РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОЙ СБОРКИ

Постановка задачи и основные уравнения

Схема лазерной сборки изображена на рис. 1. Для простоты будем учитывать зависимость величин только от времени t и от координаты x вдоль сборки. Процессы в каждом из лазеров будем описывать феноменологическими скоростными уравнениями, обобщенными так, чтобы включать зависимость от координаты

$$\frac{\partial n}{\partial t} = W(N-n) - \frac{\sigma n}{\hbar\omega}(\overrightarrow{I} + \overleftarrow{I}) - n/\tau,$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{I}}{\partial t} = \sigma n \overrightarrow{I} - \frac{\partial \overrightarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overrightarrow{I},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overleftarrow{I}}{\partial t} = \sigma n \overleftarrow{I} + \frac{\partial \overleftarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overleftarrow{I}.$$

В этих уравнениях n обозначает число возбужденных атомов, N — общее число атомов, W — накачку, σ — сечение вынужденного излучения, ω — частоту излучения лазера, $\overrightarrow{I}$ и $\overleftarrow{I}$ — интенсивности излучения, распространяющегося направо и налево в лазере, τ — время жизни возбужденного атома, $\varkappa$ — коэффициент затухания, c — скорость света. Во избежание неоднозначной трактовки приведем размерности всех величин: $[n, N] = [1/\text{м}^3]$, $[W] = [1/\text{с}]$, $[\sigma] = [\text{м}^2]$, $[I] = [\text{Вт}/\text{м}^2]$, $[\varkappa] = [1/\text{м}]$, $[\tau] = [\text{с}]$, $[c] = [\text{м}/\text{с}]$.

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться обезразмеренными уравнениями. Безразмерные (тильдованные) переменные вводятся по формулам

$$t = \tilde{t}/(\sigma c N), \quad x = \tilde{x}/(\sigma N),$$
$$n = \tilde{n}N, \quad I = \tilde{I}\hbar\omega c N,$$
$$W = \tilde{W}\sigma c N, \quad 1/\tau = \tilde{\gamma}\sigma c N, \quad \varkappa = \tilde{\varkappa}\sigma N.$$

Обезразмеренные уравнения имеют вид (тильд не пишем)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = W(1-n) - n(\overrightarrow{I} + \overleftarrow{I}) - \gamma n, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{I}}{\partial t} = n\overrightarrow{I} - \frac{\partial \overrightarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overrightarrow{I}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overleftarrow{I}}{\partial t} = n\overleftarrow{I} + \frac{\partial \overleftarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overleftarrow{I}. \tag{3}$$

Граничные условия на стыке двух элементов сборки должны учитывать возможные отражение, преломление, выход части излучения наружу и потери излучения

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX вне активной зоны лазера. Мы будем использовать наиболее общие линейные условия

$$\begin{aligned} \overleftarrow{J} &= \overrightarrow{J}\overrightarrow{R} + \overleftarrow{I}\overleftarrow{T}, \\ \overrightarrow{I} &= \overleftarrow{I}\overleftarrow{R} + \overrightarrow{J}\overrightarrow{T}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь I и J обозначают интенсивности излучения справа и слева от границы. Параметры $\overrightarrow{R}$, $\overleftarrow{R}$, $\overrightarrow{T}$, $\overleftarrow{T}$ имеют очевидный смысл коэффициентов отражения и преломления. Из физических соображений на них нужно наложить условия $\overrightarrow{R}+\overrightarrow{T} \leqslant 1$, $\overleftarrow{R} + \overleftarrow{T} \leqslant 1$.

На правом торце сборки отсутствует падающая справа волна, а на левом — падающая слева. Граничные условия упрощаются и принимают вид $\overleftarrow{J} = \overrightarrow{J}R$ и $\overrightarrow{I} = \overleftarrow{I}R$ соответственно ($R \leqslant 1$). Конечно, можно было бы задать различные коэффициенты отражения и преломления на разных границах, но мы не будем этого делать.

Некоторые свойства уравнений

Уравнения и граничные условия нужно еще дополнить начальными условиями. Поскольку уравнения первого порядка по времени, нужно задать начальные значения концентрации n и интенсивностей I. Будем называть начальные условия физическими, если $0 \leqslant n \leqslant 1$, $I \geqslant 0$. Первый вопрос, который возникает: будет ли решение с физическими начальными условиями и дальше физическим? Ответ легко дать, когда нет границ. Заметим, что уравнения для I — это линейные уравнения в частных производных первого порядка, которые решаются методом характеристик. Характеристики уравнения (2) — это линии $t - x = \text{const}$, а характеристики уравнения (3) — линии $t + x = \text{const}$. Решения имеют вид

$$\overrightarrow{I}(M) = \overrightarrow{I}(P) \exp\left(\int_{PM} (n - \varkappa) dt\right), \quad \overleftarrow{I}(M) = \overleftarrow{I}(Q) \exp\left(\int_{QM} (n - \varkappa) dt\right).$$

Ясно, что I всегда того же знака, что и начальные условия, так что остаются физическими. Глядя на уравнение (1) видим, что при положительных I концентрация также остается физической.

Пусть теперь имеется граница. Что можно сказать об интенсивности $\overrightarrow{I}$ в точке B? Проведем характеристику $t - x = \text{const}$ до пересечения с границей. Точку пересечения обозначим через C и проведем от нее характеристики $t + x = \text{const}$ и $t - x = \text{const}$ (справа и слева от границы). Будем, как и ранее, обозначать интенсивности слева от границы через J. Мы уже знаем, что в точке C $\overrightarrow{J} > 0$, $\overleftarrow{I} > 0$. Вспоминая граничное условие $\overrightarrow{I} = \overleftarrow{I}\overleftarrow{R} + \overrightarrow{J}\overrightarrow{T}$, видим, что в точке C $\overrightarrow{I} > 0$. Пользуясь формулой (4) заключаем, что и в точке B $\overrightarrow{I} > 0$. Итак, если начальные условия физические, то решение уравнений (1)–(3) всегда остается физическим.

Уравнения (1)–(3) имеют один дефект. Если в начальный момент времени $I = 0$, то $I = 0$ всегда. Это связано с тем, что мы пренебрегли спонтанным излучением (его можно учесть, вводя в уравнения для I члены $n/2M$, где M — полное число атомов в лазере). Ниже мы увидим, что по этой причине предел $I \to 0$ в стационарных уравнениях получается не совсем тривиальным.

Очень интересно было бы исследовать поведение решения уравнений (1)–(3) при $t \to \infty$ (разумеется при не зависящей от времени накачке). Есть ли стационарные режимы и сколько их? Как в фазовом пространстве выглядят области притяжения этих стационарных режимов? Возможны ли решения, не выходящие на стационар? К сожалению, нам не удалось решить этих вопросов. В дальнейшем будем предполагать, что стационарный режим существует, что он только один, и что решение при любых начальных условиях выходит на этот стационарный режим.

Стационарный режим

Уравнения для стационарного режима получаются, если опустить производные по времени

$$
\begin{aligned}
0 &= W(1-n) - n(\overrightarrow{I} + \overleftarrow{I}) - \gamma n, \\
0 &= n\overrightarrow{I} - \frac{\partial \overrightarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overrightarrow{I}, \\
0 &= n\overleftarrow{I} + \frac{\partial \overleftarrow{I}}{\partial x} - \varkappa \overleftarrow{I}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Уравнения для I имеют, как нетрудно убедиться, интеграл

$$\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{I}\overleftarrow{I} = 0.$$

Удобно сделать подстановку

$$\overrightarrow{I} = \frac{a}{2}e^{\varphi(x)}, \quad \overleftarrow{I} = \frac{a}{2}e^{-\varphi(x)},$$

где a — постоянная. В результате получаем систему уравнений для n и φ

$$
\begin{aligned}
0 &= W(1-n) - an\operatorname{ch}\varphi - \gamma n, \\
0 &= n - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varkappa,
\end{aligned}
$$

которая сводится к одному уравнению для φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{W}{W + \gamma + a\operatorname{ch}\varphi} - \varkappa.$$

Граничные условия связывают значения φ и a в двух соседних элементах сборки. Можно так переписать граничные условия, что в одно из них будет входить только φ. Для этого выразим $\overrightarrow{J}$ и $\overleftarrow{J}$ через $\overrightarrow{I}$ и $\overleftarrow{I}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{J} &= \frac{1}{\overrightarrow{T}}\overrightarrow{I} - \frac{\overleftarrow{R}}{\overrightarrow{T}}\overleftarrow{I}, \\
\overleftarrow{J} &= \frac{\overrightarrow{R}}{\overrightarrow{T}}\overrightarrow{I} + \left(\overleftarrow{T} - \frac{\overrightarrow{R}\overleftarrow{R}}{\overrightarrow{T}}\right)\overleftarrow{I}.
\end{aligned}
$$

Разделив одно на другое, получим ($e^{2\psi} = \vec{J}/\overleftarrow{J}$)

$$e^{2\psi} = \frac{e^{2\varphi} - \overleftarrow{R}}{(\vec{T}\overleftarrow{T} - \vec{R}\overleftarrow{R})e^{2\varphi} + \vec{R}},$$

или в более симметричном виде

$$\operatorname{th}\psi = \frac{(1-\vec{R})(1-\overleftarrow{R}) - \vec{T}\overleftarrow{T} + [(1-\vec{R})(1+\overleftarrow{R}) + \vec{T}\overleftarrow{T}]\operatorname{th}\varphi}{(1+\vec{R})(1-\overleftarrow{R}) + \vec{T}\overleftarrow{T} + [(1+\vec{R})(1+\overleftarrow{R}) - \vec{T}\overleftarrow{T}]\operatorname{th}\varphi}.$$

На торцах сборки имеем

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{1-R}{1+R}.$$

Если накачка не зависит от x, то уравнение для φ решается методом разделения переменных

$$x + c = -\frac{\varphi}{\varkappa} - \frac{W}{\varkappa}\frac{1}{\sqrt{b^2-d^2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{b-d}{b+d}} - \operatorname{th}\varphi/2}{\sqrt{\frac{b-d}{b+d}} + \operatorname{th}\varphi/2}, \tag{6}$$

где $b = W - \varkappa(W+\gamma)$, $d = \varkappa a$, c — постоянная интегрирования.

Ставя граничные условия, можно в принципе найти постоянные a в каждом лазере сборки и зависимость $\varphi(x)$. По этим данным определяется мощность излучения. Практически, однако, нужно решить сложную систему трансцендентных уравнений, свойства которой не очень понятны. По этой причине далее мы сосредоточимся на вычислении пороговой мощности накачки. Для нее удается получить достаточно простое алгебраическое уравнение.

Порог

Поскольку мы поставили линейные граничные условия, ясно, что мощность, излучаемая с каждой границы, будет линейно выражаться через интенсивности справа и слева на границе. Чтобы излучаемая мощность была равна нулю, нужно, чтобы интенсивности на границах равнялись нулю. Но это означает, что равны нулю постоянные a во всех лазерах сборки, то есть интенсивность света всюду в сборке равна нулю. Полагая $a = 0$ в формуле (6), находим

$$x + c = \frac{W+\gamma}{W - \varkappa(W+\gamma)}\varphi.$$

Можно предложить следующий способ решения уравнений, вытекающих из граничных условий. Введем совершенно формально интенсивности волн в каждом из лазеров по тем же формулам $\vec{I} = ae^{\varphi(x)}$, $\overleftarrow{I} = ae^{-\varphi(x)}$, что и раньше. Обозначим интенсивности в k-ом лазере на правой и левой его границах через J_k и I_k. Тогда

$$\vec{J}_k = \vec{I}_k y, \tag{7}$$

$$\overleftarrow{I}_k = \overleftarrow{J}_k y, \tag{8}$$

где

$$y = e^{L(W/(W+\gamma)-\varkappa)}. \tag{9}$$

В граничных условиях нужно только расставить индексы

$$\overleftarrow{J}_{k-1} = \overrightarrow{J}_{k-1}\overrightarrow{R} + \overleftarrow{I}_k\overleftarrow{T}, \tag{10}$$

$$\overrightarrow{I}_k = \overleftarrow{I}_k\overleftarrow{R} + \overrightarrow{J}_{k-1}\overrightarrow{T}. \tag{11}$$

На торцах сборки

$$\overleftarrow{J}_n = \overrightarrow{J}_n R, \tag{12}$$

$$\overrightarrow{I}_1 = \overleftarrow{I}_1 R. \tag{13}$$

Мы получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Равенство определителя нулю и дает уравнение для порога. Если принять порядок переменных $\overleftarrow{I}_1$, $\overrightarrow{I}_1$, $\overleftarrow{J}_1$, $\overrightarrow{J}_1$, ..., $\overleftarrow{I}_n$, $\overrightarrow{I}_n$, $\overleftarrow{J}_n$, $\overrightarrow{J}_n$ и порядок уравнений (13), (8), (7), (10), (11), ... (12), то матрица системы выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix}
R & -1 & & & & & & & & & & & & \\
-1 & 0 & y & & & & & & & & & & & \\
 & y & 0 & -1 & & & & & & & & & & \\
 & & -1 & \overrightarrow{R} & \overleftarrow{T} & & & & & & & & & \\
 & & & \overrightarrow{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & y & & & & & & & \\
 & & & & & y & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & y & & & & & \\
 & & & & & & & y & 0 & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & \overrightarrow{R} & \overleftarrow{T} & & & \\
 & & & & & & & & & \overrightarrow{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 0 & y & \\
 & & & & & & & & & & & y & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & R
\end{pmatrix} \tag{14}$$

Блок $\begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует торцу, блок $\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & \overrightarrow{R} & \overleftarrow{T} & \\ & \overrightarrow{T} & \overleftarrow{R} & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$ — внутренней границе. Обозначим

$$\Delta_n(\tilde{R}) = \begin{vmatrix}
\tilde{R} & -1 & & & & & & & & & & & & \\
-1 & 0 & y & & & & & & & & & & & \\
 & y & 0 & -1 & & & & & & & & & & \\
 & & -1 & \vec{R} & \overleftarrow{T} & & & & & & & & & \\
 & & & \vec{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & y & & & & & & & \\
 & & & & & y & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & y & & & & & \\
 & & & & & & & y & 0 & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & \vec{R} & \overleftarrow{T} & & & \\
 & & & & & & & & & \vec{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 0 & y & \\
 & & & & & & & & & & & y & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & R
\end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix}
\vec{R} & \overleftarrow{T} & & & & & & & & & \\
\vec{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & & & & & & & \\
 & -1 & 0 & y & & & & & & & \\
 & & y & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & y & & & & & \\
 & & & & y & 0 & -1 & & & & \\
 & & & & & -1 & \vec{R} & \overleftarrow{T} & & & \\
 & & & & & & \vec{T} & \overleftarrow{R} & -1 & & \\
 & & & & & & & -1 & 0 & y & \\
 & & & & & & & & y & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & -1 & R
\end{vmatrix}.$$

Тогда, раскладывая Δ_n по второй и D_n по третьей строке и дораскладывая получившиеся определители, найдем

$$\begin{aligned}
&\Delta_n(\tilde{R}) = \Delta_{n-1}(\overleftarrow{R}) - y^2 \tilde{R} D_{n-1}, \\
&D_n = \vec{R}\Delta_{n-1}(\overleftarrow{R}) - y^2(\vec{R}\overleftarrow{R} - \vec{T}\overleftarrow{T})D_{n-1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Вместе с начальными значениями $\Delta_0(R) = 1$, $D_0 = R$ эти рекуррентные формулы дают возможность вычислить $\Delta_n(R)$. Уравнение для определения порога имеет вид

$$\Delta_n(R) = 0. \tag{16}$$

Очевидно, $\Delta_n(R)$ является многочленом степени n от y^2, так что уравнение (16) алгебраическое. По известному y порог определяется из соотношения (9).

Попытаемся проанализировать более подробно уравнение (16). Как уравнение относительно y^2 оно имеет n корней в комплексной плоскости. В свете соотношения (9) нас интересуют вещественные положительные корни. Оказывается, в интервале $0 < y^2 < 1$ корней нет. Действительно, допустим существование такого корня. Тогда из уравнений (7), (8)

$$\overrightarrow{J}_k < \overrightarrow{I}_k, \quad \overleftarrow{I}_k < \overleftarrow{J}_k. \tag{17}$$

Используя граничные условия и ограничения $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} \leqslant 1$, $\overleftarrow{R} + \overleftarrow{T} \leqslant 1$, $R \leqslant 1$, найдем

$$\overleftarrow{J}_{k-1} + \overrightarrow{I}_k \leqslant \overrightarrow{J}_{k-1} + \overleftarrow{I}_k, \tag{18}$$

$$\overrightarrow{I}_1 \leqslant \overleftarrow{I}_1, \quad \overleftarrow{J}_n \leqslant \overrightarrow{J}_n. \tag{19}$$

Комбинируя (17) и (18), находим

$$\overleftarrow{J}_{k-1} + \overrightarrow{I}_k < \overrightarrow{I}_{k-1} + \overleftarrow{J}_k.$$

Складывая эти неравенства для $k = 2, \ldots, n$, получим

$$\overleftarrow{J}_1 + \overrightarrow{I}_n < \overrightarrow{I}_1 + \overleftarrow{J}_n.$$

Учитывая (19) и (17), приходим к противоречию

$$\overleftarrow{J}_1 + \overrightarrow{I}_n < \overrightarrow{I}_n + \overleftarrow{J}_1.$$

Отсутствие корней $0 < y^2 < 1$ понятно из физических соображений. При условии $y^2 > 1$ показатель экспоненты в формуле (9) положительный. Это означает, что усиление превосходит потери, как и должно быть для лазерной генерации.

Если $\overrightarrow{R}\overleftarrow{R} - \overrightarrow{T}\overleftarrow{T} > 0$, то нет корней $y^2 < 0$. Это очевидно из рекуррентных формул (15) — при $y^2 < 0$ все Δ и D оказываются положительными.

К сожалению, не удается доказать, что уравнение (16) имеет по крайней мере один корень $y^2 > 1$. Можно лишь построить пример, когда такой корень есть. Нельзя также доказать, что он единственный (если существует). Наоборот, можно показать, что, по крайней мере при малых T, уравнение (16) имеет несколько корней $y^2 > 1$. Действительно, полагая все T равными нулю, а все R разными, мы получим n различных корней $y^2 > 1$ (в этом случае матрица (14) распадается на блоки). Поскольку коэффициенты мнгочлена Δ_n зависят от T непрерывно, то такая же ситуация сохраняется при малых T. Непонятно, как интерпретировать наличие нескольких корней. Нужно ли принимать во внимание только наименьший или каждый корень соответствует своему стационарному режиму? Чем различаются эти режимы? На какой режим выходит решение нестационарного уравнения при заданных начальных условиях?

Отметим еще, что если бы мы положили $I = 0$ в исходных уравнениях (5), то не смогли бы получить никаких уравнений для определения порога. Это связано с тем уже отмечавшимся обстоятельством, что излучение не может развиться из начального состояния $I = 0$, даже если накачка достаточна для генерации. Поэтому уравнения для порога нужно получать предельным переходом $I \to +0$, как мы и делали выше.

Рассмотрим отдельно случай бесконечного числа лазеров в сборке. Предположим, что конфигурация поля одинакова во всех лазерах (можно было бы предположить, что конфигурация повторяется через n лазеров). При этом $J_{k-1} = J_k$ и уравнения (10), (11) принимают вид

$$\overleftarrow{J}_k = \overrightarrow{J}_k \overrightarrow{R} + \overleftarrow{I}_k \overleftarrow{T},$$
$$\overrightarrow{I}_k = \overleftarrow{I}_k \overleftarrow{R} + \overrightarrow{J}_k \overrightarrow{T}.$$

Матрица системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} y & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \overrightarrow{R} & \overleftarrow{T} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{T} & \overleftarrow{R} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & y \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен

$$\Delta_\infty = 1 - y(\overrightarrow{T} + \overleftarrow{T}) + y^2(\overrightarrow{T}\overleftarrow{T} - \overrightarrow{R}\overleftarrow{R}).$$

В этом случае можно явно определить корни. Дискриминант

$$D = (\overrightarrow{T} + \overleftarrow{T})^2 - 4(\overrightarrow{T}\overleftarrow{T} - \overrightarrow{R}\overleftarrow{R}) = (\overrightarrow{T} - \overleftarrow{T})^2 + 4\overrightarrow{R}\overleftarrow{R} > 0.$$

Корни

$$y = \frac{\overrightarrow{T} + \overleftarrow{T} \pm \sqrt{D}}{2(\overrightarrow{T}\overleftarrow{T} - \overrightarrow{R}\overleftarrow{R})}.$$

Если $\overrightarrow{T}\overleftarrow{T} - \overrightarrow{R}\overleftarrow{R} > 0$, то оба корня положительны (и, по доказанному выше, больше единицы). Если же $\overrightarrow{T}\overleftarrow{T} - \overrightarrow{R}\overleftarrow{R} < 0$, то один из корней отрицателен и должен быть отброшен.

Интересно отметить, что очень похожие формулы получаются для сборки из двух лазеров

$$\Delta_2 = 1 - y^2 R(\overrightarrow{R} + \overleftarrow{R}) + y^4 R^2(\overrightarrow{R}\overleftarrow{R} - \overrightarrow{T}\overleftarrow{T}).$$

С точностью до переобозначения $T \to R$, $R \to T$ и $y^2 R \to y$ этот результат совпадает с Δ_∞.