

ГЛЮОННЫЙ КОНДЕНСАТ

А. С. ВШИВЦЕВ И Д. В. ПЕРЕГУДОВ

Аннотация. В работе вычислен глюонный конденсат во внешнем сферически-симметричном неабелевом хромоманнитном поле в однопетлевом приближении.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно оценкам, полученным в работах [1,2] на основании экспериментальных данных с помощью правил сумм КХД, вакуумное среднее глюонных полей отлично от нуля и соответствует плотности энергии вакуума $0.15 \text{ ГэВ}/\text{Фм}^3$. В рамках теории калибровочных полей предпринимались попытки построить модели, в которых подобный глюонный конденсат возникал бы вследствие спонтанного нарушения симметрии. Исторически первой была модель вакуума Матиняна—Саввиди [3], в которой однородное абелево хромоманнитное вакуумное поле H моделировалось абелевыми же потенциалами:

$$A_i^a = H x_2 \delta^{a3} \delta_{i1}, \quad A_0^a = 0.$$

Позднее (см. [4,5,6,10]) были предложены принципиально другие модели вакуума, основанные на использовании постоянных неабелевых потенциалов. Наиболее простым примером является, по-видимому, поле “ 3λ ”:

$$gA_k^a = a\delta_{ka}, \quad A_0^a = 0.$$

Модели с неабелевыми постоянными потенциалами существенно отличаются от модели Матиняна—Саввиди, потому что эти потенциалы являются решениями классических уравнений Янга—Миллса с ненулевым током [11]. Наиболее подробный анализ теорий с током можно найти в работе [6]. Там полностью рассмотрена модель с полем “ 3λ ” и впервые в явном виде выписана функция Грина глюонов. Целью настоящей работы является вычисление однопетлевой поправки к глюонному конденсату в модели “ 3λ ”.

Я в неоплатном долгу перед А. В. Борисовым, объяснившим мне суть перенормировки, и Ю. В. Грацем, научившим меня правильно смотреть на тахионные моды (Д. П.).

ИСХОДНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Для формальной замкнутости работы нам придется привести некоторые результаты, полученные в [6]. Во-первых, мы приведем выражения для функции Грина глюонов:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\sigma) &= \frac{1}{a^2} \frac{2}{2 - \sigma f} \frac{1}{2q^2(\sigma f - 2) + 4\sigma f} \times \\
&\times \begin{pmatrix} f^2 - 2\sigma f + 2 & f^2 - 2\sigma f + 2 & f\chi \\ f^2 - 2\sigma f + 2 & f^2 - 2\sigma f + 2 & f\chi \\ f\chi & f\chi & f^2 - 2\sigma f + 2\chi^2 \end{pmatrix}, \\
G^{(2)}(\sigma) &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{-q^2 + 2\sigma f}, \quad \sigma = \pm 1, \\
G^{(3)} &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{4(q^4 + 6q^2 - 4f^2)} \times \\
&\times \begin{pmatrix} -(q^2 + 2) & -(q^2 + 2) & 2(f^2 + 2) & 2f\chi \\ -(q^2 + 2) & -(q^2 + 2) & 2(f^2 + 2) & 2f\chi \\ 2(f^2 + 2) & 2(f^2 + 2) & -(f^2 + 2)(q^2 + 4) & -f\chi(4 + q^2) \\ 2f\chi & 2f\chi & -f\chi(4 + q^2) & -(\chi^2 + 2)(q^2 + 4) + 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Такой блочно-диагональный вид она имеет в специальном базисе, векторы которого определяются как всевозможные попарные произведения:

$$n^+ \beta, l\eta^+, u\eta^+; n^- \beta, l\eta^-, u\eta^-; n^- \eta^-; n^+ \eta^+; n^+ \eta^-, n^- \eta^+, l\beta, u\beta$$

векторов из базиса в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned}
u_\mu &= \frac{1}{6a^3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon^{abc} g A_\alpha^a g A_\beta^b g A_\gamma^c, \\
l_\mu &= (q_\mu - \chi u_\mu) / f, \quad \text{где } q_\mu = p_\mu / a, \\
\chi &= q_\mu u_\mu, \quad f = \frac{1}{a^2} (p_\mu g A_\mu^a p_\nu g A_\nu^a)^{1/2}, \\
n_\mu(1) \text{ и } n_\mu(2), \text{ причем } n_\mu(1)n_\mu(1) &= n_\mu(2)n_\mu(2) = 1, \\
n_\mu(1)n_\mu(2) &= n_\mu(1, 2)u_\mu = n_\mu(1, 2)l_\mu = 0.
\end{aligned}$$

и векторов из базиса в изотопическом пространстве:

$$\beta_a = l_\mu g A_\mu^a / a, \quad \eta_a^\pm = n_\mu^\pm g A_\mu^a / a.$$

Во-вторых, не все компоненты квантового поля Q являются физическими. Физические компоненты имеют вид $\Pi_{nk}^\dagger Q^k$, где:

$$\Pi_{nk} = g_{nk} - \hat{J}_n \bar{M}^{-1} \bar{\nabla}_k, \quad \bar{M} = \hat{J}_k \bar{\nabla}^k, \quad \hat{J}_k^{ab} = g \varepsilon_{acb} J_k^c,$$

J — ток, соответствующий полю “3 λ ”, а черта означает зависимость от внешнего поля A . С практической точки зрения мы должны просто отбросить компоненты Q , пропорциональные вектору u_μ специального базиса.

С учетом сказанного однопетлевая поправка к конденсату (под которым понимается среднее от произведения полей) записывается так:

$$\langle (\Pi_{nk}^\dagger Q^k)_a(\mathbf{x}, t) (\Pi_{nm}^\dagger Q^m)_a(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Из-за трансляционной инвариантности теории среднее на самом деле не зависит от пространственно-временной точки. Мы будем вычислять конденсат при конечной температуре, то есть понимать под средним среднее по гиббсовскому распределению. Как известно, это можно сделать при помощи замены:

$$\int \frac{d\kappa}{2\pi} \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad \kappa \rightarrow 2\pi T n.$$

Окончательно конденсат представляется в виде суммы трех слагаемых, по числу блоков в функции Грина (обозначение a позаимствовано из работы [7]):

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{p^2 - 2pa + 2a^2}{(p-2a)^2((2\pi T n)^2 + p^2 + 2pa^2/(p-2a))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2 + 2pa + 2a^2}{(p+2a)^2((2\pi T n)^2 + p^2 + 2pa^2/(p+2a))} \right), \\ Q^{(2)} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi T n)^2 + p^2 - 2pa} + \frac{1}{(2\pi T n)^2 + p^2 + 2pa} \right), \\ Q^{(3)} &= \frac{1}{4a^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2a^2((2\pi T n)^2 + p^2 + 2a^2) + (p^2 + 2a^2)((2\pi T n)^2 + p^2 + 4a^2)}{((2\pi T n)^2 + p^2 + 3a^2)^2 - 4p^2 a^2 - 9a^4}. \end{aligned}$$

ДООПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Выписанное в конце предыдущего раздела выражение для конденсата является математически бессмысленным, так как на пути интегрирования лежат особенности, правила обхода которых не определены. Неопределенность евклидовой (!) функции Грина возникает из-за наличия в спектре “тахсионных мод”, то есть области значений пространственного импульса, при которых частота чисто мнима. Нужно четко понимать, что общая теория не дает никаких рецептов работы с тахионными модами, так что приведенное ниже правило обхода особенностей нужно считать дополнительным предположением.

Наличие тахионных мод говорит о том, что выбранное фоновое поле не является классическим устойчивым решением, а соответствующий “вакуум” нестабилен. Точное вакуумное поле, разумеется, приводит к свободной от тахионных мод теории возмущений. К сожалению, оно нам неизвестно, и приходится довольствоваться приближением, которое можно считать квазистабильным.

Итак, мы доопределяем функцию Грина, добавляя к квадрату частоты бесконечно малую отрицательную мнимую часть:

$$\kappa^2 \rightarrow \kappa^2 - i\delta.$$

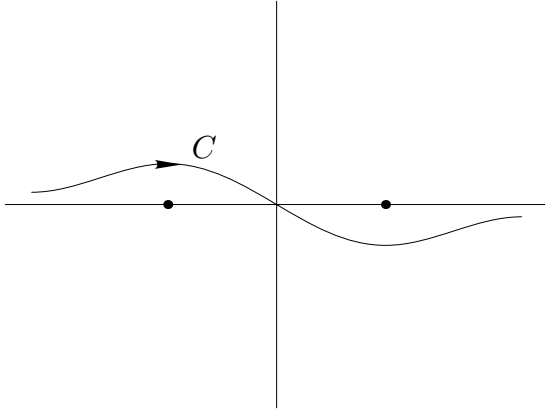


Рис. 1. Обход полюсов на вещественной оси.

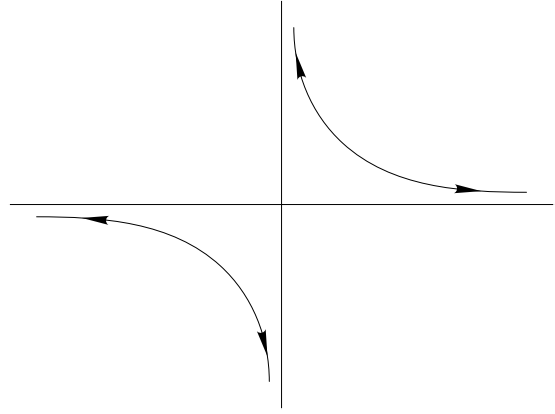


Рис. 2. Перемещение полюсов при изменении p .

С одной стороны это означает, что полюс на отрицательной части вещественной оси обходится сверху, а на положительной — снизу. С другой стороны, это определяет путь полюса при изменении пространственного импульса: полюс с положительной части мнимой оси “переползает” на положительную же часть вещественной и наоборот.

Приведенное правило можно переформулировать в терминах параметров интеграла. Например, фейнмановское доопределение функции Грина в пространстве Минковского можно трактовать как наличие мнимой части у массы: $m \rightarrow m - i\delta$. Аналогично, глядя на выражение для конденсата, можно сказать, что наше доопределение эквивалентно наличию мнимой части у температуры: $T \rightarrow T - i\delta$.

Данное нами доопределение функции Грина не является единственно возможным. Можно дать другое доопределение, которое, как известно, будет отличаться от приведенного линейной комбинацией слагаемых $\delta(\varkappa - \varkappa(f))$, где $\varkappa(f)$ — полюса функции Грина. Например, выбор $\varkappa^2 \rightarrow \varkappa^2 + i\delta$ приводит к другому знаку мнимой части конденсата.

Вооружившись данными определениями, рассмотрим более пристально вклад $Q^{(2)}$ (как наиболее простой):

$$Q^{(2)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi Tn)^2 + p^2 - 2pa - i\delta} + \frac{1}{(2\pi Tn)^2 + p^2 + 2pa - i\delta} \right).$$

Отметим, что второе слагаемое получается из первого заменой $p \rightarrow -p$, поэтому далее сосредоточимся на первом слагаемом. Введем обозначение:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 - 2pa - i\delta},$$

причем возьмем ту ветвь корня, для которой $\varepsilon \sim p$ при $p \rightarrow \infty$.

Для отделения бестемпературной части и температурной добавки воспользуемся пересуммированием Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

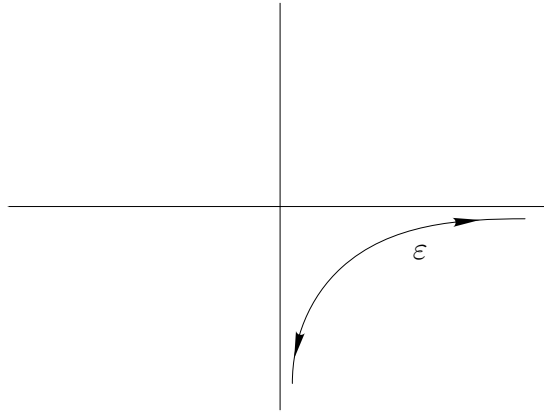


Рис. 3. Выбор ветви ε .

Предполагая $k \geq 0$, вычисляем интеграл по теореме о вычетах замыканием контура полуокружностью снизу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i k x} dx}{(2\pi T x)^2 + \varepsilon^2} = \frac{e^{-(\varepsilon/T)k}}{2T\varepsilon}.$$

Оказывается, что отрицательные k дают тот же вклад, что и положительные, поэтому первое слагаемое в $Q^{(2)}$ равно

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(\varepsilon/T)k}}{\varepsilon} \right) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} \right).$$

Последнее выражение импонирует своей узнаваемостью. Первый член соответствует бестемпературному вкладу, второй — температурной добавке, бозе-подобную конструкцию которой трудно скрыть.

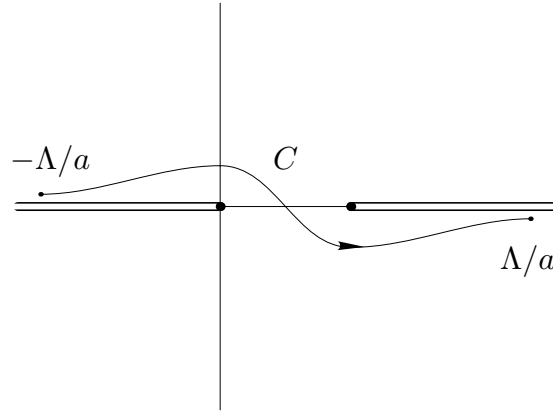
БЕСТЕМПЕРАТУРНЫЙ СЛУЧАЙ

Бестемпературная часть конденсата $Q^{(2)}$ вычисляется по формуле:

$$Q^{(2)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{p^2 - 2pa}} + \frac{1}{2\sqrt{p^2 + 2pa}} \right).$$

К ней нужно сделать три добавления. Во-первых, как уже отмечалось, оба слагаемых можно объединить, если распространить интегрирование по p также и на отрицательную часть вещественной оси. Во-вторых, на пути интегрирования лежат точки ветвления, способ обхода которых следует из приведенных выше правил. В-третьих, интеграл расходится, и нужно ввести какую-либо регуляризацию. Мы выберем регуляризацию обрезанием, то есть будем считать, что интегрирование ведется по отрезку $[-\Lambda, \Lambda]$. Суммируя вышесказанное, запишем интеграл в обезразмеренном виде:

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \int_C x^{3/2} (x - 2)^{-1/2} dx.$$

Рис. 4. Контур интегрирования для $Q^{(2)}$.

Этот интеграл можно вычислить в лоб по формуле Ньютона—Лейбница, но мы изложим другой подход, который применим и в случае более сложного подынтегрального выражения, когда найти первообразную затруднительно.

Сначала разобьем интеграл на части, скажем, по отрезкам $[0, 3]$, $[3, \Lambda/a]$ и $[-\Lambda/a, 0]$. Первый интеграл конечен и только он содержит мнимую часть. Вообще, тахионные моды не могут залезать слишком далеко в область больших импульсов, поскольку асимптотически при $p \rightarrow \infty$ мы должны получать ультрарелятивистскую связь $\varepsilon \sim p$. Второй интеграл расходится при $\Lambda \rightarrow \infty$. Вычтем из подынтегрального выражения несколько первых членов разложения в ряд Лорана при $x \rightarrow \infty$, так что он станет сходящимся:

$$\int_3^{\Lambda/a} x^{3/2}(x-2)^{-1/2} dx = \int_3^{\Lambda/a} \left[x^{3/2}(x-2)^{-1/2} - x - 1 - \frac{3}{2x} \right] dx + \int_3^{\Lambda/a} \left(x + 1 + \frac{3}{2x} \right) dx.$$

Вся расходимость теперь вычисляется явно, и мы можем записать:

$$\int_3^{\Lambda/a} x^{3/2}(x-2)^{-1/2} dx = \frac{\Lambda^2}{2a^2} + \frac{\Lambda}{a} + \frac{3}{2} \ln \frac{\Lambda}{a} + O(1).$$

Вспомяная, что интеграл по отрезку $[0, 3]$ конечен, мы можем заменить в этой формуле нижний предел интегрирования на 0. Вычисляя аналогично интеграл по отрезку $[-\Lambda/a, 0]$, найдем:

$$Q^{(2)} = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} + \frac{3a^2}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{a} + Ba^2.$$

Напомним, что в B входит интеграл по отрезку $[0, 3]$, поэтому B имеет мнимую часть. Вещественная часть B нас не интересует, так как нам еще предстоит перенормировка, но мнимую нужно вычислить. К счастью, она вычисляется без проблем:

$$\Im Q^{(2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^2 x^{3/2}(2-x)^{-1/2} dx = \frac{3a^2}{8\pi}.$$

(Интеграл типа В-функции). Итак:

$$Q^{(2)} = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} + \frac{3a^2}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{a} + \frac{3ia^2}{8\pi} + B'a^2,$$

где B' уже вещественно.

Расходящаяся часть $Q^{(1)}$:

$$Q^{(1)} = \frac{a^2}{2\pi^2} \int_C \left(\frac{x}{x-2} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$$

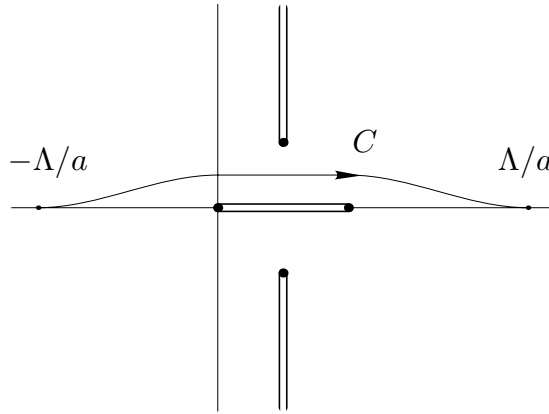


Рис. 5. Контур интегрирования для $Q^{(1)}$.

анализируется аналогично. Вот результат:

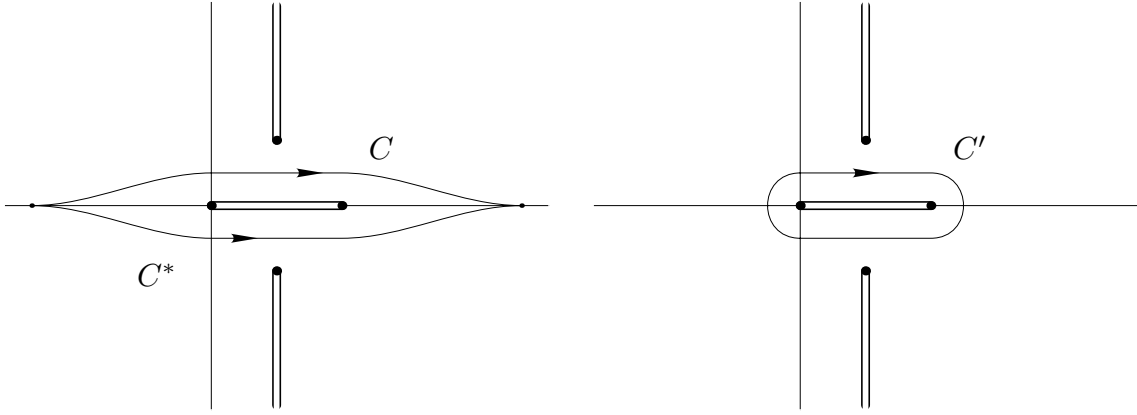
$$Q^{(1)} = \frac{\Lambda^2}{2\pi^2} + \frac{5a^2}{\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{a} + Ba^2.$$

Ситуация с мнимой частью здесь сложнее, поскольку интеграл

$$\int_0^2 \left(\frac{x}{2-x} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$$

расходится при $x \rightarrow 2$. Поэтому поступим так. Сопряжем комплексно исходный интеграл. Легко понять, что он будет равен интегралу с тем же подынтегральным выражением, но по комплексно сопряженному контуру. Теперь

$$\begin{aligned} \Im Q^{(1)} &= \frac{a^2}{2\pi^2} \frac{1}{2i} \left(\int_C - \int_{C^*} \right) \left(\frac{x}{x-2} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \\ &= \frac{a^2}{4i\pi^2} \int_{C'} \left(\frac{x}{x-2} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx. \end{aligned}$$

Рис. 6,7. К вычислению мнимой части $Q^{(1)}$.

Таким образом, мнимая часть выражается через полный эллиптический интеграл (детали см. в Дополнении):

$$\Im Q^{(1)} = -\frac{a^2}{\pi^2} (7E(i) - 4K(i)) = -\frac{a^2}{(2\pi)^{5/2}} [3\Gamma^2(1/4) + 28\Gamma^2(3/4)].$$

У $Q^{(3)}$ нет мнимой части, но возникают новые трудности. При $\Lambda \rightarrow \infty$ интеграл

$$Q^{(3)} = \frac{a^2}{32\pi^2} \int_0^{\Lambda/a} \left(\frac{x^2 + 4 + x^2/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 - \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} + \frac{x^2 + 4 - x^2/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 + \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} \right) x^2 dx$$

расходится как Λ^4 . Это означает, что в расходящейся части присутствует член Λ^4/a^2 , который не может быть поглощен перенормировкой поля. Анализ функции Грина показывает, что подобный тип расходимости связан с “дважды продольной” модой, у которой вектор поляризации направлен вдоль импульса и в координатном, и в изотопическом пространствах. Подобная ситуация хорошо известна [12]. Продольная часть функции Грина массивного векторного поля

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right)$$

не убывает при $k \rightarrow \infty$ и при вычислении конденсата с регуляризацией обрезанием мы получим расходимость Λ^4/m^2 . В нашем же случае роль массы играет внешнее поле.

Неперенормируемость теории по индексу видна уже из выражения для функции Грина и отмечалась в работе [6]. Тем не менее, приведем результат для регуляризованной части $Q^{(3)}$:

$$Q^{(3)} = \frac{\Lambda^4}{64\pi^2 a^2} + \frac{9\Lambda^2}{64\pi^2} - \frac{9a^2}{128\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{a} + Ba^2.$$

Если же из “физических соображений” отбросить вклад дважды продольной моды, то исходный интеграл примет вид:

$$\tilde{Q}^{(3)} = \frac{a^2}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda/a} \left(\frac{1 + 1/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 + \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} + \frac{1 - 1/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 - \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} \right) x^2 dx,$$

а его вычисление даст:

$$\tilde{Q}^{(3)} = \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} - \frac{a^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{a} + Ba^2.$$

Мы можем тогда употребить стандартную процедуру перенормировки. В древесном приближении (также с отброшенной дважды продольной модой) $\tilde{Q} = 2a^2/g^2$. Нормируя, например, условием

$$\left. \frac{d^2 \Re \tilde{Q}}{da^2} \right|_{a=a_0} = \frac{4}{g^2},$$

получим

$$\tilde{Q} = \frac{2a^2}{g^2} + \frac{91a^2}{16\pi^2} \ln \frac{a_0}{a} + \frac{273a^2}{32\pi^2} + ia^2 \left(\frac{3}{8\pi} - \frac{3\Gamma^2(1/4) + 28\Gamma^2(3/4)}{(2\pi)^{5/2}} \right).$$

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ДОБАВКА

Как и в бестемпературном случае, мы начнем с подробного вычисления $Q^{(2)}$.

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi^2} \int_C \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} \frac{1}{\exp\left(\frac{a}{T}\sqrt{x^2 - 2x}\right) - 1}.$$

К написанному интегралу необходимо сделать пояснение, так как, в отличие от бестемпературного случая, подынтегральное выражение имеет не только точки ветвления (их-то мы уже обсудили), но и полюсы. Анализ показывает, что предложенное ранее доопределение функции Грина полностью фиксирует взаимное расположение этих полюсов и контура интегрирования.

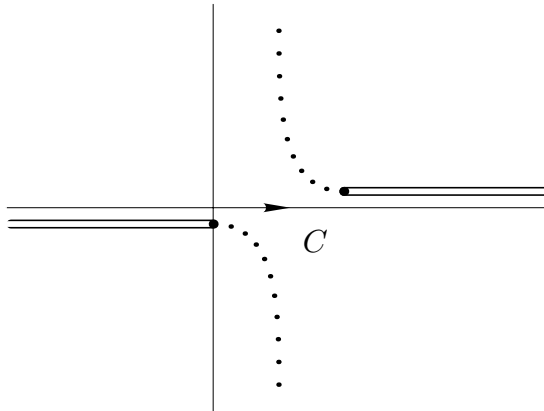


Рис. 8. Ситуация в $Q^{(2)}$ при $T \neq 0$.

Представим бозе-распределение в виде обратного Меллин-образа:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_D x^{-\nu} \Gamma(\nu) \zeta(\nu) d\nu.$$

Контур D — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая правее всех особенностей подынтегрального выражения. Формула работает для $\Re x > 0$. (Внимательный читатель заметит, что приведенная формула — просто интегральное представление ζ -функции

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^x - 1} = \Gamma(\nu)\zeta(\nu),$$

вывернутое наизнанку). Тогда получим

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_D d\nu \Gamma(\nu)\zeta(\nu) \left(\frac{a}{T}\right)^{-\nu} I(\nu),$$

где

$$I(\nu) = \int_C x^{2-(\nu+1)/2} (x-2)^{-(\nu+1)/2} dx.$$

Для $2 < \Re \nu < 5$ интеграл сходится в нуле и на бесконечности. Мы можем тогда продеформировать контур C так, что он будет идти по обоим берегам левого разреза, причем интеграл по окружности вокруг $x = 0$ дает нуль.

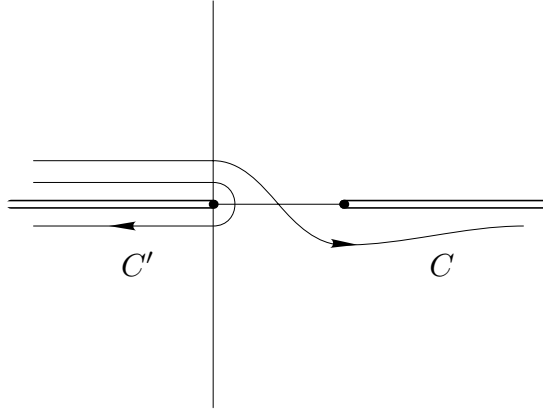


Рис. 9. Деформация контура для $Q^{(2)}$.

Заменой переменной $x/(x-2) = y$ интеграл сводится к В-функции:

$$I(\nu) = 2^{2-\nu} (1 + e^{i\pi\nu}) \mathbb{B} \left(\nu - 2, \frac{5-\nu}{2} \right).$$

Пользуясь формулой удвоения для Γ -функции и уравнением Римана для ζ -функции, получим:

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_D d\nu (2/\pi)\zeta(1-\nu) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-\nu}{2}\right) \Gamma(\nu-2) \left(\frac{a}{\pi T}\right)^{-\nu} (1 + e^{i\pi\nu}).$$

Как отмечалось при вычислении $I(\nu)$, контур D лежит между $\Re \nu = 2$ и $\Re \nu = 5$. Подынтегральное выражение имеет полюса первого порядка в точках 2, 1, -2, -4 ... и полюс второго порядка в точке 0. Интеграл вычисляется по теореме

о вычетах замыканием контура левой полуокружностью. Приведем результат с точностью до $1/T^2$:

$$Q^{(2)} = \frac{T^2}{6} + \frac{i}{\pi} \left(Ta - \frac{3}{8}a^2 \right) + \frac{3a^2}{4\pi^2} \ln \frac{a}{4\pi T} + \frac{a^2(6\gamma - 1)}{8\pi^2} + \frac{5\zeta(3)a^4}{64\pi^4 T^2} + \dots$$

[Мы должны сделать важное замечание. Как видно, вещественная часть конденсата представляется рядом, а мнимая содержит всего два слагаемых. Можно было бы подумать, что результат для мнимой части является точным и справедлив при всех температурах. Однако такое предположение сразу приходит в противоречие с определением конденсата, согласно которому он должен обращаться в нуль при нулевой температуре (напомним, что мы сейчас говорим о температурной добавке). Решение парадокса очень поучительно. Выпишем явно ряд, который дает вещественную часть конденсата:

$$\frac{a^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)\Gamma(k+1/2)(k+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+2)} \left(\frac{a}{2\pi T} \right)^{2k}.$$

(Первый член этого ряда соответствует последнему члену предыдущей формулы). Простые оценки показывают, что ряд сходится в круге $a/2\pi T < 1$, причем на границе круга имеет особенность типа $(1 - (a/2\pi T)^2)^{-1/2}$, то есть точку ветвления. При аналитическом продолжении функции, заданной рядом, за точку ветвления, у нее появляется мнимая часть. Таким образом, приведенная формула для мнимой части $Q^{(2)}$ справедлива только при $a/2\pi T < 1$.

Строго говоря, утверждение об обращении конденсата в нуль при нулевой температуре справедливо лишь в допредельном смысле. Выше мы доопределили функцию Грина, введя мнимую добавку $i\delta$. Легко видеть, что при конечной δ конденсат существует для любых значений a/T и обращается в нуль при $T = 0$, однако в пределе $\delta \rightarrow 0$ он расходится при $a/T = 2\pi n$, $n = 1, 2, 3 \dots$ и не имеет предела при $T \rightarrow 0$.]

Аналогичная процедура применяется в $Q^{(1)}$:

$$Q^{(1)} = \frac{a^2}{\pi^2} \int_C \frac{\left(\frac{x}{x-2} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx}{\exp\left(\frac{a}{T} \sqrt{\frac{x}{x-2}} (x^2 - 2x + 2) \right) - 1}.$$

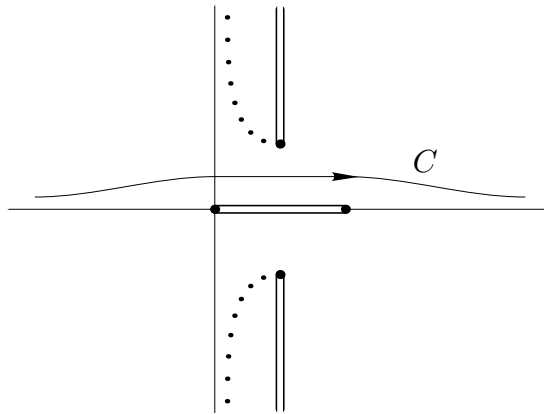


Рис. 10. Ситуация в $Q^{(1)}$ при $T \neq 0$.

Представление в виде обратного меллин-образа:

$$Q^{(1)} = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_D d\nu \Gamma(\nu) \zeta(\nu) \left(\frac{a}{T}\right)^{-\nu} I(\nu),$$

где

$$I(\nu) = \int_C \left(\frac{x}{x-2}\right)^{(3-\nu)/2} (x^2 - 2x + 2)^{(1-\nu)/2} dx.$$

При $2 < \Re \nu < 3$ интеграл сходится в $x = 1 + i$ и на бесконечности. Можно продеформировать контур так, чтобы он охватывал верхний разрез.

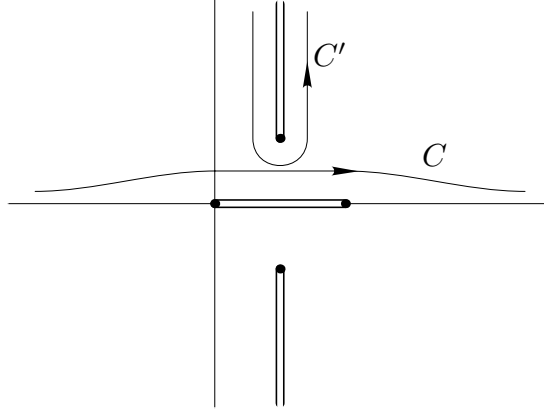


Рис. 11. Деформация контура для $Q^{(1)}$.

Тогда заменой $x = 1 - i + iy$ интеграл приводится к виду:

$$\begin{aligned} I(\nu) &= (1 + e^{i\pi\nu}) i^{2-\nu} \int_2^\infty \left(\frac{y-1-i}{y-1+i}\right)^{(3-\nu)/2} y^{(1-\nu)/2} (y-2)^{(1-\nu)/2} dy = \\ &= (1 + e^{i\pi\nu}) (2i)^{2-\nu} B\left(\nu-2, \frac{3-\nu}{2}\right) F_1\left(\nu-2, -\frac{3-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}, \frac{5-\nu}{2}; \frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}\right). \end{aligned}$$

(Мы воспользовались формулой [9])

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^{\alpha-1} (x-a)^{\beta-1} (x-u)^{-\rho} (x-v)^{-\lambda} dx = \\ = a^{\alpha+\beta-\lambda-\rho-1} B(1+\lambda+\rho-\alpha-\beta, \beta) F_1(1+\lambda+\rho-\alpha-\beta, \rho, \lambda, 1+\lambda-\rho-\alpha; u/a, v/a), \end{aligned}$$

где F_1 — функция Аппеля). К сожалению, вычислить необходимые частные значения функции Аппеля не удастся, и мы вынуждены пользоваться разложением

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\beta'+k)}{\Gamma(\gamma+n+k)} \frac{x^n y^k}{n! k!}.$$

Из него видно, что отдельные слагаемые ряда могут иметь полюса только в точках $\gamma = 0, -1, -2, \dots$. В нашем случае это нечетные $\nu \geq 5$, все они лежат справа

от контура интегрирования, так что при замыкании контура полуокружностью слева выпадают из рассмотрения. Обозначая функцию Апелля просто через $\Phi(\nu)$, запишем обратное меллиновское преобразование:

$$Q^{(1)} = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_D d\nu (2/\pi) \zeta(1-\nu) \Gamma^2\left(\frac{3-\nu}{2}\right) \Gamma(\nu-2) \left(\frac{ia}{\pi T}\right)^{-\nu} \Phi(\nu) (1 + e^{i\pi\nu}),$$

Для вычисления интеграла нужно найти вычеты в полюсах первого порядка $\nu = 2, -2, -4, \dots$ и полюсе второго порядка $\nu = 0$. С точностью до $1/T^2$:

$$Q^{(1)} = \frac{T^2}{3} + \frac{a^2}{2\pi^2} \left(-\Phi'(0) + \Phi(0) \left[\gamma + 1/2 + \ln \frac{a}{4\pi T} \right] \right) - \frac{3\zeta(3)a^4}{32\pi^4 T^2} \Phi(-2) + \dots$$

Мы сразу подставили $\Phi(2) = 1$. Приведем значения $\Phi(0) = 26/35 + 36i/35$ и $\Phi(-2) = -247/63 + 16i/63$ (значение $\Phi'(0)$ выражается через двукратный ряд, в нем также есть и вещественная, и мнимая части).

Нам осталось рассмотреть вклад $Q^{(3)}$:

$$Q^{(3)} = \frac{a^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{x^2 + 4 - x^2/\sqrt{4x^2+9}}{(x^2+3+\sqrt{4x^2+9})^{1/2} \exp\left(\frac{a}{T}(x^2+3+\sqrt{4x^2+9})^{1/2}\right) - 1} + \frac{x^2 + 4 + x^2/\sqrt{4x^2+9}}{(x^2+3-\sqrt{4x^2+9})^{1/2} \exp\left(\frac{a}{T}(x^2+3-\sqrt{4x^2+9})^{1/2}\right) - 1} \right] x^2 dx.$$

Представление в виде обратного меллин-образа:

$$Q^{(3)} = \frac{a^2}{16\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_D d\nu \Gamma(\nu) \zeta(\nu) \left(\frac{a}{T}\right)^{-\nu} I(\nu),$$

где

$$I(\nu) = \int_0^\infty \left[(x^2 + 4 - x^2/\sqrt{4x^2+9})(x^2 + 3 + \sqrt{4x^2+9})^{-(1+\nu)/2} + (x^2 + 4 + x^2/\sqrt{4x^2+9})(x^2 + 3 - \sqrt{4x^2+9})^{-(1+\nu)/2} \right] x^2 dx.$$

Нас встречает новая трудность. Интеграл от первого слагаемого в $I(\nu)$ сходится при $\Re \nu > 4$, но интеграл от второго расходится при любом ν . Эта расходимость связана с несовершенством избранного нами метода вычисления, который хорошо работает для массивных мод, когда энергия имеет разные асимптотики при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ (как, например, $\varepsilon \rightarrow m$ при $p \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow p$ при $p \rightarrow \infty$ для $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$), но дает осечку на безмассовых.

На самом деле расходимость фиктивная, и мы можем вычислить $Q^{(3)}$ нашим методом, если выберем подходящее разбиение исходного интеграла. Чтобы идея стала прозрачнее, сделаем сначала замену переменной $4x^2 + 9 = y^2$:

$$Q^{(3)} = \frac{a^2}{16\pi^2} \int_3^\infty \frac{(y^3 - y^2 + 7y + 9)\sqrt{y-3} dy}{16\sqrt{y+1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2+4y+3}\right) - 1 \right]} + \frac{a^2}{16\pi^2} \int_3^\infty \frac{(y^3 + y^2 + 7y - 9)\sqrt{y+3} dy}{16\sqrt{y-1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2-4y+3}\right) - 1 \right]}.$$

Разложим теперь полиномы в числителях в первом интеграле — по степеням $(y + 3)$, а во втором — по степеням $(y - 3)$, и разобьем $Q^{(3)}$ на восемь частей:

$$\begin{aligned} Q^{(3)} &= \frac{a^2}{16\pi^2} \int_3^\infty \frac{[(y+3)^3 - 10(y+3)^2 + 40(y+3) - 48] \sqrt{y-3} dy}{16\sqrt{y+1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + 4y + 3}\right) - 1 \right]} + \\ &+ \frac{a^2}{16\pi^2} \int_3^\infty \frac{[(y-3)^3 + 10(y-3)^2 + 40(y-3) + 48] \sqrt{y+3} dy}{16\sqrt{y-1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - 4y + 3}\right) - 1 \right]} = \\ &= \frac{a^2}{16\pi^2} (A_3 + B_3 - 10(A_2 - B_2) + 40(A_1 + B_1) - 48(A_0 - B_0)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \int_3^\infty \frac{(y+3)^n \sqrt{y-3} dy}{16\sqrt{y+1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + 4y + 3}\right) - 1 \right]}, \\ B_n &= \int_3^\infty \frac{(y-3)^n \sqrt{y+3} dy}{16\sqrt{y-1} \left[\exp\left(\frac{a}{T} \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - 4y + 3}\right) - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Если теперь мы представим A_n и B_n в виде обратных меллин-образов:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} d\nu \Gamma(\nu) \zeta(\nu) \left(\frac{a}{T}\right)^{-\nu} I_n(\nu), \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_n} d\nu \Gamma(\nu) \zeta(\nu) \left(\frac{a}{T}\right)^{-\nu} J_n(\nu),$$

то обнаружим, что интегралы

$$\begin{aligned} I_n(\nu) &= 2^{\nu-4} \int_3^\infty (y+3)^{n-\nu/2} (y+1)^{-(\nu+1)/2} (y-3)^{1/2} dy, \\ J_n(\nu) &= 2^{\nu-4} \int_3^\infty (y-3)^{n-\nu/2} (y-1)^{-(\nu+1)/2} (y+3)^{1/2} dy \end{aligned}$$

сходятся при $y \rightarrow 3$ и $y \rightarrow \infty$ при $\Re \nu > n + 1$ и $n + 1 < \Re \nu < 2(n + 1)$ соответственно. Их значения вычисляются по формуле [9]:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (x+u)^{-\rho} (x+v)^{-\lambda} dx = u^{\alpha-\rho} v^{-\lambda} \mathbf{B}(\alpha, \rho + \lambda - \alpha) {}_2F_1(\alpha, \lambda; \rho + \lambda; 1 - u/v),$$

что приводит нас к выражениям:

$$\begin{aligned} I_n(\nu) &= 2^{-2} 6^{n-\nu/2} \mathbf{B}(3/2, \nu - n - 1) {}_2F_1(3/2, \nu/2 - n; \nu - n + 1/2; 1/3), \\ J_n(\nu) &= 2^{n-3} \sqrt{3} \mathbf{B}(n - \nu/2 + 1, \nu - n - 1) {}_2F_1(n - \nu/2 + 1, -1/2; \nu/2; 2/3). \end{aligned}$$

С помощью известных свойств гипергеометрической функции [8] получаем:

$$I_n - (-1)^n J_n = 2^{-2} 6^{n-\nu/2} \mathbf{B}(3/2, \nu/2 - 1) {}_2F_1(3/2, \nu/2 - n; 2 - \nu/2; 2/3).$$

Вычисление $Q^{(3)}$ производится, как и ранее, по теореме о вычетах, нужно только помнить, что контуры интегрирования C_n и D_n различны при разных n и лежат в областях сходимости соответствующих интегралов I_n и J_n . Окончательно:

$$Q^{(3)} = \frac{\pi^2 T^4}{120a^2} + \frac{17T^2}{96} + \frac{3a^2}{16\pi^2} \left(\Phi'(0) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} - \gamma - \ln \frac{a}{2\pi T} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) \right) + \\ + \frac{\zeta(3)a^4}{512\pi^4 T^2} \Phi(-2) + \dots$$

(здесь посредством $\Phi(\nu)$ обозначено выражение

$$\Phi(\nu) = 9 {}_2F_1(3/2, \nu/2 - 3; 2 - \nu/2; 2/3) - 15 {}_2F_1(3/2, \nu/2 - 2; 2 - \nu/2; 2/3) + \\ + 10 {}_2F_1(3/2, \nu/2 - 1; 2 - \nu/2; 2/3) - 2 {}_2F_1(3/2, \nu/2; 2 - \nu/2; 2/3).$$

Его частное значение $\Phi(-2) = 41/72$, а производная $\Phi'(0)$ выражается через ряд.)

Мы видим, что плохое ультрафиолетовое поведение части $G^{(3)}$ функции Грина дает себя знать и при высоких температурах — разложение начинается с членов $\sim T^4$. Если же мы снова (как в бестемпературном случае) рассмотрим конденсат без дважды продольной моды:

$$\tilde{Q}^{(3)} = \frac{a^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{1 + 1/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 + \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} \frac{1}{\exp\left(\frac{a}{T}(x^2 + 3 + \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}\right) - 1} + \right. \\ \left. + \frac{1 - 1/\sqrt{4x^2 + 9}}{(x^2 + 3 - \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}} \frac{1}{\exp\left(\frac{a}{T}(x^2 + 3 - \sqrt{4x^2 + 9})^{1/2}\right) - 1} \right] x^2 dx,$$

то, произведя вычисления, получим:

$$\tilde{Q}^{(3)} = \frac{T^2}{24} - \frac{a^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{a}{2\pi T} + \gamma + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right) + \frac{9\zeta(3)a^4}{512\pi^4 T^2} + \dots$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модели вакуума КХД с неабелевыми постоянными потенциалами изучались ранее в работах [4,5,6,10]. Особо следует отметить работы, посвященные исследованию эффективного потенциала глюодинамики в присутствии фонового постоянного хромагнитного потенциала A_0 на уровне двухпетлевых поправок [13], которые были улучшены в работе [14] за счет учета высших петлевых поправок в инфракрасном пределе. В этих работах отмечено формирование A_0 -конденсата. В [15,16] обсуждалась калибровочная независимость A_0 -конденсата. Все сказанное указывает на необходимость проведения представленных выше расчетов для специального модельного вакуума КХД. Заметим, что фотонный поляризационный оператор в неабелевом поле такого типа обсуждался в работе [17], где, в частности, обсуждался вклад скалярных кварков в вакуумный конденсат при нулевой температуре. Проведение расчетов вкладов в конденсат от спиновых кварков при наличии различных типов калибровочных полей и ненулевых температурах было осуществлено

в работе [18]. Настоящая работа позволяет полностью исчерпать данную задачу как в кварковом, так и в глюонном секторах теории. Важным результатом проведенных вычислений является наличие логарифмических зависимостей от поля и температуры для кварковых и глюонных конденсатов. В результате было бы весьма интересно сравнить с соответствующими обобщениями на температурный случай работ [19–21,24]. Наряду с этим данное рассмотрение может представлять интерес при изучении конкретных моделей существования кварк-глюонной плазмы. Однако следует учесть, что сама концепция внешнего поля в применении ее к глюонному конденсату, возможно, не столь безупречна, как в КЭД, так как любой акт взаимодействия оказывается существенным для вакуумного конденсата и его характеристик. В настоящее время ведутся активные исследования [22,23], которые, по-видимому, позволят решить этот сложный вопрос.

Дополнение. Вычисление $Q^{(2)}$ с использованием ШВИНГЕРОВСКОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В основном тексте мы использовали технику контурного интегрирования и регуляризацию обрезанием. Мы сделали это из соображений простоты и в особенности из-за удобства контроля над мнимой частью. В этом дополнении мы продемонстрируем вычисление $Q^{(2)}$ с использованием популярной техники, основанной на представлении Швингера для функции Грина.

Выпишем еще раз исходное выражение для $Q^{(2)}$:

$$Q^{(2)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi Tn)^2 + p^2 - 2pa - i\delta} + \frac{1}{(2\pi Tn)^2 + p^2 + 2pa - i\delta} \right).$$

Прежде всего нужно употребить какую-либо регуляризацию. Мы введем регулятор следующим образом (аналитическая регуляризация):

$$Q^{(2)} = \mu^{2\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{((2\pi Tn)^2 + p^2 - 2pa - i\delta)^{1+\lambda}} + \frac{1}{((2\pi Tn)^2 + p^2 + 2pa - i\delta)^{1+\lambda}} \right).$$

Такой прием работает, потому что функция Грина по-разному ведет себя при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$. Буква μ представляет собой параметр размерности массы, который необходим для сохранения размерности $Q^{(2)}$ (полная аналогия с методом размерной регуляризации).

Представление Швингера основывается на формуле Эйлера для Γ -функции:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

Совершая масштабное преобразование переменной t , мы получим представление

$$\frac{1}{A^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty ds s^{\nu-1} e^{-sA}.$$

В таком виде формула прекрасно работает для $A > 0$. Если же мы хотим распространить ее на отрицательные A , то нужно доопределить функцию A^ν , то есть указать, с какой стороны мы обходим точку $A = 0$ при изменении знака A . Будем обходить ее снизу, то есть трактовать отрицательные A как $|A|e^{-i\pi}$, что эквивалентно наличию у A бесконечно малой отрицательной мнимой части. Тогда правильное представление имеет вид:

$$\frac{1}{(A - i\delta)^\nu} = \frac{e^{i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty ds s^{\nu-1} e^{-is(A-i\delta)}.$$

Воспользуемся этим представлением, чтобы записать $Q^{(2)}$ в виде:

$$Q^{(2)} = \mu^{2\lambda} \frac{e^{i\pi(1+\lambda)/2}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty ds s^\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \times \\ \times T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-is((2\pi Tn)^2 + p^2 - 2pa - i\delta)} + e^{-is((2\pi Tn)^2 + p^2 + 2pa - i\delta)} \right).$$

Далее пользуемся пересуммированием Пуассона, чтобы отделить бестемпературную часть. Для этого придется вычислить интеграл типа Френеля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iBx^2} dx = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{B}}, \quad B > 0.$$

Проделав пересуммирование, получим:

$$Q^{(2)} = \mu^{2\lambda} \frac{e^{i\pi(1+\lambda)/2}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty ds s^\lambda \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{4\pi s}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik^2/(4sT^2)} \right) \times \\ \times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(e^{-is(p^2 - 2pa - i\delta)} + e^{-is(p^2 + 2pa - i\delta)} \right).$$

Обезразмерим интеграл заменами $p = ax$ и $sa^2 = \tau$. Тогда

$$Q^{(2)} = a^2 \left(\frac{\mu}{a}\right)^{2\lambda} \frac{e^{i\pi(1+\lambda)/2}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty d\tau \tau^\lambda \frac{e^{-i\pi/4 - \delta\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik^2 a^2 / (4\tau T^2)} \right) I(\tau).$$

где

$$I(\tau) = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \left(e^{-i\tau(x^2 - 2x)} + e^{-i\tau(x^2 + 2x)} \right)$$

— интеграл типа Френеля:

$$I(\tau) = \frac{e^{-i\pi/4} e^{i\tau}}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \left(1 - \frac{i}{2\tau} \right).$$

Далее рассмотрим отдельно бестемпературную часть и температурную добавку. В бестемпературном случае:

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{2\lambda} \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty d\tau \tau^{\lambda-1} e^{i\tau - \delta\tau} \left(1 - \frac{i}{2\tau} \right).$$

Выше отмечалось, что такой интеграл нужно понимать как швингеровское представление для $(e^{-i\pi})^{-\nu}$, поэтому:

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{2\lambda} \frac{e^{i\pi\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)} \left(\Gamma(\lambda) - \frac{1}{2}\Gamma(\lambda-1)\right) = \\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{2\lambda} e^{i\pi\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda(\lambda-1)}\right). \end{aligned}$$

Разложение вблизи $\lambda = 0$ имеет вид:

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{3}{2\lambda} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{a^2} + \frac{3}{2} \pi i + O(\lambda) \right),$$

так что с точностью до конечной перенормировки результат совпадает с найденным в основном тексте.

Для температурной добавки можно сразу положить $\lambda = 0$:

$$Q^{(2)} = \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} 2 \sum_{k=1}^\infty e^{i\tau - \delta\tau + ik^2 a^2 / (4\tau T^2)} \left(1 - \frac{i}{2\tau}\right).$$

В выписанном интеграле узнаем представление для цилиндрических функций

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{i(p+i\delta)x+iq/x} dx = i\pi e^{i\pi\nu/2} \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu/2} H_\nu^{(1)}(2\sqrt{pq}),$$

поэтому

$$Q^{(2)} = \frac{ia^2}{2\pi} \sum_{k=1}^\infty \left(H_0^{(1)}\left(\frac{ka}{T}\right) + \frac{T}{ka} H_1^{(1)}\left(\frac{ka}{T}\right) \right).$$

(Ряд сходится в обобщенном смысле, поскольку можно считать, что у T есть бесконечно малая отрицательная мнимая часть, см. основной текст).

Как и в основном тексте, высокотемпературная асимптотика может быть получена при помощи преобразования Меллина. Функция Ханкеля связана с функцией Макдональда соотношением:

$$H_\nu^{(1)} = \frac{2e^{-i\pi\nu/2}}{i\pi} K_\nu(e^{-i\pi/2}x).$$

Рассмотрим суммы

$$\Lambda_z(\omega) = \sum_{n=1}^\infty (\omega n)^z K_z(\omega n).$$

(Хорошо сходящиеся в обычном смысле). Подставим представление для $K_z(\omega n)$ в виде обратного меллин-образа

$$K_z(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+z) (x/2)^{-z-2\nu} d\nu,$$

где контур C — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая справа от всех особенностей подынтегрального выражения. Используя определение ζ -функции:

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-s},$$

записываем $\Lambda_z(\omega)$ в виде (контур C лежит теперь не только правее особенностей Γ -функций, но и правее особенности ζ -функции; это диктуется сходимостью ряда):

$$\Lambda_z(\omega) = \frac{2^z}{4\pi i} \int_C \Gamma(\nu)\Gamma(\nu+z)\zeta(2\nu)(\omega/2)^{-2\nu} d\nu.$$

Дальнейшее вычисление $\Lambda_z(\omega)$ по теореме о вычетах можно проделать без особых сложностей. Приведем явные выражения для $\Lambda_0(\omega)$ и $\Lambda_{-1}(\omega)$ с точностью до ω^2 :

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\omega) &= \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\omega}{4\pi} - \frac{\zeta(3)\omega^2}{16\pi^2} + \dots, \\ \Lambda_{-1}(\omega) &= \frac{\pi^2}{6\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} - \frac{1}{4} \ln \frac{\omega}{4\pi} + \frac{1}{8} - \frac{\gamma}{4} + \frac{\zeta(3)\omega^2}{64\pi^2} + \dots \end{aligned}$$

Используя их, находим для $Q^{(2)}$ выражение

$$Q^{(2)} = \frac{T^2}{6} + \frac{i}{\pi} \left(Ta - \frac{3}{8}a^2 \right) + \frac{3a^2}{4\pi^2} \ln \frac{a}{4\pi T} + \frac{a^2(6\gamma - 1)}{8\pi^2} + \frac{5\zeta(3)a^4}{64\pi^4 T^2} + \dots,$$

совпадающее с полученным в основном тексте.

ДОПОЛНЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНИМОЙ ЧАСТИ $Q^{(1)}$

Исходное выражение

$$\int_{C'} \left(\frac{x}{x-2} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$$

сдвигом $x \rightarrow x + 1$ преобразуем к виду

$$\int_{C'} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 + 1} dx$$

(Мы по-прежнему обозначаем контур как C' и надеемся, что читатели простят нам эту небрежность.) Чтобы избавиться от расходимости при $x \rightarrow 1$ в интеграле, выделим ее явно, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{3/2} \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int (x+1)^{3/2} \sqrt{x^2 + 1} [-2(x-1)^{-1/2}]' dx = \\ &= -2(x+1) \sqrt{\frac{(x+1)(x^2+1)}{x-1}} + \int \frac{5x^3 + 7x^2 + 5x + 3}{\sqrt{x^4 - 1}} dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы поочередно.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} &= \frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}, \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4-1}} &= \int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}, \\ \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}} &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^4-1}).\end{aligned}$$

Все проинтегрированные члены дают нуль. Оставшиеся интегралы — стандартные полные эллиптические

$$\begin{aligned}\int_{C'} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} &= -4iK(i), \\ \int_{C'} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} dx &= -4iE(i).\end{aligned}$$

Итак

$$\int_{C'} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/2} \sqrt{x^2+1} dx = -4i(7E(i) - 4K(i)).$$

Для вычисления частных значений эллиптических интегралов применим формулы [8]:

$$\begin{aligned}K(k) &= \frac{\pi}{2} {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; k^2), \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} {}_2F_1(-1/2, 1/2; 1; k^2),\end{aligned}$$

которые вместе с соотношениями [8]

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a, b; a-b+1; -1) &= 2^{-a} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(1+a/2-b)\Gamma(1/2+a/2)}, \\ {}_2F_1(a, b; a-b+2; -1) &= 2^{-a} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(a-b+2)}{(b-1)} \left[\frac{1}{\Gamma(a/2)\Gamma(3/2+a/2-b)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(1+a/2-b)\Gamma(1/2+a/2)} \right]\end{aligned}$$

дают

$$\begin{aligned}K(i) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{\Gamma^2(3/4)}, \\ E(i) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{\Gamma^2(3/4)} + \frac{4}{\Gamma^2(1/4)} \right].\end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned}\int_{C'} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/2} \sqrt{x^2+1} dx &= -4i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \left[\frac{3}{\Gamma^2(3/4)} + \frac{28}{\Gamma^2(1/4)} \right] = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} [3\Gamma^2(1/4) + 28\Gamma^2(3/4)].\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147** (1979), 385–391.
2. S. Kalara, J. Chakrabarti, Phys. Rev. **D21** (1981), 3268–3271.
3. G. K. Savvidy, Phys. Lett. **B71** (1977), 133–135; S. G. Matinyan, G. K. Savvidy, Nucl. Phys. **B144** (1978), 539–544.
4. L. S. Brown, W. I. Weisberger, Nucl. Phys. **B157** (1979), no. 2, 285.
5. А. Кабо, А. Е. Шабад, Труды ФИАН **192** (1988), М. Наука, 153–203.
6. А. С. Вшивцев, Д. В. Перегудов, ТМФ **104** (1995), no. 3, 435–450.
7. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, А. О. Старинец, Изв. Вузов. Физика **11** (1992), 65–71.
8. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М. Наука, 1979.
9. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды, т. 1*, М. Наука, 1981.
10. Ш. С. Агаев, А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, ЯФ **36** (1982), no. 10, 1023–1029.
11. В. Г. Багров, А. С. Вшивцев, С. В. Кетов, *Дополнительные главы математической физики (калибровочные поля)*, Изд-во Томского ун-та, 1990.
12. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика (Теоретическая физика, т. 4)*, М. Наука, 1989.
13. V. M. Belyaev, V. L. Eletsky, Preprint ITPP-68-89, Moscow, 1989.
14. V. M. Belyaev, Phys. Lett. **B241** (1990), 91–95.
15. V. V. Skalozub, Modern Phys. Lett. **A7** (1992), 2895–2903.
16. V. V. Skalozub, Preprint ICPT-IC/92/405, Miramare-Trieste, 1992.
17. A. V. Averin, A. V. Borisov, V. Ch. Zhukovskii, Z. Phys. C **48** (1990), 457–462.
18. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, А. В. Татаринцев, Изв. Вузов. Физика **1** (1994), 39–52.
19. M. S. Dubovikov, A. V. Smilga, Nucl. Phys. **B185** (1981), 109.
20. A. Patkes, N. Sakai, Nucl. Phys. **B168** (1980), 521.
21. J. Finjord, Nucl. Phys. **B194** (1982), 77.
22. Yu. A. Simonov, Preprint НЕР-РН-93-11-217, 1993; Preprint HD-THEP-93-16, 1993.
23. В. В. Владимирский, ЯФ **58** (1995), no. 1, 107–112.
24. V. L. Eletsky, P. J. Ellis, J. I. Kapusta, Preprint TPI-MIN-92/37-T, 1992.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

117454, ПРОСПЕКТ ВЕРНАДСКОГО, 78, МОСКВА, РОССИЯ