ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И КВАЗИСРЕДНИЕ БОГОЛЮБОВА

Д. В. Перегудов

Аннотация. В настоящей работе метод эффективного потенциала, который используется в квантовой теории поля при изучении спонтанного нарушения симметрии, рассматривается с точки зрения процедуры квазиусреднения Боголюбова. Показано, что метод эффективного потенциала является замаскированным вариантом этой процедуры. Обсуждается подход к проблеме фазовых переходов с использованием теории катастроф. С микроскопической точки зрения обосновано существование используемых в таком подходе потенциалов. Показано, что в случае нарушенной симметрии невыпуклый эффективный потенциал не является преобразованием Лежандра от производящего функционала связных функций Грина. Вместо этого он является частью потенциала, используемого в теории катастроф. Связь эффективного потенциала с преобразованием Лежандра от производящего функционала связных функций Грина определяется правилом Максвелла. Приведена корректная формулировка для вычисления квазисредних в методе эффективного потенциала

1. Введение

Квантовая теория поля и статистическая механика представляют собой два раздела теоретической физики, в которых мы встречаемся со спонтанным нарушением симметрии. Однако, несмотря на близость задач и общий источник этого явления (бесконечное число степеней свободы у системы), теория поля и статистическая механика используют совершенно разные методы его изучения. Со времен работы Коулмана и Вайнберга [1] основным средством изучения спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля служит метод эффективного потенциала, тогда как в статистической механике пользуются процедурой квазиусреднения, предложенной Боголюбовым [2]. Настоящая работа посвящена в основном установлению соответствия между этими двумя методами. Ее содержание составляют три основных идеи.

Во-первых, метод эффективного потенциала рассматривается с точки зрения процедуры квазиусреднения. Показано, что метод эффективного потенциала является замаскированным вариантом этой процедуры. Такое понимание позволяет пролить свет на некоторые аспекты метода эффективного потенциала, которые остаются недостаточно ясными при стандартном изложении [1,3]. В частности, нарушение симметрии обычно связывают с невыпуклым по “классическому полю” эффективным потенциалом, имеющим “нетривиальные” минимумы, однако аналогичная функция в статистической механике (скажем, свободная энергия) выпукла по соответствующей термодинамической переменной [4,5]. Экстремальные

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

свойства эффективного потенциала (см. раздел 2) также фактически вводятся как дополнительное предположение.

Во-вторых, с помощью теоремы о максимальном слагаемом статсуммы обосновывается существование потенциала, который используется при применении методов теории катастроф к исследованию фазовых переходов (для краткости будем называть его “катастрофическим”). Оказывается, что он имеет замечательную структуру и по существу определяется некоторой функцией “параметров порядка”.

В-третьих, мы считаем, вопреки Иона-Лазинио [6], что эффективный потенциал, если его определить как производящий функционал сильно связных функций Грина, не является преобразованием Лежандра от производящего функционала связных функций Грина для теории с нарушенной симметрией. Вместо этого он является частью “катастрофического” потенциала и связан с преобразованием Лежандра от производящего функционала связных функций Грина правилом Максвелла.

Несколько слов о структуре работы. В разделе 2 мы приводим стандартное изложение метода эффективного потенциала. В нескольких комментариях в конце этого раздела указывается на “белые”, с нашей точки зрения, пятна в стандартном изложении. Раздел 3 посвящен качественному рассмотрению модели $\lambda\phi^4$ с точки зрения метода квазисредних. Здесь же приводится сравнительный анализ методов эффективного потенциала и квазиусреднения и устанавливается их тождественность. В разделе 4 кратко излагается подход теории катастроф, и, с помощью теоремы о максимальном слагаемом статсуммы, обосновывается существование “катастрофического” потенциала. Дальнейший анализ приводит к обоснованию правила Максвелла. В разделе 5 выясняется связь эффективного потенциала с производящим функционалом связных функций Грина. Приведена формула для вычисления квазисреднего в методе эффективного потенциала. Раздел 6 содержит пример явно решаемой задачи статистической механики, который иллюстрирует качественные рассмотрения предыдущих разделов. Наконец, в разделе 7 кратко сформулированы основные результаты работы.

2. Соображения, которые обычно приводят в теории поля в связи с методом эффективного потенциала

Поскольку нам придется неоднократно апеллировать к тем или иным аспектам метода эффективного потенциала, приведем его стандартное изложение. В качестве такового используем почти дословный перевод отрывка оригинальной работы Коулмана и Вайнберга [1] (оно практически не менялось, сравни [3]). Хотя авторы не выписывают лагранжиана явно, будем держать “в уме” теорию $\lambda\phi^4$ с “неправильным” знаком массового члена:

$$L = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{1}$$

Итак, стандартное изложение.

Для удобства обозначений ограничимся теорией единственного скалярного поля ϕ, динамика которого описывается лагранжианом $L(\phi, \partial_\mu\phi)$. Давайте рассмотрим эффекты добавления к лагранжиану члена взаимодействия ϕ с внешним источником J, c-числовой функцией пространства и времени:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) \to L + J(x)\phi(x).$$

Соответствующий производящий функционал $W(J)$ определяется через амплитуду перехода из вакуума далекого прошлого в вакуум далекого будущего в присутствии источника $J(x)$:

$$e^{iW(J)} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J.$$

Мы можем разложить W в функциональный ряд Тейлора

$$W = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, G^{(n)}(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n).$$

Хорошо известно, что коэффициенты этого ряда есть *связные функции Грина*, $G^{(n)}$ — это сумма всех связных диаграмм Фейнмана с n внешними линиями.

Классическое поле ϕ_c определяется равенством

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \phi(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}.$$

Эффективное действие $\Gamma(\phi_c)$ определяется функциональным преобразованием Лежандра

$$\Gamma(\phi_c) = W(J) - \int d^4x \, J(x) \phi_c(x).$$

Из этого определения прямо следует, что

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -J(x).$$

Это уравнение окажется решающим для изучения спонтанного нарушения симметрии. Эффективное действие можно разложить аналогично W:

$$\Gamma = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n).$$

Можно показать, что коэффициенты этого ряда являются *одночастично неприводимыми функциями Грина.* Имеется альтернативный путь разложить эффективное действие: вместо разложения по степеням ϕ_c можно разложить по степеням импульса (в точке, где все внешние импульсы равны нулю). В координатном пространстве это выглядит как

$$\Gamma = \int d^4x \, [-V(\phi_c) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi_c)^2 Z(\phi_c) + \dots].$$

$V(\phi_c)$ — обычная функция, не функционал — называется эффективным потенциалом. Сравнивая два приведенных разложения, легко видеть, что n-ая производная от V равна сумме всех сильно связных диаграмм с n нулевыми внешними импульсами. В древесном приближении V равен просто обычному потенциалу, сумме всех членов лагранжиана без производных, взятой с обратным знаком.

Теперь мы готовы применить этот аппарат к изучению спонтанного нарушения симметрии. Давайте предположим, что лагранжиан обладает внутренней симметрией, для простоты пусть это будет преобразование $\phi \to -\phi$. Тогда спонтанное нарушение симметрии появляется, если квантовое поле ϕ приобретает ненулевое вакуумное среднее значение, даже когда источник $J(x)$ равен нулю. Это случается, когда

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_c} = 0$$

для некоторого ненулевого ϕ_c. Далее, поскольку мы обычно интересуемся только случаем, когда вакуумное среднее трансляционно инвариантно, мы можем переписать это в виде

$$\frac{dV}{d\phi_c} = 0$$

для некоторого ненулевого ϕ_c. Значение ϕ_c, для которого это уравнение выполняется, — это среднее значение ϕ в новом (асимметричном) вакууме. Легко видеть, что требование стабильности относительно малых возмущений приводит к тому, что ϕ_c должно быть минимумом потенциала.

Сделаем несколько комментариев к стандартному изложению. Совершенно непонятно, зачем вводить члены с источником, да еще зависящим от координат. Неясен мотив для выбора именно такой операторной структуры этих членов. Ничем не мотивирован переход от W к Γ, при этом о W начисто забывают и даже никогда не пытаются восстановить. Спонтанное нарушение симметрии обычно связывают с невыпуклым эффективным потенциалом V, имеющим “нетривиальные минимумы” (рис. 1), тогда как преобразование Лежандра определено для выпуклых функций и переводит их опять-таки в выпуклые. Замечание о том, что ϕ_c должно быть *минимумом* потенциала является скорее благим пожеланием, нежели следствием какого-то осмысленного принципа.

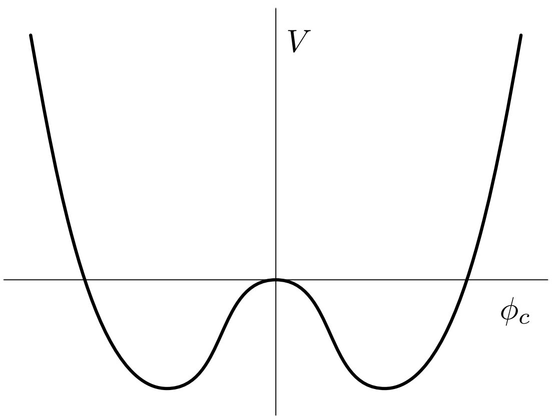

Рис. 1. Невыпуклый эффективный потенциал

Как будет видно из дальнейшего, положение проясняется, если мы рассмотрим проблему с точки зрения метода квазисредних.

3. Метод квазисредних

Посмотрим теперь на теорию, описываемую лагранжианом (1), с точки зрения метода квазисредних. Чтобы избежать мнимостей и подчеркнуть сходство со статистической механикой, будем рассматривать евклидову теорию. Прежде всего мы замечаем, что лагранжиан обладает симметрией относительно преобразования $\phi \to -\phi$. Этим обеспечивается равенство нулю среднего

$$\langle\phi(x)\rangle = \frac{\int \exp\left\{\int L(y)\,d^4y\right\}\phi(x)\,\mathcal{D}\phi}{\int \exp\left\{\int L(y)\,d^4y\right\}\mathcal{D}\phi}.$$

Однако, из-за "неправильного" знака массового члена в теории возникает спонтанное нарушение симметрии, поэтому нужно вычислять не обычные средние, а квазисредние. Технически квазиусреднение можно произвести, введя в лагранжиан слагаемые, нарушающие симметрию. В данном случае проще всего выбрать их в форме $J\phi(x)$ (J не зависит от x. Трансляционная инвариантность не нарушена, и квазисредние не зависят от x.) Квазисреднее $\prec\phi(x)\succ$ определяется тогда выражением

$$\prec\phi(x)\succ = \lim_{J\to 0}\frac{\int \exp\left\{\int (L(y)+J\phi(y))\,d^4y\right\}\phi(x)\,\mathcal{D}\phi}{\int \exp\left\{\int (L(y)+J\phi(y))\,d^4y\right\}\mathcal{D}\phi}.$$

Предел $J \to 0$ нуждается в некотором пояснении, к которому мы сейчас перейдем. Отметим прежде всего, что можно записать $\prec\phi(x)\succ$ как

$$\prec\phi(x)\succ = \lim_{J\to 0}\frac{dF(J)}{dJ}, \tag{2}$$

где

$$F(J) = \tfrac{1}{\Omega}\ln\int \exp\left\{\int (L(y)+J\phi(y))\,d^4y\right\}\mathcal{D}\phi$$

(Ω — четырехмерный объем) аналогична W в методе эффективного потенциала. Отметим некоторые свойства $F(J)$. Во-первых, $F(-J) = F(J)$. Это напоминание о былой симметрии $\phi \to -\phi$. Во-вторых, по крайней мере формально, $F(J)$ — выпуклая функция [4,5]. Далее, мы ожидаем, что dF/dJ конечна при $J \to 0$. Это можно совместить с четностью $F(J)$, только если $F(J)$ имеет излом в нуле (типа $|J|$), выпуклость $F(J)$ говорит, что весь график лежит сверху от касательных в нуле (рис. 2). Таким образом, мы должны еще уточнить, с какой стороны $J \to 0$. Будем считать $J \to +0$, тогда квазисреднее однозначно определено. (Проблема с пределом "выключения" источника является общей для изложенного *способа* квазиусреднения, сравни, например, [4,7].)

Поскольку $F(J)$ выпукла, мы можем сделать преобразование Лежандра и определить фукнцию

$$G(\phi_c) = \max_J (J\phi_c - F(J)),$$

аналогичную Γ в методе эффективного потенциала. (Мы избегаем писать преобразование Лежандра в обычном виде, с производными, поскольку наши функции не везде дифференцируемы.) Ее график имеет характерный вид, показанный на рис. 3. В отличие от рис. 1 здесь нет "горба" между двумя минимумами, его

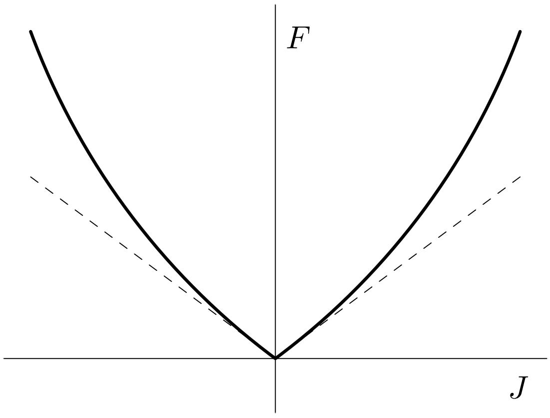

Рис. 2. Потенциал $F(J)$

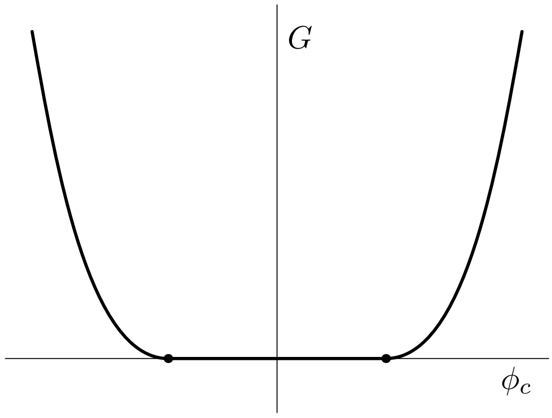

Рис. 3. Потенциал $G(\phi_c)$

заменяет линейный участок. Крайняя правая точка этого участка соответствует квазисреднему $\prec\phi(x)\succ$.

Мы в состоянии снять часть вопросов, поставленных ранее. Прежде всего, совершенно ясны смысл введения членов с источниками и выбор их операторной структуры — это диктуется симметрией исходной задачи. В отличие от метода эффективного потенциала преобразование симметрии явно фигурирует в изложении с самого начала. Зависящие от координат источники не нужны (по крайней мере до тех пор, пока мы не занимаемся проблемой кристаллического упорядочения), но их можно ввести, чтобы подчеркнуть аналогию с обычной теорией возмущений. То, что при этом возникает производящий функционал функций Грина, безусловно, вторично. Например, в модели Гросса-Неве

$$L = i\bar{\psi}\gamma\partial\psi + \tfrac{g^2}{2}(\bar{\psi}\psi)^2$$

при изучении спонтанного нарушения симметрии $\psi \to \gamma^5\psi$ возникает функционал

$$F[J] = \tfrac{1}{\Omega}\ln\int\exp\left\{\int\left(L(y) + J(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)\right)d^2y\right\}\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi,$$

который уже не является производящим функционалом функций Грина поля ψ. Далее, переход от $F(J)$ к $G(\phi_c)$ необязателен. Единственным оправданием в теории поля является более простое диаграммное представление для Γ, нежели для W (сильно связные диаграммы против связных). Прояснился и вопрос с преобразованием Лежандра, однако ценой отказа от уравнения $dV/d\phi_c = 0$. На самом деле, как уже говорилось во введении, с $F(J)$ связаны не один, а два функционала: выпуклый $G(\phi_c)$, преобразование Лежандра от $F(J)$, и невыпуклый эффективный потенциал, производящий функционал сильно связных функций Грина, связь которого с $F(J)$ нам пока неизвестна.

Таким образом, мы видим, что конструкции, используемые в методе эффективного потенциала на рецептурном уровне, возникают вполне естественно, если рассматривать проблему с точки зрения метода квазисредних. Иначе говоря, метод эффективного потенциала является замаскированной формой процедуры квазиусреднения.

Нам осталось выяснить отношение невыпуклого эффективного потенциала рис. 1 к потенциалам рис. 2 и 3. В следующем разделе мы рассмотрим фазовые переходы с точки зрения теории катастроф, что поможет решить эту проблему.

4. Подход теории катастроф

Изложим предположения, которые обычно — явно или неявно — используют, применяя аппарат теории катастроф к проблеме фазовых переходов [8]. Мы будем говорить о термодинамической системе, хотя те же соображения справедливы и для теорий поля.

Система описывается набором $2n$ термодинамических переменных, которые можно разделить на пары сопряженных переменных. В каждой паре одна из переменных аддитивная, а другая — неаддитивная. Будем обозначать их соответственно A и a. Так как для фиксации состояния системы достаточно только n переменных, то термодинамическая система определяется n-мерной поверхностью в $2n$-мерном пространстве с координатами (A, a). Считается, что уравнения этой поверхности могут быть получены из условия глобального минимума "катастрофического" потенциала — функции $U(A, a)$ — по отношению к аддитивным переменным A. Такая точка зрения весьма привлекательна, так как необходимое условие минимума $\partial U/\partial A = 0$ может дать уравнение состояния ван-дер-ваальсовского типа, а условие глобальной минимальности "исправляет" это уравнение по правилу Максвелла. На языке термодинамических потенциалов мы получаем связь невыпуклого ван-дер-ваальсовского потенциала с выпуклым истинным. Особая роль аддитивных переменных состоит в том, что обычно различные фазы различают именно по значениям аддитивных переменных, иначе говоря, предполагают, что поверхность, определяющая уравнения состояния, однозначно проецируется на плоскость аддитивных переменных.

[Небольшое отступление. На самом деле предположением здесь является лишь то, что уравнения состояния получаются из условия *глобального* минимума "катастрофического" потенциала. Все остальное следует из термодинамики [9]. Действительно, упомянутое выше $2n$-мерное пространство наделяется естественной симплектической структурой $dA \wedge da$. Первый и второй законы термодинамики требуют тогда, чтобы уравнения состояния системы соответствовали лагранжевой поверхности. Лагранжева же поверхность описывается производящей функцией $s(A)$ (термодинамическим потенциалом), так что ее уравнения имеют вид $a = \partial s/\partial A$. Определяя потенциал $U(A, a) = s(A) - Aa$, получаем, что уравнения состояния можно записать в виде $\partial U/\partial A = 0$.]

Оказывается, можно микроскопически обосновать существование функции U с такими свойствами. Ключом к обоснованию служит теорема о максимальном слагаемом статсуммы. В своем первоначальном виде теорема утверждает, что асимптотика $N \to \infty$ гиббсовской статистической суммы $Z(\theta) = \sum_n e^{-E_n/\theta}$ равна асимптотике $N \to \infty$ максимального слагаемого этой суммы, записанной как однократная сумма по энергии $Z(\theta) = \sum_E w(E) e^{-E/\theta}$. Нетрудно, однако, переформулировать теорему для случая любых двух сопряженных переменных. Рассмотрим с этой точки зрения модель $\lambda\phi^4$. Имеем

$$
\begin{aligned}
e^{\Omega F(J)} &= \int \exp\left\{\int (L(y) + J\phi(y))\, d^4y\right\} \mathcal{D}\phi = \\
&= \int \exp\left\{\int (L(y) + J\phi(y))\, d^4y\right\} \int d\phi_c\, \delta\big(\phi_c - \tfrac{1}{\Omega}\int \phi(x) d^4x\big)\, \mathcal{D}\phi = \\
&= \int d\phi_c\, e^{\Omega J\phi_c} \int \exp\left\{\int L(y)\, d^4y\right\} \delta\big(\phi_c - \tfrac{1}{\Omega}\int \phi(x) d^4x\big)\, \mathcal{D}\phi = \\
&= \int d\phi_c\, e^{\Omega(J\phi_c - K(\phi_c))}.
\end{aligned}
$$

Здесь
$$K(\phi_c) = -\tfrac{1}{\Omega}\ln\int\exp\left\{\int L(y)\,d^4y\right\}\delta\big(\phi_c - \tfrac{1}{\Omega}\int\phi(x)d^4x\big)\,\mathcal{D}\phi.$$
Асимптотика $\Omega\to\infty$ вычисляется методом перевала

$$F(J) = \max_{\phi_c}(J\phi_c - K(\phi_c)). \tag{3}$$

Последнее равенство и есть теорема о максимальном слагаемом, приспособленная для нашего случая. Подчеркнем еще раз, что максимум в формуле (3) является глобальным. Это вытекает из вычисления термодинамической асимптотики интеграла методом перевала, причем поведение функции $J\phi_c - K(\phi_c)$ вблизи максимума абсолютно не влияет на термодинамическую асимптотику. Поэтому подобным же образом можно вычислить $F(J)$ в случае многих переменных состояния.

Хотя формула для $F(J)$ очень похожа на преобразование Лежандра, а $K(\phi_c)$ выглядит как термодинамический потенциал при фиксированном ϕ_c, это лишь формальная аналогия. В частности, $K(\phi_c)$ может быть невыпуклым. Более того, для системы с нарушенной симметрией $K(\phi_c)$ должен быть невыпуклым. Действительно, в пределе $J\to+0$ максимум в формуле (3) должен достигаться при ненулевом ϕ_c, что возможно только при невыпуклом $K(\phi_c)$, типа показанного на рис. 1.

Замечательно, что формула (3) согласована с условием выпуклости $F(J)$. Действительно, используя неравенство $\max_x f(x) + \max_x g(x) \geqslant \max_x[f(x)+g(x)]$, получим

$$\frac{F(J_1)+F(J_2)}{2} = \frac{1}{2}\max_{\phi_c}[J_1\phi_c - K(\phi_c)] + \frac{1}{2}\max_{\phi_c}[J_2\phi_c - K(\phi_c)] \geqslant$$
$$\geqslant \max_{\phi_c}\left[\frac{J_1+J_2}{2}\phi_c - K(\phi_c)\right] = F\left(\frac{J_1+J_2}{2}\right).$$

Таким образом, связь ϕ_c с J (то есть уравнение состояния) определяется из условия глобального минимума по ϕ_c "катастрофического" потенциала

$$U(\phi_c, J) = K(\phi_c) - J\phi_c.$$

Вследствие невыпуклости $K(\phi_c)$ необходимое условие экстремума $\partial U/\partial\phi_c = 0$ определяет на плоскости (ϕ_c, J) кривую со складкой (рис. 4). Рассмотрим вопрос об определении глобального минимума. Для участков кривой до точки 1 и после точки 4 все очевидно: при фиксированном J имеется один минимум $U(\phi_c, J)$ по ϕ_c, он же глобальный. В диапазоне $(J(1), J(2))$ имеется три экстремума для каждого J: два минимума (на кривых 1–2 и 3–4) и максимум (на кривой 2–3). Чтобы выяснить, какой из минимумов — A или B — является глобальным, вычислим разность $U(B) - U(A)$. На кривой AB имеем $\partial U/\partial\phi_c = 0$ и $\partial U/\partial J = -\phi_c$, поэтому

$$U(B) - U(A) = \int_{AB}\frac{\partial U}{\partial\phi_c}\,d\phi_c + \frac{\partial U}{\partial J}\,dJ = -\int_{AB}\phi_c\,dJ =$$
$$= -(\phi_c(B) - \phi_c(A))J(A) + \int_{AB} J\,d\phi_c.$$

Глобальный минимум перескакивает с 1–2 на 3–4 (или обратно) при $J(A)$, удовлетворяющем уравнению

$$(\phi_c(B) - \phi_c(A))J(A) = \int_{AB} J\, d\phi_c.$$

Нетрудно видеть, что это как раз правило Максвелла. Теперь мы восстановим термодинамический потенциал, зависящий от ϕ_c, интегрированием уравнения состояния один раз вдоль исходной кривой, а второй — вдоль достроенной по правилу Максвелла. Очевидно, в первом случае мы получим $K(\phi_c)$, а во втором — $G(\phi_c)$ (рис. 5). Иначе говоря, связь $K(\phi_c)$ с $G(\phi_c)$ или правило Максвелла, переформулированное на языке потенциалов, звучит так: невыпуклый потенциал нужно достроить прямолинейным участком. Этот участок можно построить, просто приложив к графику потенциала линейку, касательную к нему в двух точках.

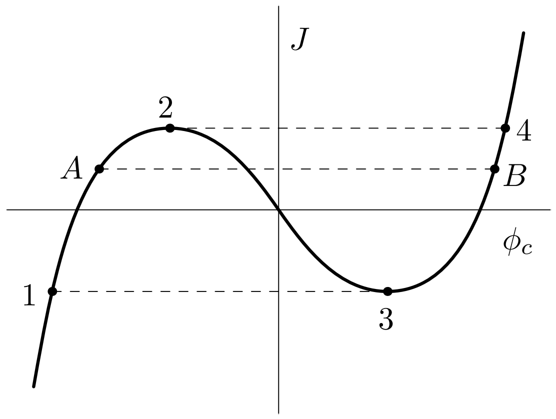

Рис. 4. Правило Максвелла для уравнения состояния

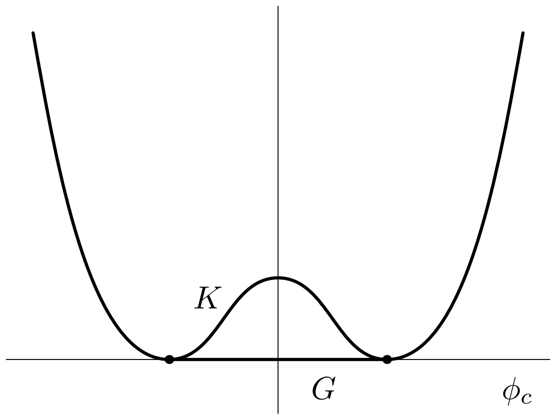

Рис. 5. Правило Максвелла для потенциалов

5. Невыпуклые потенциалы

Рассуждения предыдущего раздела кажутся на первый взгляд не связанными с основной темой работы. Однако мы видели, что в них естественно возникает потенциал $K(\phi_c)$, который не обязательно является выпуклой функцией. Мы утверждаем, что $K(\phi_c)$ как раз и есть эффективный потенциал. Иначе говоря, мы собираемся показать, что $K(\phi_c)$ равен сумме всех сильно связных диаграмм с нулевыми внешними импульсами.

Рассмотрим функциональный интеграл, логарифм которого равен $K(\phi_c)$:

$$e^{-\Omega K(\phi_c)} = \int \exp\left\{\int L(y)\, d^4y\right\} \delta\big(\phi_c - \tfrac{1}{\Omega}\int \phi(x) d^4x\big)\, \mathcal{D}\phi.$$

Перейдем к импульсному представлению поля $\phi(x)$: $\phi(x) = \sum_k e^{ikx}\tilde{\phi}(k)$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{-\Omega K(\phi_c)} &= \int \exp\left\{\int L(y)\, d^4y\right\} \delta(\phi_c - \tilde{\phi}(0)) \textstyle\prod_k d\tilde{\phi}(k) = \\ &= \int \exp\left\{\int L'(y)\, d^4y\right\} \textstyle\prod_{k\neq 0} d\tilde{\phi}(k). \end{aligned}$$

Разложение в ряд теории возмущений дает всевозможные диаграммы с нулевыми внешними импульсами. Отличие этих диаграмм от обычных состоит в том, что во всех внутренних линиях стоят ненулевые импульсы. Легко понять, что такие диаграммы не могут содержать связных, но не сильно связных частей: внутренняя линия, соединяющая две сильно связных части такой диаграммы, неминуемо несла бы нулевой импульс. Когда мы вычисляем логарифм, несвязные диаграммы удаляются обычным образом, и остаются только сильно связные.

Итак, $K(\phi_c)$ — эффективный потенциал. Мы уже знаем, как он связан с $F(J)$. Связь определяется формулой (3). Потенциалы $F(J)$ и $G(\phi_c)$ связаны преобразованием Лежандра. В случае ненарушенной симметрии потенциал $K(\phi_c)$ выпуклый и формула (3) переходит в преобразование Лежандра, при этом $K(\phi_c)$ совпадает с $G(\phi_c)$. В случае нарушенной симметрии потенциал $K(\phi_c)$ невыпуклый и формула (3) не является преобразованием Лежандра. Потенциалы $K(\phi_c)$ и $G(\phi_c)$ не совпадают, их связь в этом случае определяется правилом Максвелла.

Выпишем уравнение для определения квазисреднего $\prec\phi(x)\succ$ методом эффективного потенциала. Собирая вместе (2) и (3), находим

$$\prec\phi(x)\succ = -\lim_{J\to+0}\frac{d}{dJ}\min_{\phi_c}[K(\phi_c) - J\phi_c]. \tag{4}$$

Допуская некоторую вольность с порядком действий, можно сказать, что квазисреднее определяется из условия *глобального минимума* $K(\phi_c)$. Более аккуратное определение (4) не только выбирает один из симметричных минимумов (как на рис. 1), но и помогает в ситуациях, подобных той, что изображена на рис. 6.

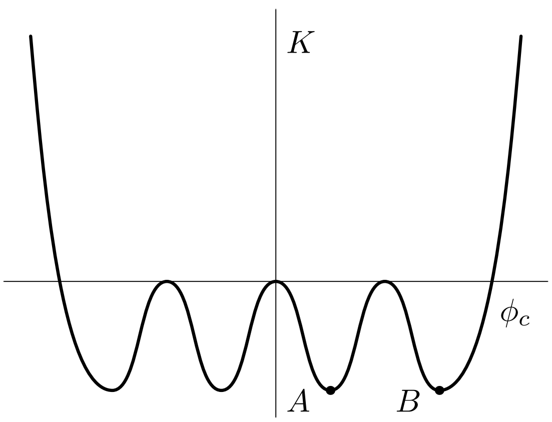

Рис. 6. Какой из минимумов — A или B — выберет система?

5. Модель Изинга в приближении Брегга-Вильямса

До сих пор изложение носило качественный характер. В этом разделе мы собираемся подкрепить наши рассуждения явно решаемым примером из статистической механики [10].

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = -\frac{I}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j,$$

где σ_i принимает значения ± 1, а множитель $1/N$ введен для правильного термодинамического предела. Гамильтониан имеет симметрию $\sigma \to -\sigma$, которая обеспечивает равенство нулю среднего

$$\langle \sigma_i \rangle = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/\theta} \sigma_i \Big/ \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/\theta}.$$

Однако, по крайней мере при нулевой температуре, состояние $\sigma_i = 1$, $i = 1, \ldots N$ энергетически выгоднее, чем разупорядоченное состояние $\langle \sigma_i \rangle = 0$ (мы считаем $I > 0$). Стало быть, нужно вычислять квазисредние. Для этого введем в гамильтониан члены, нарушающие симметрию

$$\tilde{H} = H - h \sum_i \sigma_i,$$

и будем вычислять статсумму

$$Z(h) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\tilde{H}/\theta} = \sum_{\{\sigma\}} e^{N(IL^2/2 + hL)/\theta},$$

где $L = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$. Представим Z в виде однократной суммы

$$Z(h) = \sum_{\{\sigma\}} e^{N(IL^2/2 + hL)/\theta} \sum_x \delta_{x,L} = \sum_x e^{Nhx/\theta} \tilde{Z}(x),$$

где $\tilde{Z}(x) = e^{NIx^2/2\theta} \sum_{\{\sigma\}} \delta_{x,L}$. (Тот же прием вставки δ-функции мы использовали для теории $\lambda\phi^4$.) В нашей модельной задаче $\tilde{Z}(x)$ вычисляется явно

$$\tilde{Z}(x) = \frac{N!}{\left(\frac{1+x}{2}N\right)! \left(\frac{1-x}{2}N\right)!} e^{NIx^2/2\theta}.$$

В пределе $N \to \infty$

$$K(x) = -\frac{\theta}{N} \ln \tilde{Z}(x) \to -Ix^2/2 + \theta \frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} + \theta \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2}.$$

Ниже критической температуры (равной I) функция $K(x)$ не является выпуклой и имеет вид, подобный показанному на рис. 1 (с поправкой на то, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$). Это эффективный потенциал модели. Свободная энергия $F = -\frac{\theta}{N} \ln Z$ вычисляется по теореме о максимальном слагаемом $F(h) = \min_x U(x,h)$, где "катастрофический" потенциал $U(x,h)$ определяется выражением

$$U(x,h) = K(x) - hx.$$

Необходимое условие минимума $\partial U(x,h)/\partial x = 0$, которое в явном виде гласит

$$x = \operatorname{th} \left(\frac{I}{\theta} x + \frac{h}{\theta} \right),$$

при $\theta < I$ определяет на плоскости (x,h) кривую со складкой, которую условие глобального минимума превращает в кривую с изломом (рис. 4). Интегрирование этого уравнения состояния дает потенциалы F и G видов, показанных на рис. 2 и 3 (опять же с поправкой на ограниченность x). Формула (4) говорит нам, что квазисреднее $\prec \sigma_i \succ$ равно координате правого минимума $K(x)$.

6. Заключение

Сформулируем кратко результаты работы.

Метод эффективного потенциала рассмотрен с точки зрения метода квазисредних. Выяснено, что он является замаскированной процедурой квазиусреднения.

Показано существование “катастрофического” потенциала $U(A,a)$ (A — аддитивные, a — неаддитивные термодинамические переменные), такого что уравнения состояния системы получаются из условия глобального минимума этого потенциала по переменным A. Микроскопически обосновано правило Максвелла для уравнений состояния, сформулировано правило Максвелла для термодинамических потенциалов.

Выяснен смысл невыпуклых эффективных потенциалов в теории поля. Они являются значениями при $a = 0$ “катастрофических” потенциалов. Эффективный потенциал является преобразованием Лежандра производящего функционала связных функций Грина только в случае ненарушенной симметрии. Получена формула для вычисления квазисредних методом эффективного потенциала.

Сделаем несколько замечаний.

Потенциалы типа рис. 2 и рис. 3 известны в статистической механике [10]. Выпуклость эффективного потенциала и проблема преобразования Лежандра обсуждались и ранее, например, в работе [11]. Прием вставки δ-функции можно найти в §147 книги [12]. Насколько нам известно, ни связь эффективного потенциала с методом квазисредних, ни связь теоремы о максимальном слагаемом статсуммы с подходом теории катастроф ранее не обсуждались. Также, по-видимому, впервые отмечено, что эффективный потенциал не является, вообще говоря, преобразованием Лежандра производящего функционала связных функций Грина.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить В. П. Маслова за обсуждение работы и полезные замечания.

Литература

1. S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7** (1973), 1888–1910.
2. Н. Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, Препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.
3. К. Хуанг, *Кварки, лептоны и калибровочные поля*, М. Мир, 1985.
4. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, М. Наука, 1984.
5. Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский, *Математические методы статистической механики модельных систем*, М. Наука, 1989.
6. G. Jona-Lasinio, Nuovo Cim. **34** (1964), 1790–1795.
7. Н. Н. Боголюбов (мл.), *Метод исследования модельных гамильтонианов*, М. Наука, 1974.
8. Р. Гилмор, *Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах*, М. Мир, 1984.
9. В. П. Маслов, Функциональный анализ **28** (1994), no. 4, 28–41.
10. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, М. Мир, 1973.
11. S. Norimatsu, K. Yamamoto, A. Tanaka, Phys. Rev. **D35** (1987), 2009–2012.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1 (Теоретическая физика, т. 5)*, М. Наука, 1976.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

117454, Проспект Вернадского, 78, Москва, Россия