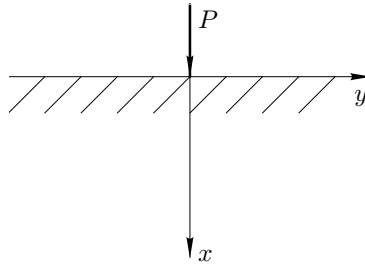


# ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА. МЕТОД КАНЬЯРА

Д. В. ПЕРЕГУДОВ

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На двумерные задачи можно смотреть двояко. Обычно считают, что двумерные задачи — это трехмерные задачи, в которых все величины не зависят от одной из декартовых координат. Иногда говорят, что это задачи с линейными источниками. Можно, однако, считать двумерные задачи самостоятельными. Мы принимаем вторую точку зрения, в связи с чем ниже всюду будет использоваться “двумерная” терминология.



К постановке задачи.

Рассмотрим однородную изотропную упругую полуплоскость со свободной границей. Будем считать, что ось  $x$  декартовой системы координат направлена внутрь полуплоскости, а ось  $y$  — вдоль границы. Распространение волн в полуплоскости описывается уравнениями теории упругости

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \partial_j \partial_l u_k,$$

где  $\rho$  — плотность,  $u_i(t, x, y)$  — вектор смещения,  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  — тензор Гука. Индексы  $i, j, k, l$  пробегает значения  $x$  и  $y$ . Внешние объемные силы отсутствуют. На свободной границе обращаются в нуль  $xx$ - и  $xy$ -компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \partial_l u_k.$$

В начальный момент времени  $t = 0$  к началу координат на свободной поверхности приложили сосредоточенную импульсную силу (с импульсом  $P$ ), направленную

вдоль оси  $x$ . Выпишем явно покомпонентно уравнения, начальные и граничные условия

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho \ddot{u}_x &= (\lambda + \mu) \partial_x (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_x, \\ \rho \ddot{u}_y &= (\lambda + \mu) \partial_y (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_y, \\ u_x(0, x, y) &= 0, \quad u_y(0, x, y) = 0, \\ \dot{u}_x(0, x, y) &= 0, \quad \dot{u}_y(0, x, y) = 0, \\ \sigma_{xx}(t, 0, y) &= (\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \mu \partial_y u_y = -P \delta(y) \delta(t), \\ \sigma_{xy}(t, 0, y) &= \mu (\partial_x u_y + \partial_y u_x) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в граничное условие для  $\sigma_{xx}$  входит  $P$  со знаком минус. Это связано с тем, что объемная упругая сила

$$f_i = \partial_j \sigma_{ij}.$$

Интегрируя это равенство по объему, ограниченному поверхностью  $\Gamma$ , и применяя теорему Гаусса, получим для силы, действующей на весь объем, формулу

$$F_i = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j dS,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль. Поскольку у нас ось  $x$  направлена внутрь полуплоскости, то нормаль имеет отрицательную  $x$ -компоненту, и  $\sigma_{xx}$  будет отрицательна для силы, направленной по  $x$ .

Удобно ввести скорости продольных и поперечных волн  $v_{\parallel}^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $v_{\perp}^2 = \mu/\rho$ , а также их отношение  $\gamma = v_{\parallel}/v_{\perp}$  и новое время  $\tau = v_{\parallel} t$ . Система (1) переписывается в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u}_x &= (\gamma^2 - 1) \partial_x (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_x, \\ \gamma^2 \ddot{u}_y &= (\gamma^2 - 1) \partial_y (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_y, \\ u_x(0, x, y) &= 0, \quad u_y(0, x, y) = 0, \\ \dot{u}_x(0, x, y) &= 0, \quad \dot{u}_y(0, x, y) = 0, \\ \sigma_{xx}(\tau, 0, y) &= \mu [\gamma^2 \partial_x u_x + (\gamma^2 - 2) \partial_y u_y] = -P v_{\parallel} \delta(y) \delta(\tau), \\ \sigma_{xy}(\tau, 0, y) &= \mu (\partial_x u_y + \partial_y u_x) = 0, \end{aligned}$$

где точкой обозначается теперь дифференцирование по  $\tau$ . Задача (2) называется двумерной задачей Лэмба.

### ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Впервые задача в приведенной выше постановке появилась в статье Лэмба 1904 г. [1]. Следует отметить, что одновременно на эту работу ссылаются как на первую работу, в которой интегральные преобразования были применены в теории упругости. Лэмбу удалось получить явные выражения, но только для смещения на границе. В трехмерной задаче ему удалось получить смещения на границе в виде

однократного интеграла. По-видимому, впервые явные выражения для смещения во всей полуплоскости были получены Смирновым и Соболевым в 1932 г. [2] с помощью метода функционально-инвариантных решений. Годом позже Смирнов и Соболев [3] получили решение трехмерной задачи (во всем полупространстве) в виде однократного интеграла от алгебраической функции по некоторому контуру в комплексной плоскости.

Для переполучения результатов Смирнова и Соболева методом интегральных преобразований понадобилось еще шесть лет. В 1939 г. Каньяр опубликовал монографию [4], в которой подробно рассмотрел отражение и преломление сферической волны на границе раздела двух полупространств. Для вычисления обратных интегральных преобразований ему пришлось придумать метод, ныне носящий его имя, а знаменитый “путь Каньяра” впервые появился на рис. 13 главы V его книги. Каньяр рассматривал только трехмерный случай и получил выражения для решения во всем пространстве.

Насколько можно судить, работа Каньяра и исследования советской школы проводились независимо. В 1950 г. Петрашень, Марчук и Огурцов опубликовали работу [5], в которой переполучали результаты Смирнова и Соболева методом интегральных преобразований. Справедливости ради заметим, что они применили несколько иную, чем Каньяр, технику обращения интегральных преобразований, основанную не на деформации контура, а на изменении порядка интегрирования (в связи с анизотропной теорией упругости этот способ принято называть методом Виллиса [6]). Однако и тот и другой способы существенно опираются на введенную еще Лэмбом замену переменных. Фактически Лэмб пользовался методом Каньяра, только в очень специальном случае.

Метод Каньяра был развит и обобщен в работе де Хупа [7].

Решения трехмерной задачи Лэмба и сходной задачи для горизонтально приложенного усилия во всем полупространстве выражаются через эллиптические интегралы. В 1979 г. Ричардс заметил [8], что значительная часть этих интегралов для точек на поверхности выражается через элементарные функции. В частности, выражается через элементарные функции вертикальное смещение на поверхности в задаче Лэмба.

Настоящая заметка следует в основном Поручикову [9], но не вводятся потенциалы упругих волн. Нам кажется, что такой более прямой подход упростил изложение.

## АЛГЕБРА

Решение поставленной задачи довольно просто выписывается методом Фурье. Для этого введем лапласовский образ смещения по времени

$$(3) \quad V_{x,y}(\omega, x, y) = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\omega\tau} u_{x,y}(\tau, x, y)$$

и фурье-преобразование  $V$  по  $y$

$$(4) \quad U_{x,y}(\omega, x, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} V_{x,y}(\omega, x, y).$$

Продельвая над уравнениями (2) преобразования (3) и (4), найдем

$$(5) \quad \begin{aligned} \gamma^2 \omega^2 U_x &= \gamma^2 \partial_x^2 U_x - k^2 U_x + ik(\gamma^2 - 1) \partial_x U_y, \\ \gamma^2 \omega^2 U_y &= \partial_x^2 U_y - k^2 \gamma^2 U_y + ik(\gamma^2 - 1) \partial_x U_x, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \gamma^2 \partial_x U_x + ik(\gamma^2 - 2) U_y &= -Pv_{\parallel}/\mu, \quad x = 0, \\ \partial_x U_y + ik U_x &= 0, \quad x = 0. \end{aligned}$$

(При преобразованиях нужно учитывать, что лапласовским образом от  $\ddot{u}(t, x, y)$  является  $\omega^2 V(\omega, x, y) - \omega u(0, x, y) - \dot{u}(0, x, y)$ , что в силу начальных условий сводится к  $\omega^2 V(\omega, x, y)$ . Кроме того, при вычислении лапласовского образа импульсной силы нужно считать, что сила действует в некоторый момент времени  $\tau_1 > 0$ , переходя затем к пределу  $\tau_1 \rightarrow +0$ . Это позволяет правильно разделить во времени начальные условия и внешнее воздействие: сила начинает действовать после того, как заданы начальные условия.)

Решение уравнений (5) ищем в виде

$$U_x = Ae^{-\alpha x}, \quad U_y = Be^{-\alpha x}.$$

Для коэффициентов  $A$  и  $B$  получаем линейную однородную систему уравнений

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \omega^2 \gamma^2 - \alpha^2 \gamma^2 + k^2 & ik\alpha(\gamma^2 - 1) \\ ik\alpha(\gamma^2 - 1) & \omega^2 \gamma^2 - \alpha^2 + k^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Как известно, линейная однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель ее матрицы равен нулю

$$\begin{aligned} \Delta &= (\omega^2 \gamma^2 - \alpha^2 \gamma^2 + k^2)(\omega^2 \gamma^2 - \alpha^2 + k^2 \gamma^2) + k^2 \alpha^2 (\gamma^2 - 1)^2 = \\ &= \gamma^2 (\alpha^2 - \omega^2 \gamma^2 - k^2) (\alpha^2 - \omega^2 - k^2) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, нетривиальное решение существует при

$$\alpha_1 = \sqrt{\omega^2 \gamma^2 + k^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\omega^2 + k^2}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2.$$

Из возможных решений физическому условию убывания при  $x \rightarrow +\infty$  будут удовлетворять только решения с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (более подробно мы обсудим это в разделе “Анализ”). Подставляя  $\alpha_1$  в (7), найдем  $A = k$ ,  $B = -i\alpha_1$ . Аналогично для  $\alpha_2$  получим  $A = i\alpha_2$ ,  $B = k$ . Общее решение, убывающее при  $x \rightarrow +\infty$ , получим, взяв произвольную линейную комбинацию найденных решений

$$(8) \quad \begin{aligned} U_x &= Cke^{-\alpha_1 x} + Di\alpha_2 e^{-\alpha_2 x}, \\ U_y &= -Ci\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + Dke^{-\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

Подставляя общее решение в граничные условия (6), получим систему уравнений для определения коэффициентов  $C$  и  $D$

$$(9) \quad \begin{pmatrix} i\alpha_1^2 & -2k\alpha_2 \\ -2k\alpha_1 & -i\alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Pv_{\parallel}/\mu \end{pmatrix},$$

где  $\alpha_5 = \sqrt{\omega^2\gamma^2 + 2k^2}$ . Определитель матрицы этой системы

$$R(\omega, k) = \alpha_5^4 - 4k^2\alpha_1\alpha_2 = (\omega^2\gamma^2 + 2k^2)^2 - 4k^2\sqrt{(\omega^2 + k^2)(\omega^2\gamma^2 + k^2)}$$

называется функцией Рэлея. Решая (9), находим

$$C = -\frac{Pv_{\parallel}2k\alpha_2}{\mu R(\omega, k)}, \quad D = -\frac{Pv_{\parallel}i\alpha_5^2}{\mu R(\omega, k)}.$$

Остается подставить  $C$  и  $D$  в (8), и мы получаем выражения для образов смещений

$$U_x = -\frac{Pv_{\parallel}\alpha_2}{\mu R(\omega, k)} [2k^2e^{-\alpha_1x} - \alpha_5^2e^{-\alpha_2x}],$$

$$U_y = -\frac{Pv_{\parallel}ik}{\mu R(\omega, k)} [-2\alpha_1\alpha_2e^{-\alpha_1x} + \alpha_5^2e^{-\alpha_2x}].$$

Сами смещения получаем, последовательно применяя преобразования, обратные (4) и (3)

$$(10) \quad V_{x,y}(\omega, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{iky} U_{x,y}(\omega, x, k),$$

$$(11) \quad u_{x,y}(\tau, x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{\omega\tau} V_{x,y}(\omega, x, y).$$

### АНАЛИЗ

Прежде всего сделаем в (10) замену переменной  $k = i\omega s$ . Тогда

$$(12) \quad V_{x,y}(\omega, x, y) = \int_D \frac{Pv_{\parallel}ids}{2\pi\mu} e^{-\omega ys} W_{x,y}(\omega, x, s),$$

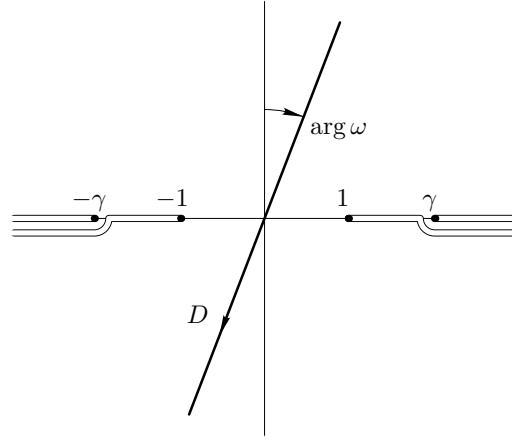
контур  $D$  показан на рисунке,

$$W_x = \frac{\sqrt{1-s^2}}{R(s)} \left[ 2s^2 e^{-x\omega\sqrt{\gamma^2-s^2}} + (\gamma^2 - 2s^2) e^{-x\omega\sqrt{1-s^2}} \right],$$

$$W_y = \frac{s}{R(s)} \left[ -2\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2-s^2)} e^{-x\omega\sqrt{\gamma^2-s^2}} + (\gamma^2 - 2s^2) e^{-x\omega\sqrt{1-s^2}} \right],$$

а  $R(s) = (\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4s^2\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}$ . Как видно, зависимость от  $\omega$  теперь осталась только в экспонентах.

Подынтегральные функции  $W$  содержат два двузначных радикала  $\sqrt{\gamma^2-s^2}$  и  $\sqrt{1-s^2}$ , а потому определены на четырехлистной римановой поверхности. Эту риманову поверхность мы получим, взяв четыре экземпляра комплексной плоскости, проведя на каждом разрезы от точек ветвления  $\pm 1, \pm\gamma$  до бесконечности и склеив разные листы по разрезам так, что получится поверхность с топологией тора. Листы будем различать по значениям, которые принимают  $\sqrt{\gamma^2-s^2}$  и  $\sqrt{1-s^2}$



Контур интегрирования в комплексной плоскости  $s$ .

в точке  $s = 0$ . Таким образом, на листе  $(+, +)$   $\sqrt{\gamma^2 - s^2} = \gamma$ ,  $\sqrt{1 - s^2} = 1$  при  $s = 0$ , на листе  $(-, +)$   $\sqrt{\gamma^2 - s^2} = -\gamma$ ,  $\sqrt{1 - s^2} = 1$  при  $s = 0$ , и так далее.

Выясним поведение радикалов на бесконечности. Возьмем для примера лист  $(+, +)$  и будем двигаться от точки  $s = 0$  вправо, обходя точки ветвления сверху. Полуокружность, пройденная по часовой стрелке вокруг точки ветвления, даст множитель  $-i$ , справа от точек ветвления радикалы примут значения  $-i\sqrt{s^2 - \gamma^2}$  и  $-i\sqrt{s^2 - 1}$ , поэтому на бесконечности  $\sqrt{\gamma^2 - s^2} \rightarrow -is$ ,  $\sqrt{1 - s^2} \rightarrow -is$ . То же верно для всей верхней полуплоскости. В нижней полуплоскости, наоборот,  $\sqrt{\gamma^2 - s^2} \rightarrow is$ ,  $\sqrt{1 - s^2} \rightarrow is$ . Чтобы получить поведение радикалов на других листах, нужно только изменить знаки. Например, на листе  $(-, +)$  в верхней полуплоскости  $\sqrt{\gamma^2 - s^2} \rightarrow is$ ,  $\sqrt{1 - s^2} \rightarrow -is$ .

Определим, на каком листе должен лежать контур  $D$ , чтобы обеспечить сходимость интеграла по  $s$ . Для этого прежде всего выясним более детально вид контура  $D$ . Как известно, контур  $C$  в обратном преобразовании Лапласа (11) лежит в правой полуплоскости, справа от всех особенностей подынтегрального выражения. Поэтому  $-\pi/2 < \arg \omega < \pi/2$ . Это означает, что контур  $D$  всегда идет из верхней полуплоскости в нижнюю. Далее, экспоненциальный множитель в (12) на контуре  $D$  чисто мнимый ((12) получена из (10) заменой переменной, а в (10) это заведомо так), поэтому сходимость интеграла обеспечивается экспоненциальным множителем в  $W$ . В верхней полуплоскости  $\arg s = \pi/2 - \arg \omega$ , поэтому для листа  $(+, +)$   $\arg(x\omega\sqrt{\gamma^2 - s^2}) \rightarrow 0$ ,  $\arg(x\omega\sqrt{1 - s^2}) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . В нижней полуплоскости  $\arg s = -\pi/2 - \arg \omega$ , поэтому для листа  $(+, +)$   $\arg(x\omega\sqrt{\gamma^2 - s^2}) \rightarrow 0$ ,  $\arg(x\omega\sqrt{1 - s^2}) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Итак, и в верхней и в нижней полуплоскостях листа  $(+, +)$  показатели экспонент в  $W$  имеют большие отрицательные вещественные части при  $s \rightarrow \infty$ , что обеспечивает сходимость интеграла. Иная ситуация на других листах. На листе  $(-, +)$  в верхней полуплоскости  $\arg(x\omega\sqrt{\gamma^2 - s^2}) \rightarrow \pi$ ,  $\arg(x\omega\sqrt{1 - s^2}) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ , так что показатель экспоненты, содержащий  $\sqrt{\gamma^2 - s^2}$ , имеет большую положительную вещественную часть, и интеграл расходится.

Мы пришли к выводу, что контур  $D$  лежит на листе  $(+, +)$ , который в этой связи называется физическим. Прочие листы называются нефизическими. Ясно

также, что пара радикалов  $\alpha_1-\alpha_3$  (а также  $\alpha_2-\alpha_4$ ) не может одновременно присутствовать в решении, так как всегда будет приводить к расходящимся интегралам. Именно поэтому в разделе “Алгебра” мы отбросили  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ .

Выясним теперь, по каким еще направлениям (кроме направления контура  $D$ ) полный экспоненциальный множитель (включающий также  $e^{-\omega y s}$  из (12)) на физическом листе убывает, обеспечивая сходимость интеграла. В верхней полуплоскости  $\arg(\omega(y s + x\sqrt{\gamma^2 - s^2})) \rightarrow \arg \omega + \arg(y - ix) + \arg s$  при  $s \rightarrow \infty$ . Условие сходимости есть  $|\arg(\omega(y s + x\sqrt{\gamma^2 - s^2}))| < \pi/2$ , что дает  $-\pi/2 < \arg s + \arg \omega - \arg(y + ix) < \pi/2$ . Отметим, что этот интервал всегда включает направления в диапазоне от направления контура  $D$  до направления  $y + ix$ . В нижней полуплоскости  $\arg(\omega(y s + x\sqrt{\gamma^2 - s^2})) \rightarrow \arg \omega + \arg(y + ix) + \arg s$  при  $s \rightarrow \infty$ . Условие сходимости записывается в виде  $-\pi/2 < \arg s + \arg \omega - \arg(y - ix) < \pi/2$ . Отметим, что этот интервал всегда включает направления в диапазоне от направления контура  $D$  до направления  $y - ix$ . Аналогичные выводы справедливы для экспоненты с радикалом  $\sqrt{1 - s^2}$ .

Подынтегральное выражение в (12) имеет, помимо рассмотренных точек ветвления, полюсные особенности, связанные с нулями функции Рэлея  $R(s)$ . Поскольку функция Рэлея зависит только от произведения радикалов  $\sqrt{1 - s^2}$  и  $\sqrt{\gamma^2 - s^2}$ , то на листах  $(+, +)$  и  $(-, -)$  (а также на листах  $(-, +)$  и  $(+, -)$ ) она принимает одинаковые значения. На листе  $(+, +)$  для определения нулей  $R(s)$  мы должны решать уравнение

$$(13) \quad (\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4s^2\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)} = 0,$$

а на листе  $(-, +)$  — уравнение

$$(14) \quad (\gamma^2 - 2s^2)^2 - 4s^2\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)} = 0.$$

Таким образом, нули  $R(s)$  на всей четырехлистной поверхности определяются из уравнения

$$\begin{aligned} [(\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4s^2\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)}][(\gamma^2 - 2s^2)^2 - 4s^2\sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)}] = \\ = (\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2) = 0. \end{aligned}$$

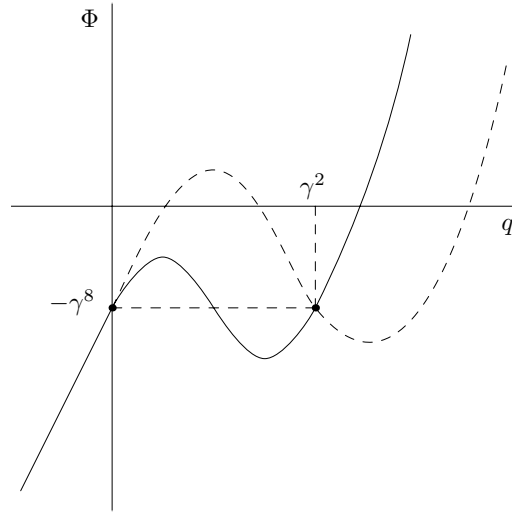
Это бикубическое уравнение относительно  $s$  (члены  $s^8$  сокращаются). Чтобы качественно проанализировать его решение, введем функцию

$$\Phi(\gamma, q) = (\gamma^2 - 2q)^4 - 16q^2(1 - q)(\gamma^2 - q) = 16(\gamma^2 - 1)q^3 - 8\gamma^2(3\gamma^2 - 2)q^2 + 8\gamma^6 q - \gamma^8.$$

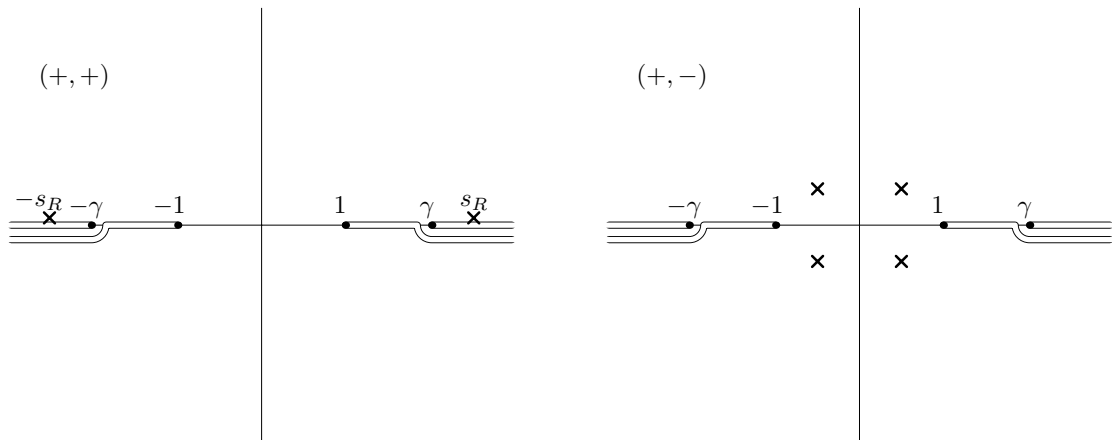
Из условия устойчивости упругого тела относительно деформаций (положительности упругой энергии при любых деформациях) следует, что  $\gamma^2 > 4/3$ . Следовательно, коэффициент при  $q^3$  в функции  $\Phi$  положителен, и  $\Phi \rightarrow +\infty$ , когда  $q \rightarrow +\infty$ . Частные значения

$$\Phi(\gamma, 0) = -\gamma^8, \quad \Phi(\gamma, \gamma^2) = -\gamma^8, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q}(\gamma, 0) = 8\gamma^6$$

говорят нам, что  $\Phi$  имеет локальный максимум между точками 0 и  $\gamma^2$ , а также единственный нуль на интервале  $[\gamma^2, +\infty)$ . Нулю  $q \in [\gamma^2, +\infty)$  соответствуют два нуля  $s = \pm\sqrt{q}$  функции Рэля, которые называются рэлеевскими. (Напомним, что функция Рэля является определителем системы линейных уравнений (9). Если определитель этой системы равен нулю, то соответствующая однородная система имеет нетривиальное решение — рэлеевскую волну, отсюда и название.) Наличие других вещественных нулей  $\Phi$  зависит от ее значения в локальном максимуме. Если значение  $\Phi$  в локальном максимуме положительно, то на отрезке  $[0, \gamma^2]$  имеется два нуля. Им соответствуют четыре нуля функции Рэля на отрезке  $[-\gamma, \gamma]$ . Из (13) и (14) следует, что эти нули лежат на самом деле на отрезках  $[-1, 1]$  листов  $(+, -)$  и  $(-, +)$ . Поскольку положение нулей функции Рэля непрерывно зависит от параметра  $\gamma$ , они остаются на листах  $(+, -)$  и  $(-, +)$ , даже когда перестают быть вещественными.



К определению нулей функции Рэля.



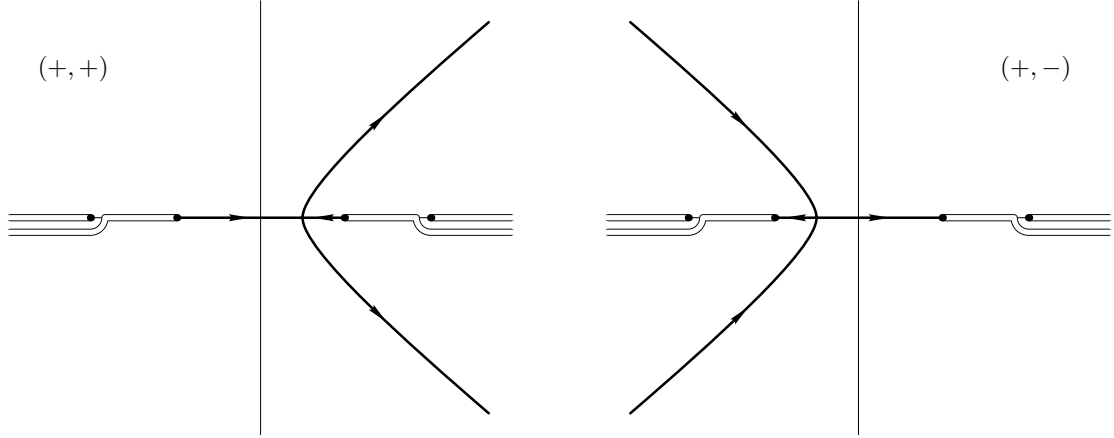
Нули функции Рэля на физическом и нефизическом листах.

Более детально поведение нулей может быть исследовано численно. Вывод же состоит в том, что по четыре нуля  $R(s)$  лежат на нефизических листах  $(+, -)$



и  $(-, +)$ . Что касается рэлеевских нулей, то, поскольку они попадают на разрезы, их можно по желанию считать лежащими на любых листах (в этом проявляется условность деления римановой поверхности на листы). Для определенности будем говорить, что по два рэлеевских нуля лежат на физическом листе  $(+, +)$  и на нефизическом листе  $(-, -)$  сверху от разрезов. Как следует из предыдущего анализа контура  $D$  и будет видно из последующего анализа пути Каньяра, рэлеевские полюсы вступают в игру только на свободной поверхности тела. Рассмотрению этого случая мы отвели специальный раздел “Смещение на границе”. До конца этого раздела будем считать  $x > 0$ .

Основная идея метода Каньяра состоит в деформации контура  $D$  в такой контур  $L$ , что на нем  $ys + x\sqrt{\gamma^2 - s^2}$  или  $ys + x\sqrt{1 - s^2}$  являются вещественными и положительными, а (12) приобретает смысл прямого преобразования Лапласа. Последующее обратное преобразование Лапласа (11) возвращает нас к подынтегральной функции в (12), которая и дает искомую координатно-временную зависимость смещения.



Линии вещественного  $\tau$  в комплексной плоскости  $s$ .

Для применения метода Каньяра нужно сперва определить контуры на римановой поверхности  $s$ , на которых  $ys + x\sqrt{\gamma^2 - s^2}$  или  $ys + x\sqrt{1 - s^2}$  вещественны. К счастью, это можно сделать явно. Начнем с выражения  $ys + x\sqrt{1 - s^2}$ . Напишем

$$(15) \quad \tau = ys + x\sqrt{1 - s^2}$$

и решим это уравнение относительно  $s$ . Мы получим

$$s = \frac{\tau y \pm x\sqrt{r^2 - \tau^2}}{r^2},$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ . При  $|\tau| < r$  это отрезок вещественной оси  $[-1, 1]$ , при  $|\tau| > r$  это гиперболы. Действительно, полагая  $s = s' + is''$ , имеем  $s' = \tau y / r^2$ ,  $s'' = \pm x\sqrt{\tau^2 - r^2} / r^2$ , поэтому

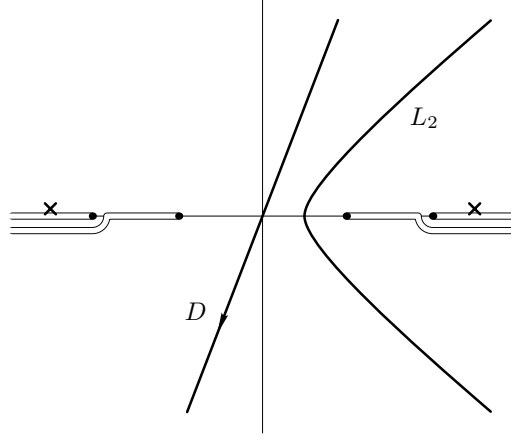
$$(s'r/y)^2 - (s''r/x)^2 = 1.$$

При  $y = 0$  гипербола вырождается в мнимую ось. Ветви гипербол имеют асимптоты в направлениях  $\pm y \pm ix$ . Как следует из нашего анализа поведения радикалов на

бесконечности, на физическом листе лежит только одна ветвь гиперболы: правая при  $y > 0$  и левая при  $y < 0$ . Вторая же ветвь лежит на нефизическом листе  $(+, -)$  (при этом листы  $(-, +)$  и  $(-, -)$  воспроизводят листы  $(+, +)$  и  $(+, -)$ , поскольку (15) зависит только от одного радикала). Ветвь гиперболы, лежащая на физическом листе, и будет тем контуром  $L_2$ , который используется в методе Каньяра. Будем называть его путем Каньяра. Обозначим

$$(16) \quad s_2 = \frac{\tau y + ix\sqrt{\tau^2 - r^2}}{r^2}, \quad \tau > r.$$

Нетрудно видеть, что  $s_2$  пробегает верхнюю половину пути Каньяра, которую мы будем обозначать  $L_2^+$ .



Контур  $D$  и путь Каньяра  $L_2$ .

Рассмотрим слагаемые в (12) с  $ys + x\sqrt{1-s^2}$  в экспоненте

$$V_x^{(2)}(\omega, x, y) = \int_D \frac{Pv_{\parallel}ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(ys-x\sqrt{1-s^2})} \frac{\sqrt{1-s^2}(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)},$$

$$V_y^{(2)}(\omega, x, y) = \int_D \frac{Pv_{\parallel}ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(ys-x\sqrt{1-s^2})} \frac{s(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)}.$$

Мы можем деформировать контур  $D$  в путь Каньяра, так как между ними нет никаких особенностей, а интегралы по дугам на бесконечности стремятся к нулю. Далее мы замечаем, что вещественные части интегралов по верхней и нижней частям пути Каньяра совпадают, а потому

$$V_x^{(2)}(\omega, x, y) = 2\Re \int_{L_2^+} \frac{Pv_{\parallel}ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(ys-x\sqrt{1-s^2})} \frac{\sqrt{1-s^2}(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)},$$

$$V_y^{(2)}(\omega, x, y) = 2\Re \int_{L_2^+} \frac{Pv_{\parallel}ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(ys-x\sqrt{1-s^2})} \frac{s(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)}.$$

Делая замену переменной (16), получим

$$V_x^{(2)}(\omega, x, y) = -2\Re \int_r^\infty \frac{Pv_{\parallel}i}{2\pi\mu} e^{-\omega\tau} \frac{\sqrt{1-s_2^2}(\gamma^2 - 2s_2^2)}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} d\tau,$$

$$V_y^{(2)}(\omega, x, y) = -2\Re \int_r^\infty \frac{Pv_{\parallel}i}{2\pi\mu} e^{-\omega\tau} \frac{s_2(\gamma^2 - 2s_2^2)}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} d\tau.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа (11), найдем

$$(17) \quad \begin{aligned} u_x^{(2)}(\tau, x, y) &= -2\Re e \frac{Pv_{\parallel} i \sqrt{1-s_2^2}(\gamma^2 - 2s_2^2)}{2\pi\mu R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r), \\ u_y^{(2)}(\tau, x, y) &= -2\Re e \frac{Pv_{\parallel} i s_2(\gamma^2 - 2s_2^2)}{2\pi\mu R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r). \end{aligned}$$

Анализ выражений

$$(18) \quad \begin{aligned} V_x^{(1)}(\omega, x, y) &= \int_D \frac{Pv_{\parallel} ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(y_s - x\sqrt{\gamma^2 - s^2})} \frac{2s^2 \sqrt{1-s^2}}{R(s)}, \\ V_y^{(1)}(\omega, x, y) &= - \int_D \frac{Pv_{\parallel} ids}{2\pi\mu} e^{-\omega(y_s - x\sqrt{\gamma^2 - s^2})} \frac{2s \sqrt{(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{R(s)} \end{aligned}$$

производится аналогично. Уравнение

$$\tau = ys + x\sqrt{\gamma^2 - s^2}$$

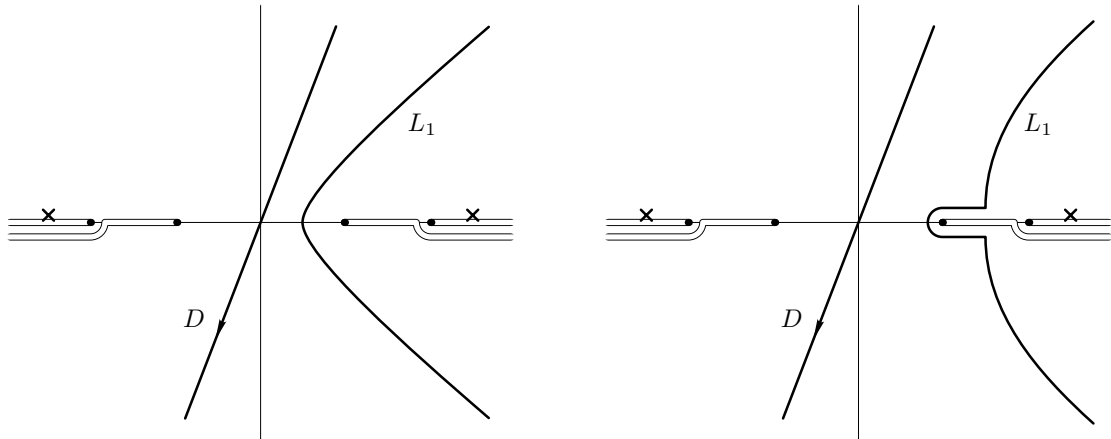
имеет решение

$$s = \frac{\tau y \pm x\sqrt{\gamma^2 r^2 - \tau^2}}{r^2}.$$

При  $|\tau| < \gamma r$  это отрезок вещественной оси  $[-\gamma, \gamma]$ , при  $|\tau| > \gamma r$  это гиперболы

$$(19) \quad (s'r/\gamma y)^2 - (s''r/\gamma x)^2 = 1.$$

Точно так же, как в случае радикала  $\sqrt{1-s^2}$  на физическом листе лежит правая ветвь гиперболы при  $y > 0$  и левая ветвь при  $y < 0$ . Имеется, однако, дополнительная тонкость, связанная с тем, что при  $\gamma|y|/r > 1$  гипербола пересекает вещественную ось справа от точки ветвления  $s = 1$  (или слева от точки ветвления  $s = -1$ ). Путь Каньяра  $L_1$  при  $\gamma|y|/r < 1$  совпадает с ветвью гиперболы (19), лежащей на физическом листе, а при  $\gamma|y|/r > 1$  состоит из нижней половины этой гиперболы, нижнего берега разреза от точки пересечения гиперболы с вещественной осью до точки ветвления  $s = 1$  (или  $s = -1$ ), верхнего берега от точки ветвления до точки пересечения гиперболы с вещественной осью и верхней половины гиперболы.



Путь Каньяра  $L_1$  в случаях  $\gamma|y|/r < 1$  и  $\gamma|y|/r > 1$ .

Определим

$$(20) \quad s_1 = \begin{cases} \frac{\tau y - x\sqrt{\gamma^2 r^2 - \tau^2}}{r^2}, & \gamma|y|/r > 1, \quad y > 0, \quad |y| + x\sqrt{\gamma^2 - 1} < \tau < \gamma r, \\ \frac{\tau y + x\sqrt{\gamma^2 r^2 - \tau^2}}{r^2}, & \gamma|y|/r > 1, \quad y < 0, \quad |y| + x\sqrt{\gamma^2 - 1} < \tau < \gamma r, \\ \frac{\tau y + ix\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 r^2}}{r^2}, & \gamma r < \tau. \end{cases}$$

Тогда  $s_1$  пробегает верхнюю половину пути Каньяра. Деформируя в (18) контур  $D$  в путь Каньяра  $L_1$ , переходя к интегрированию только по его верхней половине  $L_1^+$  и делая замену переменной (20), получим

$$V_x^{(1)}(\omega, x, y) = -2\Re \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} e^{-\omega\tau} \frac{2s_1^2 \sqrt{1-s_1^2}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} d\tau,$$

$$V_y^{(1)}(\omega, x, y) = 2\Re \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} e^{-\omega\tau} \frac{2s_1 \sqrt{(1-s_1^2)(\gamma^2 - s_1^2)}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} d\tau,$$

где

$$(21) \quad \tau_0 = \begin{cases} |y| + x\sqrt{\gamma^2 - 1}, & \gamma|y|/r > 1, \\ \gamma r, & \gamma|y|/r < 1. \end{cases}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа (11), найдем

$$(22) \quad u_x^{(1)}(\tau, x, y) = -2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{2s_1^2 \sqrt{1-s_1^2}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0)$$

$$u_y^{(1)}(\tau, x, y) = 2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{2s_1 \sqrt{(1-s_1^2)(\gamma^2 - s_1^2)}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0).$$

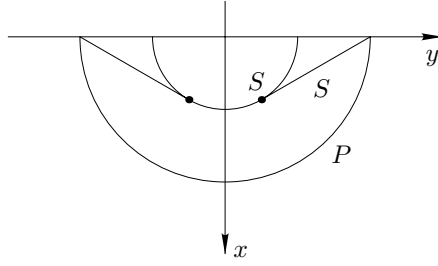
Полное смещение складывается из (17) и (22)

$$(23) \quad u_{x,y}(\tau, x, y) = u_{x,y}^{(1)}(\tau, x, y) + u_{x,y}^{(2)}(\tau, x, y).$$

Хитрые аргументы ступенчатых функций имеют простую геометрическую интерпретацию. В (17) они определяют фронт продольной волны, на котором смещения имеют корневую особенность ( $\sim 1/\sqrt{\tau - r}$ ) из-за множителя  $ds_2/d\tau$ . Этот фронт имеет форму полуокружности. Фронт поперечной волны в (22) имеет более сложную форму. Он состоит из полуокружности и отрезков двух прямых, касательных к ней и проходящих через точки пересечения фронта продольной волны со свободной поверхностью. На полуокружности смещения имеют корневую особенность ( $\sim 1/\sqrt{\tau - \gamma r}$ ) из-за множителя  $ds_1/d\tau$ . На отрезках прямых смещения непрерывны и имеют особенности типа  $\sqrt{\tau - \tau_0}$ , так как обе компоненты в (22) включают множители  $\sqrt{1-s_1^2}$ .

Более наглядными являются компоненты смещений в полярных координатах

$$u_r = \frac{xu_x + yu_y}{r}, \quad u_\varphi = \frac{-yu_x + xu_y}{r}.$$



Волновые фронты.

Они имеют вид

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)}(\tau, x, y) &= 2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{-xs_1 + y\sqrt{\gamma^2 - s_1^2}}{r} \frac{2s_1\sqrt{1-s_1^2}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0) = \\
&= 2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{\sqrt{\gamma^2 r^2 - \tau^2 - i0}}{r} \frac{2s_1\sqrt{1-s_1^2}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0), \\
u_{\varphi}^{(1)}(\tau, x, y) &= 2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{ys_1 + x\sqrt{\gamma^2 - s_1^2}}{r} \frac{2s_1\sqrt{1-s_1^2}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0) = \\
&= 2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{\tau}{r} \frac{2s_1\sqrt{(1-s_1^2)(\gamma^2 - s_1^2)}}{R(s_1)} \frac{ds_1}{d\tau} \theta(\tau - \tau_0), \\
u_r^{(2)}(\tau, x, y) &= -2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{x\sqrt{1-s_2^2} + ys_2}{r} \frac{\gamma^2 - 2s_2^2}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r) = \\
&= -2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{\tau}{r} \frac{\gamma^2 - 2s_2^2}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r), \\
u_{\varphi}^{(2)}(\tau, x, y) &= -2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{-y\sqrt{1-s_2^2} + xs_2}{r} \frac{\gamma^2 - 2s_2^2}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r) = \\
&= -2\Re \frac{Pv_{\parallel} i}{2\pi\mu} \frac{i\sqrt{\tau^2 - r^2}}{r} \frac{\gamma^2 - 2s_2^2}{R(s_2)} \frac{ds_2}{d\tau} \theta(\tau - r).
\end{aligned}$$

(при преобразовании  $u$  мы воспользовались определениями  $s_1$  и  $s_2$ ). Ясно, что радиальная компонента смещения непрерывна на фронте поперечной волны и имеет на нем особенность типа  $\sqrt{\tau - \gamma r}$ , а азимутальная — на фронте продольной и имеет на нем особенность типа  $\sqrt{\tau - r}$ .

#### СМЕЩЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ

Смещение на границе можно получить предельным переходом  $x \rightarrow +0$  в формулах (17) и (22). При этом предельном переходе путь Каньяра ложится на вещественную ось, так что в игру вступают рэлеевские полюсы. Для упрощения рассуждений далее всюду будем считать  $y > 0$  (при  $y < 0$  картина симметрична). Разберемся сначала с формулой (17). Из (16) следует, что

$$s_2 \rightarrow \tau/y + i0, \quad ds_2/d\tau \rightarrow 1/y.$$

Оказывается удобным по-разному представить функцию Рэлея на интервалах  $(1, \gamma]$  и  $[\gamma, +\infty)$ . На интервале  $(1, \gamma]$  напишем

$$\frac{1}{R(s)} = \frac{(\gamma^2 - 2s^2)^2 - 4s^2\sqrt{(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)} = \frac{(\gamma^2 - 2s^2)^2 + 4is^2\sqrt{(s^2 - 1)(\gamma^2 - s^2)}}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}.$$

Все корни вещественны, мнимая часть выделена явно. Знак мнимой части соответствует значению корня  $\sqrt{1-s^2}$  в верхней полуплоскости. Для интервала  $[\gamma, +\infty)$ , на котором лежит рэлеевский полюс  $s_R$ , воспользуемся формулой Сохоцкого

$$\frac{1}{R(s)} = \wp \frac{1}{R(s)} - \frac{i\pi\delta(s - s_R)}{R'(s_R)},$$

причем  $R(s) = (\gamma^2 - 2s^2)^2 - 4s^2\sqrt{(s^2 - 1)(s^2 - \gamma^2)}$ , где опять-таки все корни вещественны, мнимая часть выделена явно, а значения корней  $\sqrt{1-s^2}$  и  $\sqrt{\gamma^2 - s^2}$  взяты с верхнего берега разрезом.

Теперь уже выделение вещественной части в формуле (17) не составляет труда

$$u_x^{(2)}(\tau, 0, y) = \begin{cases} -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{\sqrt{s^2 - 1}(\gamma^2 - 2s^2)^3}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\wp \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{\sqrt{s^2 - 1}(\gamma^2 - 2s^2)}{R(s)}, & \gamma < s, \end{cases}$$

$$u_y^{(2)}(\tau, 0, y) = \begin{cases} \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{4s^3(\gamma^2 - 2s^2)\sqrt{(s^2 - 1)(\gamma^2 - s^2)}}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{s(\gamma^2 - 2s^2)\pi\delta(s - s_R)}{R'(s)}, & \gamma < s. \end{cases}$$

Всюду нужно подставить  $s = \tau/y$ .

Формула (22) обрабатывается аналогично. Из (20) находим

$$s_1 \rightarrow \tau/y + i0, \quad ds_1/d\tau \rightarrow 1/y,$$

причем из (21) видно, что  $\tau_0 = y$ . Вычисления приводят к результатам

$$u_x^{(1)}(\tau, 0, y) = \begin{cases} -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{2s^2\sqrt{s^2 - 1}(\gamma^2 - 2s^2)^2}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\wp \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{2s^2\sqrt{s^2 - 1}}{R(s)}, & \gamma < s, \end{cases}$$

$$u_y^{(1)}(\tau, 0, y) = \begin{cases} \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{2s\sqrt{(s^2 - 1)(\gamma^2 - s^2)}(\gamma^2 - 2s^2)^2}{(\gamma^2 - 2s^2)^4 - 16s^4(1-s^2)(\gamma^2 - s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{2s\sqrt{(s^2 - 1)(s^2 - \gamma^2)}\pi\delta(s - s_R)}{R'(s)}, & \gamma < s. \end{cases}$$

Всюду нужно подставить  $s = \tau/y$ . Полное смещение в соответствие с формулой (23) имеет вид

$$(24) \quad \begin{aligned} u_x(\tau, 0, y) &= \begin{cases} -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{\gamma^2\sqrt{s^2-1}(\gamma^2-2s^2)^2}{(\gamma^2-2s^2)^4-16s^4(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\wp \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{\gamma^2\sqrt{s^2-1}}{R(s)}, & \gamma < s, \end{cases} \\ u_y(\tau, 0, y) &= \begin{cases} \frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{2s\gamma^2(\gamma^2-2s^2)\sqrt{(s^2-1)(\gamma^2-s^2)}}{(\gamma^2-2s^2)^4-16s^4(1-s^2)(\gamma^2-s^2)}, & 1 < s < \gamma, \\ -\frac{Pv_{\parallel}}{\pi\mu y} \frac{\gamma^2(\gamma^2-2s^2)\pi\delta(s-s_R)}{2sR'(s)}, & \gamma < s. \end{cases} \end{aligned}$$

При преобразовании последнего равенства использовано уравнение Рэля  $R(s) = 0$ , которое выполняется в точке  $s = s_R$ . Видно, что вертикальное смещение имеет особенность типа  $\sqrt{\tau-y}$ , а горизонтальное — особенности  $\sqrt{\tau-y}$  и  $\sqrt{\tau-\gamma y}$ .

#### О НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛНАХ

Из формулы (24) видно, что горизонтальное смещение в рэлеевской волне имеет вид  $\delta$ -функции, тогда как вертикальное — вид функции  $\wp 1/t$ . Между тем каждый, кто имел дело с монохроматическими волнами Рэля в однородном полупространстве, знает, что вектор поляризации рэлеевских волн не зависит от частоты. Он не зависит и от горизонтальной медленности, поскольку медленность рэлеевских волн — фиксированная величина, которая определяется из уравнения Рэля. Таким образом, вектор поляризации рэлеевских волн определяется исключительно свойствами среды (в наших обозначениях — коэффициентом  $\gamma$ ). Следовательно, для монохроматических волн Рэля существует определенное отношение между вертикальной и горизонтальной компонентами смещения. Казалось бы, то же должно быть справедливо для немонахроматических волн, однако это противоречит формуле (24).

Решение парадокса в том, что на самом деле вектор поляризации рэлеевских волн *зависит* от частоты. Зависимость эта, правда, довольно хитрая: при изменении знака частоты вектор поляризации комплексно сопрягается. Можно аккуратно проследить указанную зависимость по формулам (использованное в статье преобразование Лапласа нужно заменить на преобразование Фурье), но она ясна из общих соображений: после преобразования Фурье мы должны получить вещественное смещение. Поскольку в рэлеевской волне поляризация эллиптическая, а вектор поляризации определен с точностью до множителя, можно считать его горизонтальную компоненту вещественной, а вертикальную — число мнимой. Тогда вектор поляризации имеет вид

$$\left( h, i \frac{\omega}{|\omega|} v \right),$$

где  $h$  и  $v$  вещественны и зависят только от  $\gamma$ .

Покажем, что такой выбор вектора поляризации приводит к формулам для смещения в рэлеевской волне, согласующимся с (24). Пусть спектр определяется функ-

цией  $G(\omega)$ . Горизонтальное смещение равно

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) h e^{-i\omega(t-sy)} \frac{d\omega}{2\pi} = hg(t-sy),$$

где  $s$  — медленность волны Рэлея,  $g(t)$  — фурье-образ  $G(\omega)$ . Вертикальное смещение равно

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) i \frac{\omega}{|\omega|} v e^{-i\omega(t-sy)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{t-ia} = \begin{cases} 2\pi i e^{-\omega a}, & \omega > 0, \quad a > 0, \\ 0, & \omega > 0, \quad a < 0, \\ 0, & \omega < 0, \quad a > 0, \\ -2\pi i e^{-\omega a}, & \omega < 0, \quad a < 0. \end{cases}$$

Мы видим, что фурье-образом  $1/(t-i0) + 1/(t+i0) = 2\varphi 1/t$  является  $2\pi i\omega/|\omega|$ . Применяя теперь к интегралу (26) теорему о свертке, можно записать вертикальное смещение в виде

$$(27) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \varphi \frac{1}{t-sy-\tau} v g(\tau) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что формулы (25) и (27) согласуются с (24). (Сейсмологи называют формулу (27) преобразованием Гильберта от  $g(t)$ .)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Lamb, *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **A203** (1904), 1–42.
2. В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, *Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний*, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1932, № 20, 37 с.
3. В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, *О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии*, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1933, № 29, с. 43–51.
4. L. Cagniard, *Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives*, Paris, 1939.
5. Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов, *О задаче Лэмба в случае полупространства*, Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., 1950, № 35, вып. 21, с. 71–118.
6. J. R. Willis, *Self-similar problems in elastodynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **A274** (1973), no. 1240, 435–491.
7. A. T. de Hoop, *A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems*, Appl. Sci. Res. Sect. B **8** (1960), no. 4, 349–356.
8. P. G. Richards, *Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation*, Bull. Seism. Soc. Amer. **69** (1979), no. 4, 947–956.
9. В. Б. Поручиков, *Методы динамической теории упругости*, М.: Наука, 1986.