ИОННЫЙ ЗВУК КАК ВОЛНА БЕРНСТЕЙНА—ГРИНА—КРУСКАЛА

И. М. Алешин, Д. В. Перегудов

Аннотация. Рассмотрена классическая задача об ионнозвуковом солитоне

Введение

Цель предлагаемой заметки — критический анализ работы [1], в которой было предсказано существование ионнозвукового солитона. Мы считаем, что нам удалось добиться некоторого идейного упрощения по сравнению с оригиналом (не используются уравнения холодной гидродинамики), а также исправить ряд неточностей (показано, что функция распределения электронов имеет иной вид, нежели предполагалось в работе [1]). Кроме того, выявлена возможность существования солитона нового типа.

Изложение строится следующим образом. Сначала мы коротко обсуждаем основные идеи работы [1] и делаем несколько критических замечаний. Затем мы представляем свой подход к задаче и воспроизводим результаты [1]. В последнем разделе мы обсуждаем новую возможность, связанную с нашим подходом: существование солитонов с резкой границей, которые могут распространяться с любой скоростью.

Работа [1]

В работе [1] были исследованы сильно нелинейные плоские волны в двухкомпонентной плазме (состоящей из электронов и ионов). Пространственно-временная зависимость таких возмущений сводится к зависимости от параметра $\tau = t - x/v_0$, где v_0 — скорость волны (волна распространяется вдоль оси x). Предполагалось, что температура ионной компоненты мала, так что ионы описываются уравнениями холодной гидродинамики. В этом случае концентрация ионов выражается через потенциал самосогласованного поля ϕ формулой

$$n_i = \frac{N_i}{\sqrt{1 - 2e\phi/m_i v_0^2}}$$

Для описания динамики электронов, температура которых не предполагалась малой, было использовано уравнение Власова. При этом, если скорость волны v_0 много меньше тепловой скорости электронов, можно пренебречь производной по времени в уравнении Власова. Для функции распределения и плотности электронов находим соответственно

$$f_e = N_e e^{e\phi/T_e} F_M(v^2), \tag{1}$$

$$n_e = N_e e^{e\phi/T_e}. \tag{2}$$

(F_M — максвелловское распределение.) Связь между параметрами N_e и N_i определяется из условия квазинейтральности плазмы при $\phi = 0$, откуда следует $N_i = N_e$. Подставляя n_e и n_i в уравнение Пуассона, получаем обыкновенное диффереренциальное уравнение для потенциала

$$\phi'' = -4\pi e(n_i(\phi) - n_e(\phi)). \tag{3}$$

Штрих означает дифференцирование по τ. Это уравнение для нелинейного маятника с потенциальной энергией:

$$U \sim -2\sqrt{1 - 2e\phi/m_i v_0^2} - \frac{e^{e\phi/T_e}}{\lambda},$$

где $\lambda = m_i v_0^2/2T_e$. При $\lambda < 1/2$ потенциальная энергия имеет в нуле минимум, так что решением (3) является периодическая волна, при $\lambda > 1/2$ потенциальная энергия имеет в нуле локальный максимум, так что при определенной "энергии" возможно солитонное решение (см. рис. 1).

Как видно, в процессе вывода уравнения (3) использовано довольно много предположений. Ниже мы покажем, что можно избежать использования различных уравнений для разных компонент плазмы: уравнений холодной гидродинамики для ионов и уравнения Власова для электронов. Также легко видеть, что простое пренебрежение производной по времени в уравнении Власова для электронов ведет к нарушению уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial j_e}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

так как ток, соответствующий функции распределения (1), равен нулю. Ниже мы предложим другое выражение для функции распределения, из которого также следует выражение (2) для плотности, но одновременно следует правильное выражение для тока.

Ионный звук с точки зрения БГК

Теперь мы готовы систематически изложить нашу точку зрения на ионно-звуковые волны. При этом мы будем в основном опираться на идеи работы [2]. Прежде всего мы будем описывать обе компоненты плазмы уравнениями Власова:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v\frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{e}{m_e}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f_e}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{e}{m_i}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial v} = 0,$$
$$\Delta\phi = -4\pi e(n_i - n_e)$$

Здесь $n_{e,i} = \int dv\, f_{e,i}$, приведем заодно выражения для тока $j_{e,i} = \int dv\, v f_{e,i}$. Поскольку задача содержит довольно много параметров, дадим сразу их сводку, а также сводку безразмерных переменных

$$\frac{m_e}{m_i} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{m_i v_0^2}{2T_e} = \lambda, \quad \frac{m_i v_0^2}{2T_i} = \mu \gg 1,$$
$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_i}}, \quad \frac{2e\phi_{1,2}}{m_i v_0^2} = \psi_{1,2}, \quad \frac{2e\phi}{m_i v_0^2} = \psi,$$
$$u = v/v_0, \quad \theta = \omega(t - x/v_0), \quad f_{e,i} = N\sqrt{\frac{m_{e,i}}{2\pi T_{e,i}}} g_{e,i}$$

Здесь введен безразмерный потенциал ψ, а также максимальное и минимальное его значения в волне $\psi_{1,2}$. N обозначает среднюю плотность электронов (и ионов). Малость параметра ε соответствует малости скорости волны по сравнению с тепловой скоростью электронов, так как $\varepsilon\lambda = m_e v_0^2/2T_e \ll 1$. Большой параметр μ соответсвует малой тепловой скорости ионов. Вместе с уравнением Власова это фактически дает холодную гидродинамику. Безразмерные стационарные уравнения гласят

$$(1-u)\frac{\partial g_e}{\partial \theta} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d\psi}{d\theta}\frac{\partial g_e}{\partial u} = 0, \tag{5}$$

$$(1-u)\frac{\partial g_i}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{d\psi}{d\theta}\frac{\partial g_i}{\partial u} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -\frac{2}{N}(n_i - n_e) \tag{7}$$

где $n_i = N\sqrt{\mu/\pi}\int du\, g_i$, $n_e = N\sqrt{\varepsilon\lambda/\pi}\int du\, g_e$. Выражения для токов имеют вид $j_i = Nv_0\sqrt{\mu/\pi}\int du\, ug_i$ и $j_e = Nv_0\sqrt{\varepsilon\lambda/\pi}\int du\, ug_e$. Уравнения Власова для ионов (6) и электронов (5) представляют собой уравнения в частных производных первого порядка. Как известно, содержание таких уравнений сводится к утверждению о постоянстве функций распределения вдоль характеристик

$$\frac{d\theta}{1-u} - \frac{2\varepsilon\, du}{d\psi/d\theta} = 0,$$
$$\frac{d\theta}{1-u} + \frac{2\, du}{d\psi/d\theta} = 0$$

Уравнения характеристик имеют интегралы $\sigma_i = (u-1)^2 + \psi$ и $\sigma_e = (u-1)^2 - \psi/\varepsilon$, соответствующие полным энергиям частиц в поле ψ. Общее решение (5) (или (6)) есть произвольная функция интеграла, то есть $g_i = g_i(\sigma_i)$, $g_e = g_e(\sigma_e)$. Однако здесь нужно сделать оговорки, на что впервые было указано в [2]. Дело в том, что характеристики (уровни постоянных $\sigma_{i,e}$) на плоскости (θ, u) могут состоять из нескольких несвязных кусков. Пролетные частицы характеризуются тем, что их характеристики состоят из двух кусков (с разным направлением скорости), причем вдоль каждого куска характеристики можно пройти от $\theta = -\infty$ до $\theta = +\infty$. С точки зрения энергий пролетные частицы выделяются условиями $\sigma_i > \psi_2$, $\sigma_e > -\psi_1/\varepsilon$. Характеристики захваченных частиц могут вести себя еще сложнее. Как было отмечено в [2], на разных кусках характеристики, вообще говоря, функция распределения может принимать разные значения.

Отметим еще, что мы не можем толком задать начальные условия к (5) и (6), чтобы выделить интересующее нас частное решение. Следовало бы для каждого конкретного $\psi(\theta)$ задать начальные условия на такой кривой в плоскости (θ, u), чтобы все куски характеристик пересекали ее один и только один раз. К сожалению все, что можно сказать из физических соображений, — это то, что при "выключении" потенциала функции распределения должны стать максвелловскими. Предлагаемые ниже функции распределения основаны на "разумных" дополнительных предположениях.

Функцию распределения ионов выберем в виде:

$$g_i = \begin{cases} A \exp\left\{-\mu[1 \pm \sqrt{\sigma_i}]^2\right\}, & \sigma_i > \psi_2, \\ 0, & \sigma_i < \psi_2 \end{cases}$$

Как видно, мы пренебрегли захваченными частицами. Постоянная A определяется из условия квазинейтральности системы. При $\psi_2 < 1$ функция распределения имеет глобальный максимум по u в точке $u = 1 - \sqrt{1-\psi}$, так что плотность ионов и ионный ток легко вычисляются методом перевала

$$n_i = \frac{NA}{\sqrt{1-\psi}} + \dots$$

$$j_i = \frac{Nv_0 A}{\sqrt{1-\psi}}\left(1 - \sqrt{1-\psi}\right) + \dots$$

Точками обозначены следующие по малому параметру $1/\mu$ члены.

В электронной функции распределения нельзя пренебрегать захваченными частицами. Для них мы взяли "сдвинутое" распределение Максвелла

$$g_e = \begin{cases} B \exp\left\{-\lambda\varepsilon\sigma_e\right\}, & \sigma_e < -\psi_1/\varepsilon, \\ C \exp\left\{-\lambda\varepsilon[1 \pm \sqrt{\sigma_e}]^2\right\}, & \sigma_e > -\psi_1/\varepsilon \end{cases}$$

Из постоянных B и C только одна может быть определена по заданной средней плотности электронов. Значение же второй связано со способом захвата частиц и не может быть определено в рамках стационарной задачи. Для плотности и тока получим

$$n_e = NBe^{\lambda\psi} \operatorname{erf}\sqrt{\lambda(\psi - \psi_1)} + NCe^{\lambda\psi}\left(1 - \operatorname{erf}\sqrt{\lambda(\psi-\psi_1)}\right) + \dots$$

$$j_e = n_e v_0 - Nv_0 C\left[1 - \operatorname{erf}\sqrt{-\lambda\psi_1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-\lambda\psi_1}e^{\lambda\psi_1}\right] + \dots$$

Точками обозначены следующие по малому параметру ε члены. Поскольку ток отличается от $n_e v_0$ лишь постоянным слагаемым, довольно очевидно, что уравнение непрерывности (4) выполняется.

При $C = B$ выражение для плотности электронов совпадает с выражением работы [1]. Совпадают и все последующие выводы. Условие квазинейтральности ($n_i = n_e$ при $\psi = 0$) дает $A = B$. Уравнение для потенциала ψ имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -2A\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\psi}} - e^{\lambda\psi}\right\} \tag{8}$$

Это уравнение нелинейного маятника с потенциальной энергией

$$U = 2A \left\{ -2\sqrt{1-\psi} - \frac{e^{\lambda\psi}}{\lambda} \right\}$$

При $\lambda < 1/2$ потенциальная энергия имеет в нуле минимум, так что решением (8) является периодическая волна, при $\lambda > 1/2$ потенциальная энергия имеет в нуле локальный максимум, так что при определенной "энергии" возможно солитонное решение (см. рис. 1).

Солитон нового типа

Рассмотрим теперь случай $C \neq B$. Сосредоточимся на солитонных решениях, так что сразу положим $\psi_1 = 0$. Удобно ввести параметр $D = C - B$. По сравнению со случаем $D = 0$ к "потенциальной энергии" U добавится член:

$$\Delta U = 2D \left\{ \frac{e^{\lambda\psi}}{\lambda} \operatorname{erf} \sqrt{\lambda\psi} - \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda\psi} \right\}$$

Разложение ΔU вблизи $\psi = 0$ начинается с члена $\psi^{3/2}$:

$$\Delta U = 2D \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} (\lambda\psi)^{3/2} + \dots \right)$$

Поскольку разложение потенциала U при $D = 0$ вблизи $\psi = 0$ начинается с члена ψ^2, то рассматриваемая добавка принципиально меняет решение. Рассмотрим сначала случай $\lambda > 1/2$, когда существует обычный солитон при $D = 0$. Как видно из рис. 2, в случае $D > 0$ солитон пропадает. В случае $D < 0$ солитон не пропадает, но значительно деформируется. Если в случае $D = 0$ уравнение

$$\theta = \int \frac{d\psi}{\sqrt{2(E - U(\psi))}},$$

(здесь $E = U(0)$ — "энергия", интеграл уравнения (7)) определяющее неявно зависимость $\psi(\theta)$, имело решение $\psi \sim e^{-a\theta}$ при $\theta \to \infty$, то есть потенциал был отличен от нуля во всем пространстве и экспоненциально убывал на бесконечности, то в случае $D < 0$ мы имеем решение $\psi \sim \theta^4$. Это означает, что потенциал ψ отличен от нуля лишь на конечном отрезке, причем вблизи конца отрезка плавно переходит в $\psi = 0$ (см. рис. 3).

В случае $D < 0$ солитон также существует и при $\lambda < 1/2$ (см. рис. 2), то есть при скоростях, когда обычный солитон существовать не может. Он имеет те же особенности, что описаны выше.

Литература

1. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез **1** (1961), 82.
2. I. B. Bernstein, J. M. Green, M. D. Kruskal, Phys. Rev. **108** (1957), 546.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова