МЕТОД ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. С. Вшивцев, Д. В. Перегудов, А. В. Татаринцев

Аннотация. Для упругой среды с произвольным типом анизотропии описана явно ковариантная процедура построения динамической и статической функций Грина, основанная на технике проекционных операторов

1. Введение

Состояние сплошной среды будем описывать вектром смещения $u_i(t, \mathbf{x})$. Тогда в линейном приближении уравнение движения сплошной среды имеет вид:

$$
\begin{gathered}
L_{ik} u_k = 0, \\
L_{ik} = \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{ijkl} \nabla_j \nabla_l.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Упругие свойства среды представлены в уравнении (1) тензором 4-го ранга c_{ijkl} — так называемым тензором Гука. Он обладает свойствами симметрии

$$
c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \tag{2}
$$

и свойством строгой положительной определенности квадратичной формы упругого потенциала:

$$
W = \tfrac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0, \quad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \neq 0. \tag{3}
$$

Уравнение для вектора смещения может быть получено вариационными методами из функционала действия:

$$
S = \int dt\, d^3x \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - W \right]. \tag{4}
$$

Это возможно благодаря свойствам симметрии тензора Гука.

Авторы выражают признательность Международному научному фонду Сороса за частичную финансовую поддержку, оказанную при выполнении данной работы.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Решение уравнения (1) для бесконечной среды ищется в виде суперпозиции плоских волн:

$$u_i(t,\mathbf{x}) = U_i e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{5}$$

при этом вектор поляризации U_i, частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ оказываются связанными уравнением:

$$(\Gamma_{ik} - \xi\delta_{ik})U_k = 0. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma_{ik} = c_{ijkl}n_j n_l$ — тензор Грина—Кристоффеля, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор волновой нормали, а $\xi = \omega^2/k^2 = v^2$ — квадрат скорости волны. Таким образом, мы пришли к спектральной задаче для матрицы $\hat{\Gamma}$. Установим некоторые ее свойства. Матрица $\hat{\Gamma}$ является вещественной симметричной строго положительно определенной матрицей. Все эти свойства немедленно следуют из свойств тензора Гука. Немного труднее увидеть, что матрица $\hat{\Gamma}$ не может быть кратна единичной. Действительно, если бы это было так, то для двух ортогональных друг другу единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнялось бы равенство:

$$\delta_{ik} = c_{ijkl}(a_j + b_j)(a_l + b_l) = 2\delta_{ik} + c_{ijkl}a_j b_l + c_{ijkl}a_l b_j,$$

домножая которое на $a_i a_k$, получим противоречие $1 = 2$.

Нетривиальные решения U_i уравнения (6) существуют для значений ξ, являющихся корнями характеристического уравнения

$$\chi(\xi) = \mathrm{Det}(\hat{\Gamma} - \xi) = 0. \tag{7}$$

Этим определяются скорости волн. Условие строгой положительности матрицы $\hat{\Gamma}$ гарантирует, что все корни характеристического уравнения строго положительны и скорости волн определены корректно. Либо все три скорости различны, либо две из них совпадают (три же совпадать не могут). Поскольку матрица $\hat{\Gamma}$ является к тому же вещественной симметричной, соответствующие собственные векторы (векторы поляризации волн) вне зависимости от возможного вырождения скоростей могут быть выбраны вещественными и составляют ортонормированный базис. Для каждого значения $\mathbf{k}$ существует три плоско (раз их векторы поляризации вещественны) поляризованных волны со взаимно перпендикулярными поляризациями [1,2].

Функция Грина уравнения (1) определяется как решение соответствующего уравнения с δ-образной правой частью

$$L_{ik}G_{km}(t,\mathbf{x}) = \delta_{im}\delta(t)\delta(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Выполняя преобразование Фурье, найдем для функции Грина в импульсном представлении $\hat{G}(\omega,\mathbf{k})$ уравнение:

$$k^2(\hat{\Gamma} - \xi)\hat{G} = 1. \tag{9}$$

Формальное решение уравнения (9) может быть записано в виде:

$$\hat{G} = k^{-2}(\hat{\Gamma} - \xi)^{-1}. \tag{10}$$

Мы говорим формальное, потому что, если ξ совпадает с одним из корней характеристического уравнения (7), матрица $\hat{\Gamma} - \xi$ необратима. Таким образом, каждому типу волн соответствует полюс в импульсном представлении функции Грина, и нужно еще доопределить правило обхода этих полюсов.

Нашей основной задачей будет получить удобное явное выражение для функции Грина уравнения (1) в импульсном представлении.

2. Исследование характеристического уравнения

Характеристический многочлен $\chi(\xi)$, определяемый формулой (7), имеет вид:

$$\chi(\xi) = -\xi^3 + a\xi^2 - b\xi + c. \tag{11}$$

Как известно, характеристический многочлен инвариантен относительно выбора базиса, поэтому его коэффициенты могут быть выражены через $\hat{\Gamma}$ с помощью одних лишь инвариантных операций. В явном виде это можно сделать, используя равенства

$$\begin{gathered} \operatorname{Det} \hat{A} = \tfrac{1}{6}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}A_{ai}A_{bj}A_{ck}, \\ \varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} \delta_{ai} & \delta_{aj} & \delta_{ak} \\ \delta_{bi} & \delta_{bj} & \delta_{bk} \\ \delta_{ci} & \delta_{cj} & \delta_{ck} \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Для коэффициентлв a, b и c получаются формулы

$$\begin{gathered} a = \operatorname{Sp}\hat{\Gamma}, \quad b = \tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{Sp}\hat{\Gamma})^2 - \operatorname{Sp}\hat{\Gamma}^2\right], \\ c = \tfrac{1}{6}(\operatorname{Sp}\hat{\Gamma})^3 + \tfrac{1}{3}\operatorname{Sp}\hat{\Gamma}^3 - \tfrac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{\Gamma}^2\operatorname{Sp}\hat{\Gamma}. \end{gathered} \tag{12}$$

Если бы матрица $\hat{\Gamma}$ была бесследовой ($\operatorname{Sp}\hat{\Gamma} = 0$), то предыдущие формулы сильно бы упростились. Очевидно, мы всегда можем сделать матрицу $\hat{\Gamma}$ бесследовой, вычтя из нее $\frac{1}{3}\operatorname{Sp}\hat{\Gamma}$. Введем специальное обозначение

$$\langle\hat{\Gamma}\rangle = \tfrac{1}{3}\operatorname{Sp}\hat{\Gamma}. \tag{13}$$

Тогда характеристическое уравнение для матрицы $\hat{\Gamma} - \langle\hat{\Gamma}\rangle$ будет иметь вид

$$\eta^3 - P\eta - Q = 0, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} P = \tfrac{3}{2}\langle(\hat{\Gamma} - \langle\hat{\Gamma}\rangle)^2\rangle, \quad Q = \langle(\hat{\Gamma} - \langle\hat{\Gamma}\rangle)^3\rangle, \\ \eta = \xi - \langle\hat{\Gamma}\rangle. \end{gathered} \tag{15}$$

Ввиду уже отмеченных свойств матрицы $\hat\Gamma$ уравнение (14) либо имеет три различных вещественных корня, либо два из них совпадают; в любом случае соответствующие значения ξ строго положительны. Мы можем явно выписать собственные числа по формуле Кардано

$$\begin{gathered}\eta_a = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{3/2}\cos(\varphi/3 + 2\pi a/3), \quad a = 1,2,3\\ \cos\varphi = Q\left[2\left(\frac{P}{3}\right)^{3/2}\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{16}$$

Другой подход к формулам (12) заключается в следующем. В своих главных осях матрица $\hat\Gamma$ имеет вид

$$\hat\Gamma = \begin{pmatrix}\xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}\hat\Gamma &= \xi_1+\xi_2+\xi_3,\\ \operatorname{Sp}\hat\Gamma^2 &= \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2,\\ \operatorname{Sp}\hat\Gamma^3 &= \xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3.\end{aligned} \tag{17}$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(\xi) = (\xi_1-\xi)(\xi_2-\xi)(\xi_3-\xi),$$

из чего следует

$$\begin{aligned}a &= \xi_1+\xi_2+\xi_3,\\ b &= \xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1,\\ c &= \xi_1\xi_2\xi_3.\end{aligned} \tag{18}$$

Исключая из (17) и (18) собственные числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, придем к формулам (12). Этот способ на первый взгляд хуже, поскольку мы предполагали возможность приведения матрицы к главным осям, однако он немедленно обобщается и на случай, когда возможно приведение лишь к жордановой форме.

3. Построение проекторов для симметричной матрицы

Опишем общую технику построения функции от симметричной матрицы при помощи проекционных операторов. Пусть $\hat A$ — произвольная квадратная вещественная симметричная матрица $n\times n$. Покажем, что ее минимальный аннулирующий многочлен не имеет кратных корней. Пусть $\xi_1\ldots\xi_k$ — попарно различные корни характеристического уравнения для $\hat A$ (возможно, $k<n$). Образуем многочлен

$$\varphi(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(\xi-\xi_i). \tag{19}$$

Он является аннулирующим многочленом для $\hat{A}$, то есть

$$\varphi(\hat{A}) = 0.$$

Действительно, нам нужно показать, что для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется равенство

$$\varphi(\hat{A})\mathbf{x} = \prod_{i=1}^{k}(\hat{A} - \xi_i)\mathbf{x} = 0. \tag{20}$$

Поскольку любой вектор может быть разложен по собственным векторам вещественной симметричной матрицы, достаточно доказать это для собственных векторов $\hat{A}$. Для них же утверждение очевидно, так как одна из скобок в (20) обращается в нуль.

Введем обозначение φ_i для минимального аннулирующего многочлена, из которого вычеркнут множитель $(\xi - \xi_i)$:

$$\varphi(\xi) = \varphi_i(\xi)(\xi - \xi_i), \quad \varphi_i(\xi_i). \neq 0$$

Рассмотрим матрицы

$$\hat{\Pi}_i = \varphi_i(\hat{A})/\varphi_i(\xi_i).$$

Легко видеть, что они являются проекционными операторами на подпространства собственных векторов с собственными значениями ξ_i. В самом деле, если вектор $\mathbf{x}$ является собственным вектором $\hat{A}$ с собственным значением ξ_l, то, очевидно, $\hat{\Pi}_l\mathbf{x} = \mathbf{x}$. С другой стороны, $(\hat{A} - \xi_m)\mathbf{x} = (\xi_l - \xi_m)\mathbf{x}$, что пропорционально вектору $\mathbf{x}$ и отлично от нуля, если $m \neq l$. Поэтому для таких m

$$\hat{\Pi}_m\mathbf{x} = \hat{\Pi}_m\frac{\hat{A} - \xi_m}{\xi_l - \xi_m}\mathbf{x} = \frac{\varphi_m(\hat{A})(\hat{A} - \xi_m)}{\varphi_m(\xi_m)(\xi_l - \xi_m)}\mathbf{x} = 0.$$

Нам удобно будет записать свойства проекторов в форме

$$\hat{\Pi}_i\hat{\Pi}_k = \delta_{ik}\hat{\Pi}_i, \quad \sum_i \hat{\Pi}_i = 1,$$
$$\hat{A} = \sum_i \xi_i\hat{\Pi}_i.$$

Произвольная функция матрицы $\hat{A}$ записывается в виде

$$f(\hat{A}) = \sum_i f(\xi_i)\hat{\Pi}_i.$$

4. Функция Грина в импульсном представлении

Мы в состоянии теперь записать решение уравнения (9)

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_i \frac{\hat{\Pi}_i}{k^2\xi_i - \omega^2}.$$

Сумма берется по всем различным собственным значениям матрицы $\hat{\Gamma}$. Каждое слагаемое как функция ω имеет лишь пару полюсов и описывает распространение волны заданного типа. Приведем явные выражения проекторов для случая трех различных корней

$$\hat{\Pi}_1 = \frac{(\hat{\Gamma} - \omega_2^2)(\hat{\Gamma} - \omega_3^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}, \quad \hat{\Pi}_2 = \frac{(\hat{\Gamma} - \omega_1^2)(\hat{\Gamma} - \omega_3^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega_3^2)},$$
$$\hat{\Pi}_3 = \frac{(\hat{\Gamma} - \omega_1^2)(\hat{\Gamma} - \omega_2^2)}{(\omega_3^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_2^2)}.$$

и двух совпадающих корней характеристического уравнения для $\hat{\Gamma}$

$$\hat{\Pi}_1 = \frac{(\hat{\Gamma} - \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \hat{\Pi}_2 = \frac{(\hat{\Gamma} - \omega_1^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}.$$

5. Изотропная среда

Изотропная среда характеризуется тем, что ее упругие свойства одинаковы по всем направлениям. Тензор Гука изотропной среды строится из δ-символов и с учетом свойств симметрии имеет вид:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Тензор Грина-Кристоффеля

$$\Gamma_{ik} = \mu\delta_{ik} + (\lambda + \mu)n_i n_k$$

имеет три собственных значения $\xi_1 = \lambda + 2\mu$, $\xi_2 = \xi_3 = \mu$, два из которых совпадают. Проекторы описываются выражениями:

$$(\Pi_1)_{ik} = n_i n_k, \quad (\Pi_2)_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k,$$

а функция Грина будет иметь хорошо известный вид [1,2]:

$$G_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{n_i n_k}{(\lambda + 2\mu)k^2 - \omega^2} + \frac{\delta_{ik} - n_i n_k}{\mu k^2 - \omega^2}.$$

Первое слагаемое соответствует продольной волне, второе — поперечной.

6. Поперечно-изотропная среда

Одним из наиболее простых, но важным примером анизотропной среды является поперечно-изотропная среда. Свойства анизотропии такой среды описываются единичным характеристическим вектором $\mathbf{a}$. В плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{a}$ среда является изотропной. Тензор Гука строится из δ-символов и векторов a_i:

$$c_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\ + Ca_ia_ja_ka_l + D(a_ia_j\delta_{kl} + a_ka_l\delta_{ij}) + \\ + E(a_ia_k\delta_{jl} + a_ja_k\delta_{il} + a_ia_l\delta_{jk} + a_ja_l\delta_{ik}).$$

Обычно принято в качестве независимых параметров использовать компоненты тензора Гука в системе координат, где $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Введенные коэффициенты A, B, C, D, E связаны с ними равенствами:

$$c_{11} = A + 2B, \qquad c_{12} = A, \qquad c_{13} = A + D,$$
$$c_{33} = A + 2B + C + 2D + 4E, \qquad c_{44} = B + 4E.$$

Тензор Грина-Кристоффеля для поперечно-изотропной среды будет следующим:

$$\Gamma_{ik} = \delta_{ik}(B + E(\mathbf{na})^2) + n_in_k(A + B) + \\ + a_ia_k(E + C(\mathbf{na})^2) + (n_ia_k + a_in_k)(E + D)(\mathbf{na}).$$

Характеристическое уравнение в форме (), записанное для переменной $z = B + E(\mathbf{na})^2 - \xi$, имеет вид:

$$z(z^2 + z[A + B + E + (C + 2E + 2D)(\mathbf{na})^2] + (A + B)(E + C(\mathbf{na})^2(1 - (\mathbf{na})^2)) = 0,$$

то есть распадается на уравнения меньших степеней. В этом случае, вообще говоря, все три корня характеристического уравнения различны. Мы не будем явно выписывать проекторы и функцию Грина в импульсном представлении, хотя это можно без труда сделать.

7. Статическая функция Грина

Задача построения статической функции Грина для произвольных анизотропных сред уже давно вызывает определенный интерес [8]. Статическая функция Грина определяется уравнением:

$$c_{ijkl}\nabla_j\nabla_l G_{km}(\mathbf{x}) = -\delta_{im}\delta^{(3)}(\mathbf{x}).$$

В импульсном представлении уравнению () будет соответствовать матричное уравнение $k^2\hat{\Gamma} = 1$, решением которого в соответствии с формулой () является величина:

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = k^{-2}\sum_i \frac{\hat{\Pi}_i}{\xi_i}.$$

(Сумма берется по всем различным собственным значениям матрицы $\hat{\Gamma}$.) Статическую функцию Грина можно также записать в форме

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = k^{-2}(\hat{\Gamma}^2 - a\hat{\Gamma} + b)/c = k^{-2}\frac{\hat{\Gamma}^2 - 3\langle\hat{\Gamma}\rangle\hat{\Gamma} + \frac{9}{2}\langle\hat{\Gamma}\rangle^2 - \frac{3}{2}\langle\hat{\Gamma}^2\rangle}{\frac{3}{2}\langle\hat{\Gamma}\rangle^3 + \langle\hat{\Gamma}^3\rangle - \frac{3}{2}\langle\hat{\Gamma}^2\rangle\langle\hat{\Gamma}\rangle}$$

(a, b, c — коэффициенты характеристического уравнения).

8. Заключение

В работе предложена процедура построения фурье-образа функции Грина $\hat{\Gamma}(\omega, \mathbf{k})$ в виде суммы слагаемых, соответствующих вкладам различных волн в сплошной среде с любым типом анизотропии.

Если предположить, что тензор c_{ijkl} в уравнении (1) может иметь поправку, нарушающую его симметрию по перестановке пар индексов (ij) и (kl), то тензор Грина—Кристоффеля $\hat{\Gamma}$ также будет в общем случае несимметричным. Нарушение симметрии приводит к невозможности построения упругого потенциала (3) и действия (4). Силы, приводящие к возникновению добавки, нарушающей симметрию тензора c_{ijkl}, будут непотенциальными. Линейным преобразованием тензор $\hat{\Gamma}$ может быть приведен к жордановой форме. В этом случае проекторы, соответствующие вырожденным собственным значениям не могут быть выражены в простом виде (). Несмотря на это, удается построить полную систему проекторов и здесь (см. приложение). При этом набор векторов поляризации будет неортогональным. Наряду со слагаемыми типа () у функции Грина будут присутствовать вклады, пропорциональные $(k^2\xi_a - \omega^2)^{-n}$, где $n > 1$.

Переход к координатному представлению функции Грина $\hat{G}(t, \mathbf{x})$ может быть осуществлен (как это следует из результатов работы [6]) в общем случае в виде двукратного интеграла по углам ориентации единичного вектора волновой нормали n в сферической системе координат.

Приложение. Проекционные операторы для матриц, не приводимых к диагональной форме.

A. Случай единственного собственного значения. Пусть матрица $\hat{A}$ $(N \times N)$ имеет единственное собственное значение η. Тогда ее минимальный аннулирующий многочлен $\varphi(\xi)$ имеет вид:

$$\varphi(\xi) = (\xi - \eta)^n, \quad 1 \leqslant n \leqslant N.$$

Случай $n = 1$ означает возможность приведения к диагональному виду, а $n > 1$ — к жордановой форме. Поскольку матрица $\hat{A}$ удовлетворяет уравнению $(\hat{A} - \eta)^n = 0$, то любая функция от матрицы $\hat{A}$ записывается в виде

$$f(\hat{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}(\hat{A} - \eta)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}(\hat{A} - \eta)^k$$

B. Общий случай. Пусть теперь матрица $\hat{A}$ имеет произвольное число собственных значений. Тогда линейное пространство всех векторов длины N распадается в прямую сумму подпространств собственных и присоединенных векторов, соответствующих различным собственным значениям матрицы $\hat{A}$, поэтому достаточно построить проектор на какое-нибудь одно подпространство. Пусть, например, матрица $\hat{A}$ имеет собственное значение η, соответсвующее подпространство собственных и присоединенных векторов обозначим через R. Тогда минимальный аннулирующий многочлен $\hat{A}$ имеет вид:

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(\xi - \eta)^n, \quad \tilde{\varphi}(\eta) \neq 0.$$

Очевидно, что оператор $\tilde{\varphi}(\hat{A})$ отличен от нуля лишь на R. Он, однако, не является проектором на R, поскольку сдвигает векторы в нем. Ограничим $\tilde{\varphi}(\hat{A})$ на R, обозначив его $[\tilde{\varphi}(\hat{A})]_R$, тогда это будет матрица с единственным собственным значением и обратную можно записать в виде (см. п. A):

$$[\tilde{\varphi}(\hat{A})]_R^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\tilde{\varphi}^{-1}]^{(k)}(\eta)}{k!} (\hat{A} - \eta)^k$$

Проектор $\hat{\Pi}_R$ напишется теперь в виде:

$$\hat{\Pi}_R = \tilde{\varphi}(\hat{A})[\tilde{\varphi}(\hat{A})]_R^{-1}$$

Любая функция $f(\hat{A})$ матрицы $\hat{A}$ будет содержать аддитивный вклад, соответствующий подпространству R, следующего типа:

$$\hat{\Pi}_R f(\hat{A})_R = \tilde{\varphi}(\hat{A}) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\tilde{\varphi}^{-1} f]^{(k)}(\eta)}{k!} (\hat{A} - \eta)^k$$

C. Пример. Рассмотрим случай

$$\varphi(\xi) = (\xi - \lambda)^2 (\xi - \mu).$$

Обозначим подпространства собственных и присоединенных векторов, соответствующих собственным значениям λ и μ, через R и S. Тогда

$$\tilde{\varphi}(x)_R = x - \mu, \quad \tilde{\varphi}(x)_S = (x - \lambda)^2$$

Проекторы

$$\hat{\Pi}_R = (\hat{A} - \mu) \left[\frac{1}{\lambda - \mu} - \frac{\hat{A} - \lambda}{(\lambda - \mu)^2} \right],$$

$$\hat{\Pi}_S = \frac{(\hat{A} - \lambda)^2}{(\mu - \lambda)^2}$$

Конструкция типа функции Грина

$$(\hat{A} - \xi)^{-1} = (\hat{A} - \mu) \Bigg[\frac{1}{(\lambda - \mu)(\lambda - \xi)} - \\ - \left(\frac{1}{(\lambda - \mu)^2 (\lambda - \xi)} + \frac{1}{(\lambda - \mu)(\lambda - \xi)^2} \right) (\hat{A} - \lambda) \Bigg] + \frac{(\hat{A} - \lambda)^2}{(\mu - \lambda)^2} \frac{1}{(\mu - \xi)}$$

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости (Теоретическая физика, т. 7)*, М.: Наука, 1987.
2. В. А. Магницкий, *Внутреннее строение и физика Земли*, М. Недра, 1965, p. 379.
3. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах*, М. Наука, 1965, p. 386.
4. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, М.: Наука, 1984, p. 318.
5. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, М.: Наука, 1975, p. 400.
6. А. С. Вшивцев, А. В. Татаринцев, Е. М. Чесноков, *Функция Грина волнового уравнения при наличии анизотропии среды*, Докл. АН **333** (1993), no. 3, 385–388..
7. А. С. Вшивцев, А. В. Татаринцев, Е. М. Чесноков, *Построение функции Грина волнового уравнения при наличии анизотропии среды*, в печати, Изв. АН. Физика Земли (1994).
8. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг, *О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды*, ЖЭТФ **17** (1947), no. 9, 783–791.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

117454, Проспект Вернадского, 78, Москва, Россия