beta^2)}{1 - 4\varepsilon^2\alpha\beta}, \\ \tau &= \frac{2\tilde{r}}{v_B} \arccos \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta)\sqrt{1 - 4\varepsilon^2\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varepsilon = q/2\sqrt{u_0}$ ,  $q = p_\phi v_B/r_B$ . Параметр  $q$ , подлежащий определению при трассировании луча, имеет смысл безразмерного момента импульса.

Спроектируем точки  $A$  и  $D$  радиально на границу ядро–мантия и обозначим проекции через  $\tilde{A}$  и  $\tilde{D}$ . Пусть луч  $BC$  входит в неоднородность в точке  $M$ , а выходит из нее в точке  $N$ . Центр неоднородности обозначим через  $I$  (см. рис. 3). Нам известно взаимное расположение точек  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{D}$  и  $I$ . Будем характеризовать длину дуги,

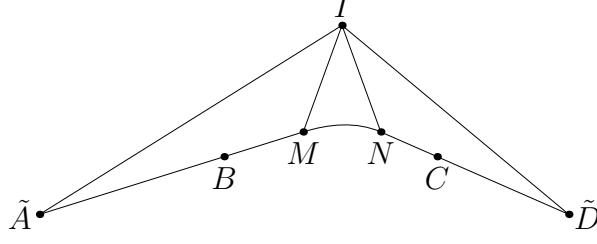


Рис. 3: Трассирование луча

например  $\tilde{AI}$ , соответствующим центральным углом  $\theta_{\tilde{AI}}$ . Углы же самих сферических треугольников будем обозначать буквой  $\phi$ .

Прежде всего свяжем параметр  $q$  с углом  $\phi_{I\tilde{AM}}$ . Если бы неоднородности не было, то луч  $\tilde{AM}$  продолжался бы дальше за точку  $M$ . Опустим на него перпендикуляр из точки  $I$ , основание перпендикуляра обозначим через  $O$ . По сферической теореме синусов

$$\frac{\sin \phi_{\tilde{AOI}}}{\sin \theta_{\tilde{AI}}} = \frac{\sin \phi_{I\tilde{AO}}}{\sin \theta_{IO}}.$$

Но  $\sin \phi_{\tilde{AOI}} = \sin \pi/2 = 1$ ,  $\phi_{I\tilde{AO}} = \phi_{I\tilde{AM}}$ , а  $\theta_{IO}$  представляет собой минимальное расстояние между лучом  $\tilde{AM}$  и точкой  $I$ . Из закона сохранения энергии (13) при  $p_\theta = 0$  получаем  $q = \sin \theta_{IO}$ . Итак,

$$q = \sin \theta_{\tilde{AI}} \sin \phi_{M\tilde{AI}}.$$

Теоремы косинусов и синусов для треугольника  $\tilde{AIM}$

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\tilde{AM}} &= \cos \theta_{\tilde{AI}} \cos \theta_0 + \sin \theta_{\tilde{AI}} \sin \theta_0 \cos \phi_{\tilde{AIM}}, \\ \frac{\sin \phi_{\tilde{AIM}}}{\sin \theta_{\tilde{AM}}} &= \frac{\sin \phi_{M\tilde{AI}}}{\sin \theta_0} \end{aligned}$$

позволяют исключить  $\theta_{\tilde{AM}}$  и выразить  $\phi_{\tilde{AIM}}$  как функцию  $q$  (при этом  $\sin \phi_{\tilde{AIM}}$  и  $\cos \phi_{\tilde{AIM}}$  выражаются в виде квадратичных иррациональностей). Аналогичные соотношения для треугольника  $\tilde{DIN}$  позволяют выразить  $\phi_{\tilde{DIN}}$  через  $q$ . Поскольку угол  $\phi_{MIN}$  также выражен через  $q$  (см. (14)), а угол  $\phi_{\tilde{AI}\tilde{D}}$  известен, то уравнение для определения  $q$  принимает вид

$$\phi_{\tilde{AIM}}(q) + \phi_{MIN}(q) + \phi_{\tilde{DIN}}(q) = \phi_{\tilde{AI}\tilde{D}}.$$

Так как после вычисления косинуса от обеих частей уравнения в левой части стоят только квадратичные иррациональности от  $q$ , то перемножением всех ветвей многозначных функций можно привести уравнение к алгебраическому относительно  $q$ . Нас интересуют вещественные корни этого уравнения на отрезке  $-q_{\max} < q < q_{\max}$ , где максимальное значение  $q$  определяется из условия касания луча  $\tilde{AM}$  и границы неоднородности

$$q_{\max} = \sin \theta_0.$$

Процедура поиска таких корней известна [8]. После определения параметра  $q$  определяются все стороны и углы сферических треугольников, а также времена пробега по лучам  $BM$ ,  $MN$  и  $NC$ . Затем определяются геометрические расходимости.

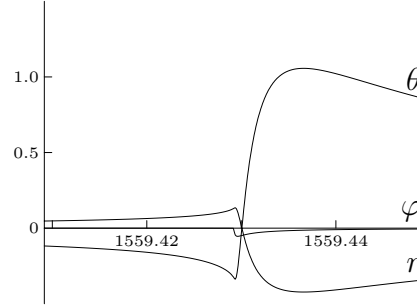


Рис. 4: Пониженная скорость

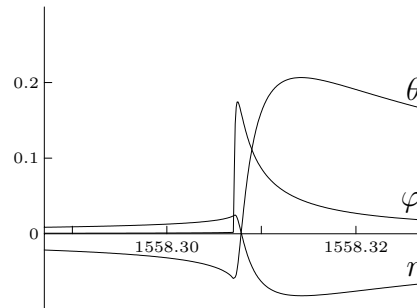


Рис. 5: Повышенная скорость

## 10 Заключение

По результатам настоящей статьи составлена программа, которая вычисляет волновые формы для заданной базовой сферически-симметричной модели Земли с заданной неоднородностью вида (12) при заданном положении источника и приемника.

Входными данными программы являются скоростной профиль мантии и значения скоростей в ядре на границе ядро—мантия. Считается, что источник расположен на оси  $z$  декартовой системы координат с началом координат в центре Земли (и его положение задано одним параметром — радиусом), а станция — в плоскости  $xz$  на поверхности Земли (ее положение задано углом  $\theta$  стандартной сферической системы координат). Источник характеризуется произвольным тензором сейсмического момента (шесть параметров). Положение центра неоднородности задается сферическими углами. Сама неоднородность характеризуется тремя параметрами: радиусом и значениями скорости и производной скорости по нормали к границе ядро—мантия в центре неоднородности.

Выходные данные программы: волновые формы в проекциях на локальный репер сферической системы координат в точке расположения станции.

На рис. 4 и рис. 5 приведены примеры расчета сейсмограмм для неоднородностей с пониженной и повышенной скоростями. Базовая модель Земли — однородная мантия  $3000 \text{ км} < r < 6000 \text{ км}$ ,  $v_s = 7 \text{ км/с}$ ,  $v_p = 13 \text{ км/с}$ ,  $\rho = 3 \text{ г/см}^3$  и ядро  $r < 3000 \text{ км}$ ,  $v_{p2} = 8 \text{ км/с}$ ,  $\rho_2 = 3 \text{ г/см}^3$ . Источник находится на поверхности. Тензор сейсмического момента имеет единственную отличную от нуля компоненту.

нту  $M_{xz} = 10^{25}$  Н · м (такой источник в сферически-симметричной среде возбуждает только  $SV$ -волну). Временная зависимость тензора момента — дельта-функция. Станция имеет сферические координаты  $(130^\circ, 0)$ . Центр неоднородности имеет сферические координаты  $(65^\circ, 2^\circ)$ . Радиус неоднородности 100 км. Скорость в центре неоднородности отличается от скорости на краю на 0.5 м/с (в меньшую и большую сторону соответственно). Времена пробега равны 1559.429161 с и 1558.307034 с. Глядя на рис. 4 и рис. 5, нужно иметь в виду, что лучевой метод гарантирует правильное вычисление смещения только непосредственно вблизи фронта дифрагированной волны, так что длинным “хвостам” сейсмограммы доверять не следует.

## Список литературы

- [1] П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев. О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 34 (1973) 72–92.
- [2] А. П. Киселев. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных упругих средах. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 15 (1975) 6–27.
- [3] Л. Г. Тюриков. Вычисление геометрического расхождения для вертикально-неоднородных сред и для сред со сферической или цилиндрической неоднородностью. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 20 (1981) 69–74.
- [4] К. Аки, П. Ричардс. Количественная сейсмология. Том 1. М.: Мир, 1983, 520 с.
- [5] Б. А. Чихачев. Дифракция упругой волны на границе двух неоднородных сред. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 16 (1976) 11–16.
- [6] В. М. Бабич, В. С. Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1973, 456 с.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля (Теоретическая физика, т. 2). М.: Наука, 1988, 512 с.
- [8] Л. С. Понтрягин. Знакомство с высшей математикой. Алгебра. М.: Наука, 1987, 136 с.