ПОЛЯ ЯНГА—МИЛЛСА С ВНЕШНИМ ТОКОМ

А. С. Вшивцев и Д. В. Перегудов

Аннотация. В работе рассмотрена процедура квантования неабелевой калибровочной теории с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + J^\mu_a V^a_\mu$$

вблизи нетривиального классического решения. Проведена классификация теорий по внешнему току. Построен и исследован глюонный пропагатор в модельном сферически симметричном неабелевом поле.

1. Введение.

Работа посвящена применению метода канонического квантования к одной частной модели теории поля. Метод канонического квантования был впервые сформулирован Дираком в 1925 г. [1]. В 1950 г. [2] Дирак распространил его на теории со связями, заложив основы так называемого обобщенного гамильтонова формализма. После появления неабелевых калибровочных теорий в 1954 г. [3] метод нашел себе нетривиальное применение. Хотя уже в 1967 г. Фаддеев и Попов [4] указали вид производящего функционала функций Грина для полей Янга—Миллса, только в 1969 г. Фаддеев [5] внес полную ясность, рассмотрев проблему с гамильтоновой точки зрения. Изложению современного понимания метода канонического квантования посвящена книга [6].

С идейной стороны предлагаемая работа близка к работам по квантованию калибровочных теорий в окрестности внешних полей различной конфигурации. Первой по праву следует назвать работу Саввиди [7] (с добавлениями Нильсена и Олесена [8], см. также Скалозуба [9]). Позднее были предложены другие внешние поля [10], в частности, так называемое поле “3λ” (см., например, [11], где рассматривается теория при ненулевой температуре). Отличительной особенностью этих полей является то, что они не удовлетворяют уравнениям Янга—Миллса, поэтому каноническая процедура построения теории возмущений на фоне внешнего поля неприменима. Браун и Вайсбергер [10] первыми написали модифицированный лагранжиан поля Янга—Миллса с внешним током. В качестве исходного пункта при построении теории такой лагранжиан рассматривали Кабо и Шабад [12]. В настоящей работе подробно анализируется гамильтонова структура теории с внешним

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. В. Тютину за полезные замечания и обсуждение, а также А. А. Славнову, В. Ч. Жуковскому и В. В. Владимирскому за внимание к работе.

током. Оказывается, что безобидный на первый взгляд лагранжиан приводит (в зависимости от структуры внешнего тока) к четырем разным гамильтоновым теориям, которые различаются, помимо прочего, по числу физических степеней свободы. В настоящей работе наиболее подробно исследованы неабелевы внешние поля без нулевой компоненты (к этому типу относится поле “3λ”).

Квантование калибровочной теории в окрестности внешнего поля, являющегося решением классических уравнений Янга—Миллса:

$$\nabla_\mu^{ab} F_b^{\mu\nu} = 0,$$

было подробно рассмотрено в работе Арефьевой, Славнова и Фаддеева [17]. Подчеркнем еще раз, что целью нашей работы является квантование калибровочной теории в окрестности внешнего поля, удовлетворяющего классическим уравнениям Янга—Миллса с ненулевым током:

$$\nabla_\mu^{ab} F_b^{\mu\nu} = -J_a^\nu.$$

Обычно в теории поля КЭД те или иные конфигурации полей полностью характеризовались двумя инвариантами $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ (где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}$), при этом сами поля удовлетворяли уравнениям Максвелла, в правой части которых мог быть ток J. (На него накладывалось условие непрерывности, отвечающее сохранению заряда системы). Так как в КЭД любой ток можно задать “руками”, то проблемы с конструированием полей не возникало и считалось, что любые поля могут быть смоделированы. Это первое обстоятельство, которое существенным образом отличает КЭД от КХД, где задача моделирования полей не столь тривиальна, так как мы пока (а может и вообще, в силу гипотезы конфайнмента) не можем задавать токи в правой части уравнений Янга—Миллса, а соответственно и конфигурации полей. Другим не менее важным обстоятельством является существование девяти инвариантов в теории Янга—Миллса [10,13,14], которые, как будет показано в настоящей работе, не только не фиксируют структуры поля (ввиду неоднозначности Ву и Янга [15]), но и, отвечая решениям уравнений Янга—Миллса с током в правой части, могут относится к разным калибровочно-неэквивалентным физическим теориям. Последнее обстоятельство весьма важно, так как ставит вопрос о том, какова физическая реализация, отвечающая той или иной конфигурации неабелева поля. Ответ на этот вопрос лежит не в задании вектор-потенциалов поля, а в точном указании (предъявлении) полного лагранжиана, в рамках которого эти конфигурации полей возникают в качестве решений классических полевых уравнений движения. Решение поставленной задачи может быть осуществлено проведением процедуры канонического квантования одной из моделей теории поля с током.

В работе рассматривается модель векторного поля $V_\mu^a(x)$ с лагранжианом (см. [12]):

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + J_\mu^a V_a^\mu, \qquad a = 1,2,3, \tag{$*$}$$

где $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a + g\varepsilon_{abc}V_\mu^b V_\nu^c$. Рассматривается проблема квантования указанной модели во внешнем поле, то есть вблизи нетривиального решения $A_\mu^a(x)$ классических лагранжевых уравнений. Ток J связан с полем A равенством:

$$\bar{\nabla}_\mu^{ab}\, \bar{F}_b^{\mu\nu} = -J_a^\nu.$$

(В величинах с чертой буква V заменена на букву A).

Целями настоящей работы являются:

(1) проведение процедуры последовательного квантования модели (*),
(2) исследование свойств глюонных пропагаторов в поле “3λ”.

Несколько слов о дальнейшем изложении. Раздел 2 посвящен построению обобщенного гамильтонова формализма для модели (*). При этом естественно возникает классификация теорий по внешнему току, включающая четыре случая. Для одного из них (назовем его “простым”, подробнее смотри пункт 2a) произведено тщательное построение гамильтонова формализма, для остальных приведены лишь результаты.

“Простой” случай подвергнут квантованию в разделе 3. Там приведен анализ свободной теории, явно построены для нее физические переменные. Получено выражение для производящего функционала функций Грина.

В разделе 4 этот производящий функционал раскладывается по теории возмущений. Решаются (в общем виде) уравнения для пропагаторов. Явному вычислению пропагаторов в поле “3λ” посвящен раздел 5.

Обозначения. Одно обозначение уже было использовано — это буквы с чертой наверху, что означает замену поля V на внешнее поле A. Наряду с полными обозначениями (типа V^a_μ) широко используются сокращенные, в которых опущены изотопические индексы (V_μ, $F_{\mu\nu}$, …). Изотопические векторы и изотопические операторы различаются по контексту. Так, записи $\overline{\nabla}^\mu_{ab}\,\xi^b_\mu$ соответствует просто $\overline{\nabla}^\mu\,\xi_\mu$, “скалярному произведению” $\xi_a\,\mathrm{M}_{ab}\,\eta_b$ — запись $\xi\,\mathrm{M}\,\eta$. Принято специальное обозначение для операторов, соответствующих векторам — они обозначаются шляпками:

$$(\hat{A})_{ab} = g\varepsilon_{acb}A_c.$$

Некоторые конкретные равенства:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \hat{V}_\mu, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + \hat{V}_\mu V_\nu.$$

Для операторов умножения:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \widehat{(\hat{A}B)}.$$

Все операторы (даже интегральные) записываются как операторы умножения.

2. Обобщенный гамильтонов формализм.

а) Обобщенный гамильтонов формализм в (“простом”) случае $J_0 = 0$, $\partial_0 J_k = 0$, $J^a_k \neq J_k l^a$. Будем строить для модели (*) гамильтонов формализм в соответствии с [6]. Как известно, для этого нужно ввести сопряженные к V^a_μ переменные E^b_ν, то есть задать фундаментальные скобки Пуассона:

$$\left\{E^a_\mu(\mathbf{x},t), V^b_\nu(\mathbf{y},t)\right\} = g_{\mu\nu}\delta^{ab}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Исключение скоростей $\dot{V}^a_\mu$ производится при помощи равенств

$$E^a_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{V}^\mu_a}.$$

Дифференцирование дает:

$$\begin{cases} E_k = F_{k0} = \nabla_k V_0 - \dot{V}_k \\ E_0 = 0. \end{cases}$$

Верхние равенства позволяют исключить скорости $\dot{V}_k^a$, нижние представляют собой первичные связи: $\varphi = E_0$.

Гамильтониан определим равенством:

$$H = \int d^3x \left(E_\mu \dot{V}^\mu - L \right) \Big|_{\varphi=0} = \int d^3x \left\{ \frac{E^2 + B^2}{2} - J_\mu V^\mu - V_0 (\nabla^k E_k) \right\},$$

где $E^2 = -E_k E^k$, $B^2 = \frac{1}{2} F_{kn} F^{kn}$. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \{H, \eta\} + \int d^3x \, u_a(x) \, \{\varphi_a(x), \eta\} \\ \varphi = 0, \end{cases}$$

где $u_a(x)$ — неопределенные функции. С помощью обобщенного гамильтониана $H^* = H + \int d^3x \, u_a \varphi_a$ уравнения движения можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \{H^*, \eta\} \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения порождают ряд условий непротиворечивости, когда мы приравниваем нулю производные $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ и т. д. Такие условия интерпретируются как вторичные связи. Выявим их.

$$\{H^*, \varphi\} = \nabla^k E_k = \chi$$

Очевидно, χ — новые связи. Их простой вид обусловлен требованием $J_0 = 0$.

$$\{H^*, \chi\} = \nabla^k J_k + (\widehat{\nabla^k E_k}) V_0.$$

Новые связи $\psi = \nabla_k J^k$. Они независимы в силу условия $J_\mu^a \neq J_\mu l^a$.

$$\{H^*, \psi\} = -\hat{J}_k (\nabla^k V_0 - E^k) = -\omega.$$
$$\{H^*, \omega\} = (\hat{J}_k \nabla^k) u + (\text{что-то от } E \text{ и } V).$$

Обозначим $\mathrm{M} = \hat{J}_k \nabla^k$ и предположим $\mathrm{Det}\,\mathrm{M} \neq 0$. Это естественное предположение (оно имеется уже у Кабо и Шабада [12]), так как M может оказаться необратимым лишь на множестве исключительных функций $V_\mu^a(x)$. При построении теории возмущений нужно только проследить, чтобы M был обратим при подстановке в него внешнего поля. Тогда условия $\{H^*, \omega\} = 0$ не порождают новых связей, но определяют все три коэффициента u_a. Отметим еще, что M симметричен в силу связей $\psi = 0$. Действительно:

$$\mathrm{M}^\dagger = \nabla^k \hat{J}_k = \hat{J}_k \nabla^k + (\widehat{\nabla_k J^k}) = \hat{J}_k \nabla^k + \hat{\psi} = \hat{J}_k \nabla^k = \mathrm{M}\,.$$

Итак, полная система связей:

$$\begin{cases} \varphi = E_0 \\ \chi = \nabla_k E^k \\ \psi = \nabla_k J^k \\ \omega = \hat{J}_k(\nabla^k V_0 - E^k). \end{cases}$$

Скобки Пуассона связей (обозначено $\Psi = \{\varphi, \chi, \psi, \omega\}$):

$$\{\Psi(\mathbf{x}, t), \Psi(\mathbf{y}, t)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{M}^\dagger(x) \\ 0 & ? & \mathrm{M}^\dagger(x) & ? \\ 0 & -\mathrm{M}(x) & 0 & ? \\ -\mathrm{M}(x) & ? & ? & ? \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

(здесь ? — несущественные для дальнейшего части). $\mathrm{Det}\{\Psi, \Psi\} = \mathrm{Det}^4\,\mathrm{M} \neq 0$, так что мы имеем дело со связями второго рода.

Оставим явную гамильтонизацию теории до раздела 3, а сейчас вспомним об условиях, наложенных с самого начала на ток J.

б) Классификация теорий по внешнему току. В пункте а) мы не обсуждали смысла наложенных на J условий, хотя было видно, что они играют значительную роль при построении формализма. Это построение осуществляется совершенно различным образом в зависимости от структуры тока, причем выделяются четыре случая.

Назовем ток $J^a_\mu(x)$ абелевым, если $J^a_\mu(x) = J_\mu(x) l^a(x)$, $l^2 = 1$.

Если $J^a_0(x) = 0$, будем говорить об отсутствии заряда.

Ниже приводится таблица, в которой указано “число связей первого рода” + “число связей второго рода” для всех четырех типов гамильтонова формализма.

ток	абелев	неабелев
с зарядом	2+6	0+10
без заряда	2+8	0+12

Сделаем несколько замечаний. Видно, что абелевость тока напрямую связана с “калибровочностью” теории, то есть наличием в ней связей первого рода (а значит и калибровочного произвола). Легко усмотреть, что бесконечно малые калибровочные преобразования описываются формулой $\delta V^a_\mu = \nabla^{ab}_\mu (l_b \delta\alpha)$ (α — параметр преобразования). Одновременно на ток оказывается наложено условие (непротиворечивости лагранжевых уравнений движения) $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Заряд же оказался связанным с числом физических степеней свободы (если в теории N степеней свободы, F связей первого рода и S связей второго рода, то число физических степеней свободы P вычисляется по формуле $P = N - F - S/2$). Если заряда нет, их шесть (как в “простом” случае), иначе — семь.

Поскольку условие $J_0 = 0$ не является лоренц-инвариантным, мы вынуждены признать, что, несмотря на формальную инвариантность лагранжиана, теория не является лоренц-инвариантной. Интересно также, что условие $J_0 = 0$ может выполняться только для пространственно-подобного тока, то есть для случая $J^1_\mu J^\mu_1 < 0$, $J^2_\mu J^\mu_2 < 0$, $J^3_\mu J^\mu_3 < 0$.

в) Обобщенный гамильтонов формализм в остальных случаях (результаты). В соответствие с пунктом б) имеются четыре типа гамильтонова формализма для модели (*). Один из них был подробно рассмотрен в пункте а). Не повторяя здесь всех рассуждений, приведем результаты построения гамильтонова формализма в остальных случаях (везде предполагается $\partial_0 J^a_\mu = 0$).

Неабелев ток с зарядом. Связи:

$$\begin{cases} \varphi = E_0 \\ \chi = \nabla^k E_k + J_0 \\ \psi = \nabla_\mu J^\mu \\ \omega = J_0 \hat{J}_k (\nabla^k V_0 - E^k). \end{cases}$$

Скобки Пуассона:

$$\{\Psi(\mathbf{x},t), \Psi(\mathbf{y},t)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{J}_0 & \mathrm{M}^\dagger J_0 \\ 0 & \hat{\chi} - \hat{J}_0 & \mathrm{M}^\dagger & ? \\ \hat{J}_0 & -\mathrm{M} & 0 & ? \\ -J_0 \mathrm{M} & ? & ? & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

$\mathrm{Det}\{\Psi,\Psi\}|_{\Psi=0} = \mathrm{Det}^4 \mathrm{M}^*$, где $\mathrm{M}^* = J_0 \mathrm{M} J_0$ (оказывается, что M^* — оператор умножения, а не дифференциальный).

Абелев ток без заряда. Пусть изотопические векторы l_a, m_a, n_a составляют правую тройку. Связи первого рода: $\Phi = l_a \varphi_a$, $X = \zeta_a \varphi_a + l_a \chi_a$. Связи второго рода $\varphi^{**} \dots \omega^{**}$, где $\varphi^{**} = g(\varphi_m, \varphi_n)$ и т. д., $\varphi_m = m_a \varphi_a$, $\varphi_n = n_a \varphi_a$ и т. д., а $\varphi_a \dots \omega_a$ — те же, что в "простом" случае. Скобки Пуассона:

$$\{\Psi(\mathbf{x},t), \Psi(\mathbf{y},t)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\psi^{**} \\ 0 & 0 & 0 & -\chi^{**} & -\psi^{**} & \{X, \omega^{**}\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathrm{M}^{**})^\dagger \\ 0 & \chi^{**} & 0 & ? & (\mathrm{M}^{**})^\dagger & ? \\ 0 & \psi^{**} & 0 & -\mathrm{M}^{**} & 0 & ? \\ \psi^{**} & \{\omega^{**}, X\} & -\mathrm{M}^{**} & ? & ? & ? \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Вектор ζ_a выбирается так, чтобы $\{X, \omega^{**}\}|_{\Psi=0} = 0$ и $\zeta_a l_a = 0$. Это можно сделать однозначно в предположении:

$$\mathrm{Det}\,\mathrm{M}^{**} = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} m \mathrm{M} m & m \mathrm{M} n \\ n \mathrm{M} m & n \mathrm{M} n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Абелев ток с зарядом. Связи первого рода: $\Phi = l_a \varphi_a$, $X = l_a \chi_a$. Связи второго рода: $\varphi^{**} \dots \psi^{**}$, где φ^{**} и т. д. определяются аналогично предыдущему случаю, но с φ_a и т. д. из случая неабелева тока с зарядом. Скобки Пуассона:

$$\{\Psi(\mathbf{x},t), \Psi(\mathbf{y},t)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\chi^{**} & -\psi^{**} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{J}_0^{**} \\ 0 & \chi^{**} & 0 & (\hat{\chi} - \hat{J}_0)^{**} & ? \\ 0 & \psi^{**} & \hat{J}_0^{**} & ? & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Величины $\hat{J}_0^{**}$ и $(\hat{\chi} - \hat{J}_0)^{**}$ определяются аналогично M^{**} из предыдущего случая. Определитель матрицы из скобок Пуассона связей второго рода равен (на поверхности связей) $(gJ_0)^6$.

3. Квантование с использованием континуального интеграла

Здесь мы продолжаем рассуждения пункта 2а. Нашей целью будет выражение для производящего функционала Z функций Грина через континуальный интеграл.

а) Гамильтонизация теории со связями второго рода. В пункте 2а построен обобщенный гамильтонов формализм для "простого" случая. Следующий шаг к квантованию состоит в построении гамильтонова формализма. Для теории со связями второго рода (каковой является "простой" случай) это построение производится по следующей схеме. Скобка Пуассона невырождена на поверхности связей $\Psi = 0$, значит можно ввести на ней канонические координаты (p^*, q^*), которые назовем физическими. Дополняя их координатами (p, q) до полной координатной системы в фазовом пространстве, произведем каноническое преобразование $(E, V) \to (p^*, q^*; p, q)$. При этом связи $\Psi = 0$ перейдут в $(p = 0, q = 0)$, а уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} \dot\eta = \{H, \eta\} + \int d^3x \; (u(x)\,\{p, \eta\} + w(x)\,\{q, \eta\}) \\ p = 0, \quad q = 0. \end{cases}$$

Для физических переменных (зависящих лишь от p^* и q^*), уравнения движения гамильтонизуются:

$$\dot\eta_{\rm phys} = \{H_{\rm phys}, \eta_{\rm phys}\}\,, \qquad H_{\rm phys} = H|_{p=0,q=0}.$$

б) Физические переменные свободной теории. Поскольку практически приходится иметь дело с теорией возмущений, достаточно построить физические переменные свободной теории, соответствующей теории пункта 2а. Для этого надо просто оставить в лагранжиане (*) не более чем квадратичные по полям члены и повторить рассуждения пункта 2а. Результаты легко предугадать. Гамильтониан квадратичен:

$$H_0^* = \int d^3x \Big\{ \frac{E^2 + \frac12(\bar{\bar\nabla}_k\, Q_m - \bar{\bar\nabla}_m\, Q_k)^2 - Q_m \hat{\bar{\bar F}}{}^{mk} Q_k}{2} - Q_0(\bar{\bar\nabla}_k\, E^k) + uE_0 \Big\},$$

где $Q_\mu = V_\mu - A_\mu$. Связи линеаризуются:

$$\begin{cases} \varphi = E_0 \\ \chi = \bar{\bar\nabla}_k\, E^k \\ \psi = -\hat J_k Q^k \\ \omega = \hat J_k(\bar{\bar\nabla}^k\, V_0 - E^k) \end{cases}$$

Скобки Пуассона (здесь $\bar{\mathrm M}^\dagger = \bar{\mathrm M}$, см. пункт 2а):

$$\{\Psi(\mathbf x, t), \Psi(\mathbf y, t)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\mathrm M} \\ 0 & 0 & \bar{\mathrm M} & 0 \\ 0 & -\bar{\mathrm M} & 0 & \hat J_k \hat J^k \\ -\bar{\mathrm M} & 0 & -\hat J_k \hat J^k & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf x - \mathbf y).$$

Сравнительно легко разделить физические и нефизические переменные, например, нефизические:

$$p_1 = \bar{\nabla}_k E^k \qquad q_1 = -\bar{\mathrm{M}}^{-1} \hat{J}_k (Q^k + \hat{J}^k \bar{\mathrm{M}}^{-1} E_0)$$
$$p_2 = \hat{J}_k (\bar{\nabla}^k Q_0 - E^k) \qquad q_2 = \bar{\mathrm{M}}^{-1} E_0$$

физические:

$$p^*_n = \Pi_{nk} E^k \qquad q^*_n = \Pi^\dagger_{nk} (Q^k + \hat{J}^k \bar{\mathrm{M}}^{-1} E_0).$$

Здесь $\Pi_{nk} = g_{nk} - \hat{J}_n \bar{\mathrm{M}}^{-1} \bar{\nabla}_k$ — проекционный оператор на “физическое подпространство”. Обратные формулы:

$$E_0 = \bar{\mathrm{M}} q_2 \qquad Q_0 = \bar{\mathrm{M}}^{-1} (p_2 + \hat{J}^k (p^*_k + \hat{J}_k \bar{\mathrm{M}}^{-1} p_1))$$
$$E_k = p^*_k + \hat{J}_k \bar{\mathrm{M}}^{-1} p_1 \qquad Q_k = q^*_k - \hat{J}_k q_2 - \bar{\nabla}_k q_1.$$

Скобка Пуассона физических переменных:

$$\{p^*_m(\mathbf{x}, t), q^*_k(\mathbf{y}, t)\} = \Pi_{mk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Физический гамильтониан:

$$H_0^{\mathrm{phys}} = \int d^3x \left\{ \frac{(p^*_n)^2}{2} + \frac{(\bar{\nabla}_n q^*_k - \bar{\nabla}_k q^*_n)^2 - 2 q^*_n \hat{\bar{F}}^{nk} q^*_k}{4} \right\}.$$

Особенность предъявленной свободной теории — априори “потенциальная энергия” не является положительно определенной. В разделе 5 мы увидим, что для внешних полей определенной конфигурации действительно существует “тахионная мода”, то есть область значений импульсов, при которых частота чисто мнима.

в) Производящий функционал функций Грина. Не повторяя всех рассуждений, вполне аналогичных таковым для теории без внешнего тока [16], напишем выражение для Z в физических переменных:

$$Z[j] = \int \exp \left\{ i \int (p^* \dot{q}^* - \mathcal{H}_{\mathrm{phys}}(p^*, q^*) + j^* q^*)\, d^4x \right\} \mathcal{D}p^* \mathcal{D}q^*$$

($\mathcal{H}$ — трехмерная плотность гамильтониана), причем на q^* наложены условия излучения [16]. Далее, используя технику, предложенную в [6], можно перейти к исходным переменным (E, V):

$$Z[j] = \int \exp \left\{ i \int \left(E_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}(E, V) + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \mathrm{Det}^{1/2}\{\Psi, \Psi\}\, \delta(\Psi)\, \mathcal{D}E\, \mathcal{D}V$$

(здесь Ψ — связи, см. 2a, а для симметрии введены источники к нефизическим полям). Дальнейшие преобразования выполним более подробно. (Символ $\mathcal{D}\mathbf{E}$ означает интегрирование по пространственным компонентам.)

$$
\begin{aligned}
Z[j] = &\int \exp\left\{ i \int \left(E_\mu \dot V^\mu - \frac{E^2+B^2}{2} + J_k V^k + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \times \\
&\times \operatorname{Det}^2 \mathrm{M}\ \delta(E_0)\delta(\nabla_k E^k)\delta(\nabla_k J^k)\delta(\hat J_k(\nabla^k V_0 - E^k))\,\mathcal{D}E\,\mathcal{D}V = \\
&= \int \exp\left\{ i \int \left(E_k \dot V^k - \frac{E^2+B^2}{2} + J_k V^k + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \times \\
&\times \operatorname{Det} \mathrm{M}\ \delta(\nabla_k E^k)\delta(\nabla_k J^k)\,\mathcal{D}\mathbf{E}\,\mathcal{D}\mathbf{V} = \\
&= \int \exp\left\{ i \int \left(E_k \dot V^k - \frac{E^2+B^2}{2} + J_k V^k + V_0(\nabla_k E^k) + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \times \\
&\times \operatorname{Det} \mathrm{M}\ \delta(\nabla_k J^k)\,\mathcal{D}\mathbf{E}\,\mathcal{D}V = \\
&= \int \exp\left\{ i \int \left(L + j^k Q_k \right) d^4x \right\} \operatorname{Det} \mathrm{M}\ \delta(\nabla_k J^k)\,\mathcal{D}V
\end{aligned}
$$

(в таком виде Z выписан в [12]). Итак:

$$
Z[j] = \int \exp\left\{ i \int \left(L + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \operatorname{Det} \mathrm{M}\ \delta(\nabla_k J^k)\,\mathcal{D}V,
$$

а на $\Pi^\dagger_{nk} Q^k$ наложены условия излучения.

Сделаем одно замечание. Если рассматривать обычные калибровочные преобразования $\delta V_\mu = \nabla_\mu \delta\alpha$ (α — параметр преобразования), то $\operatorname{Det} \mathrm{M} \int \delta(\nabla^\alpha_\mu J^\mu)\, d\alpha = 1$, что очень похоже на соотношение [16] $\operatorname{Det} \mathrm{M}_c \int \delta(\partial^k V^\alpha_k)\, d\alpha = 1$ в обычной теории. Следует лишь помнить, что "перейти к другой калибровке" нельзя, ибо лагранжиан (*) не калибровочно инвариантен.

4. Разложение по теории возмущений

Вычисление $Z[j]$ по теории возмущений производится стандартным образом. Вводятся антикоммутирующие духи c_a и c^*_a, после чего

$$
Z[j] = \int \exp\left\{ i \int \left(L + c^*\, \mathrm{M}\, c + \lambda \nabla_k J^k + j_k Q^k \right) d^4x \right\} \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c\,\mathcal{D}Q\,\mathcal{D}\lambda.
$$

В показателе экспоненты выделяется квадратичная форма

$$
L_0^{\text{eff}} = -\tfrac14 (\bar\nabla_\mu Q_\nu - \bar\nabla_\nu Q_\mu)^2 + \tfrac12 Q_\mu \hat{\bar F}^{\mu\nu} Q_\nu + c^*\, \bar{\mathrm{M}}\, c - \lambda \hat J_k Q^k.
$$

Остаток обозначим $L^{\text{eff}}_{\text{int}}$:

$$
L^{\text{eff}}_{\text{int}} = -\tfrac12 (\bar\nabla_\mu Q_\nu - \bar\nabla_\nu Q_\mu) \hat Q^\mu Q^\nu - \tfrac14 (\hat Q_\mu Q_\nu)^2 + c^* \hat J_k \hat Q^k c.
$$

Далее вычисляется $Z_0[j,\eta^*,\eta]$ (мы временно опускаем древесный член $\exp\left\{i\int \bar{L}\,d^4x\right\}$, $\bar{L}=-\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}+J_\mu A^\mu$):

$$Z_0[j,\eta^*,\eta]=\int\exp\left\{i\int\left(L_0^{\text{eff}}+j_\mu Q^\mu+\eta^*c+c^*\eta\right)d^4x\right\}\mathcal{D}c^*\mathcal{D}c\,\mathcal{D}Q\,\mathcal{D}\lambda.$$

Поскольку это гауссов интеграл, то его значение равно значению подынтегрального выражения в экстремуме. Уравнения для определения экстремума таковы:

$$\begin{cases}\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^\mu\,Q_\nu-\bar{\nabla}_\nu\,Q^\mu)+\hat{\bar{F}}_{\nu\mu}Q^\mu-\hat{J}_\nu\lambda+j_\nu=0\\ \bar{\mathrm{M}}\,c+\eta=0,\quad \bar{\mathrm{M}}\,c^*+\eta^*=0\\ \hat{J}_\nu Q^\nu=0.\end{cases}$$

Сразу находим $c=-\bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\eta$, $c^*=-\bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\eta^*$. Для дальнейшего обозначим

$$\mathrm{D}^{-1}_{\nu\mu}=g_{\nu\mu}\,\bar{\nabla}_\alpha\,\bar{\nabla}^\alpha-\bar{\nabla}_\mu\,\bar{\nabla}_\nu+\hat{\bar{F}}_{\nu\mu}=g_{\nu\mu}\,\bar{\nabla}_\alpha\,\bar{\nabla}^\alpha+2\hat{\bar{F}}_{\nu\mu}-\bar{\nabla}_\nu\,\bar{\nabla}_\mu\,.$$

Тогда имеем уравнения:

$$\begin{cases}\mathrm{D}^{-1}_{\nu\mu}\,Q^\mu-\hat{J}_\nu\lambda+j_\nu=0\\ \hat{J}_\mu Q^\mu=0.\end{cases}$$

Подействуем на первое оператором $\bar{\nabla}^\nu$ и учтем, что $\bar{\nabla}^\nu\,\mathrm{D}^{-1}_{\nu\mu}=-\hat{J}_\mu$ (последнее равенство проверяется непосредственно или при помощи калибровочных соображений, см. [12]). Мы найдем $-\bar{\nabla}^\nu\,\hat{J}_\nu\lambda+\bar{\nabla}^\nu\,j_\nu=0$, то есть $\lambda=\bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\bar{\nabla}_\nu\,j^\nu$. Тогда $Q^\mu=-\,\mathrm{D}^{\mu\nu}\,\Pi_{\nu\sigma}j^\sigma$, где $\Pi_{\nu\sigma}=g_{\nu\sigma}-\hat{J}_\nu\,\bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\bar{\nabla}_\sigma$ — уже знакомый оператор.

Мы могли бы сейчас подставить полученные решения в показатель экспоненты и вычислить Z_0, но поступим совсем аккуратно: вычислим еще предэкспоненту. Как известно, она равна определителю квадратичной формы в L_0^{eff} (если интегрирование ведется по антикоммутирующим переменным) или обратному корню из него (если переменные интегрирования коммутативны). Оператор квадратичной формы на антикоммутативных переменных c и c^* равен $\bar{\mathrm{M}}$, а на коммутативных переменных Q и λ имеет вид

$$\begin{pmatrix}\mathrm{D}^{-1} & \hat{J}\\ \hat{J} & 0\end{pmatrix}$$

Окончательно для Z_0 находим выражение (восстанавливаем древесный член):

$$Z_0[j,\eta^*,\eta]=\exp\left\{i\int\bar{L}\,d^4x\right\}\mathrm{Det}\,\bar{\mathrm{M}}\,\mathrm{Det}^{-1/2}\begin{pmatrix}\mathrm{D}^{-1} & \hat{J}\\ \hat{J} & 0\end{pmatrix}\times$$
$$\times\exp\biggl\{-\frac{i}{2}\int j_\mu(x)\,\mathrm{G}^{\mu\nu}(x,y)j_\nu(y)\,d^4x\,d^4y-$$
$$-\,i\int\eta^*(x)\,\bar{\mathrm{M}}^{-1}(x,y)\eta(y)\,d^4x\,d^4y\biggr\},$$

где $\mathrm{G}_{\mu\nu}=\Pi^\dagger_{\mu\lambda}\,\mathrm{D}^{\lambda\sigma}\,\Pi_{\sigma\nu}$. Граничные условия означают, что $\mathrm{G}_{\mu\nu}\,j^\nu$ удовлетворяет условиям излучения; это доопределяет $\mathrm{D}_{\mu\nu}$. Оператор $\bar{\mathrm{M}}^{-1}$ не нуждается в доопределении, так как оператор $\bar{\mathrm{M}}$ не содержит дифференцирований по времени.

Функционал $Z[j]$ вычисляется по формуле

$$Z[j]=\exp\left\{i\int L^{\text{eff}}_{\text{int}}\left(\frac{\delta}{i\delta j_\mu},\frac{\delta}{i\delta\eta},\frac{\delta}{i\delta\eta^*}\right)d^4x\right\}Z_0[j,\eta^*,\eta]\big|_{\eta^*=0,\eta=0}.$$

5. Поле “3λ”

а) Постановка задачи. Изложенную выше процедуру квантования и построения теории возмущений применим теперь к одному частному случаю. Для согласования с [12] будем работать в евклиде. В качестве A возьмем (в некоторой — будем называть ее “специальной” — системе отсчета):

$$gA_a^k = a\delta_{ka}, \quad A_a^4 = 0.$$

(Это и есть поле “3λ”). Константа a имеет простой смысл: $A_\mu A^\mu = 3a^2/g^2$. Отметим еще $\hat{A}_\mu \hat{A}^\mu = -2a^2$. Соответствующий ток $J_\mu = -2a^2 A_\mu$ как раз соответствует “простому” случаю, причем:

$$\operatorname{Det} \bar{\mathrm{M}} = \operatorname{Det} \left\{ -2a^2 \left(\hat{A}_\mu \partial^\mu - 2a^2 \right) \right\} \neq 0$$

Задачей этого раздела будет вычисление в явном виде пропагаторов духов (полей c и c^*) и глюонов (поля Q).

б) Алгебра в специальном базисе. Для реализации заявленной в пункте а) программы перейдем в импульсное представление ($\partial_\mu \to ip_\mu$, благо A_μ постоянны) и введем в импульсном пространстве удобный базис. Определим векторы:

$$\begin{aligned}
&u_\mu = \frac{1}{6a^3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon^{abc} gA_\alpha^a gA_\beta^b gA_\gamma^c, \\
&l_\mu = (q_\mu - \varkappa u_\mu)/f, \quad \text{где} \quad q_\mu = p_\mu/a, \\
&\qquad \varkappa = q_\mu u_\mu, \quad f = \frac{1}{a^2}(p_\mu gA_\mu^a p_\nu gA_\nu^a)^{1/2}, \\
&n_\mu(1) \quad \text{и} \quad n_\mu(2), \quad \text{причем} \quad n_\mu(1)n_\mu(1) = n_\mu(2)n_\mu(2) = 1, \\
&\qquad n_\mu(1)n_\mu(2) = n_\mu(1,2)u_\mu = n_\mu(1,2)l_\mu = 0.
\end{aligned}$$

В специальной системе отсчета:

$$u_\mu = (0,0,0,1), \quad l_\mu = (\mathbf{p}/|\mathbf{p}|, 0), \quad \varkappa = p_4/a, \quad f = |\mathbf{p}|/a.$$

Стало быть, $u_\mu u_\mu = l_\mu l_\mu = 1$, $u_\mu l_\mu = u_\mu A_\mu^a = 0$. Ясно, что u_μ, l_μ, $n_\mu(1,2)$ — базис в импульсном пространстве. Значит

$$\delta_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu + l_\mu l_\nu + n_\mu(1)n_\nu(1) + n_\mu(2)n_\nu(2).$$

Для полноты определим еще свертку с ε-символом:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} u_\mu l_\nu n_\lambda(1) n_\sigma(2) = 1.$$

В специальной системе отсчета:

$$\begin{gathered}
n_\mu(1,2) = (\mathbf{n}(1,2), 0), \quad \mathbf{n}(1,2)\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{n}(1)\mathbf{n}(2) = 0, \\
\mathbf{n}^2(1,2) = 1, \quad (\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)[\mathbf{n}(1) \times \mathbf{n}(2)] = 1.
\end{gathered}$$

Более удобными окажутся комбинации $n^\pm_\mu = (n_\mu(1) \pm i n_\mu(2))/\sqrt{2}$ векторов $n_\mu(1,2)$. Свойства:

$$n^\pm_\mu u_\mu = n^\pm_\mu l_\mu = 0, \quad n^+_\mu n^+_\mu = n^-_\mu n^-_\mu = 0, \quad n^+_\mu n^-_\mu = 1.$$

Разложение единицы и свертка с ε-символом:

$$\begin{aligned}&\delta_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu + l_\mu l_\nu + n^+_\mu n^-_\nu + n^-_\mu n^+_\nu,\\ &\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} u_\mu l_\nu n^+_\lambda n^-_\sigma = -i.\end{aligned}$$

Полученный в импульсном представлении базис “спроецируем” теперь в изотопическое пространство. Определим векторы:

$$\beta_a = l_\mu g A^a_\mu / a, \quad \eta^\pm_a = n^\pm_\mu g A^a_\mu / a.$$

В специальной системе отсчета $\beta_a = (\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)$, $\eta^\pm_a = (\mathbf{n}^\pm)$. Значит

$$\beta_a \beta_a = \eta^+_a \eta^-_a = 1, \quad \beta_a \eta^\pm_a = \eta^+_a \eta^+_a = \eta^-_a \eta^-_a = 0,$$

а разложение единицы и свертка с ε-символом имеют вид:

$$\begin{aligned}&\delta_{ab} = \beta_a \beta_b + \eta^+_a \eta^-_b + \eta^-_a \eta^+_b,\\ &\varepsilon_{abc} \beta_a \eta^+_b \eta^-_c = -i.\end{aligned}$$

Перемножая векторы u, l, $n^\pm$ с β, $\eta^\pm$, получим базис в прямом произведении импульсного и изотопического пространств:

$$\begin{aligned}&\xi(i) = \{n^+\beta, l\eta^+, u\eta^+; n^-\beta, l\eta^-, u\eta^-; n^-\eta^-; n^+\eta^+; n^+\eta^-, n^-\eta^+, l\beta, u\beta\},\\ &i = 1\ldots 12\end{aligned}$$

Разложим A^a_μ по этому базису:

$$gA^a_\mu = gA^a_\nu \delta_{\mu\nu} = gA^a_\nu (u_\mu u_\nu + l_\mu l_\nu + n^+_\mu n^-_\nu + n^-_\mu n^+_\nu) = a(\beta_a l_\mu + \eta^+_a n^-_\mu + \eta^-_a n^+_\mu).$$

Умножая A^a_μ на β и $\eta^\pm$, получим формулы:

$$l_\mu = \beta_a g A^a_\mu / a, \qquad n^\pm_\mu = \eta^\pm_a g A^a_\mu / a.$$

Чтобы вычислить $\bar{\mathrm{M}}^{-1}$, никаких приготовлений больше не нужно, а само вычисление элементарно, так что мы приведем здесь только результат (он получен в [12]):

$$\bar{\mathrm{M}}^{-1}_{ab} = \frac{1}{4a^4} \frac{4\delta_{ab} - f^2 \beta_a \beta_b + 2if\varepsilon_{acb}\beta_c}{4 - f^2}.$$

в) Усреднение. Хотя это и не является необходимым для вычисления пропагаторов, рассмотрим усреднение произведений базисных векторов $\xi^a_\mu(i)$ по направлениям импульса в специальной системе (такие сведения могут пригодиться при вычислении диаграмм). Под усреднением мы понимаем следующую операцию:

$$\overline{\ldots} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \ldots,$$

где интегрирование ведется по телесному углу в импульсном пространстве в специальной системе.

Вычисления производятся в два этапа. Сначала представляем четырехмерные векторы через изотопические:

$$l_\mu = \beta_a g A^a_\mu / a, \qquad n^\pm_\mu = \eta^\pm_a g A^a_\mu / a,$$

причем u_μ и A^a_μ выносятся из-под интеграла как не зависящие от импульса. Затем вычисляется среднее от произведения только изотопических векторов. Оно полностью определяется тремя правилами:

(1) отличны от нуля лишь средние четного числа векторов,
(2) отличны от нуля лишь средние с равным числом “+” и “−”,
(3) средние строятся из δ-символов, должны удовлетворять надлежащим условиям симметрии и условиям на свертки.

Приведем результаты для отличных от нуля средних произведений двух и четырех векторов:

$$\begin{aligned}
&\overline{\beta_a\beta_b} = \tfrac{1}{3}\delta_{ab}, \qquad \overline{\eta^+_a\eta^-_b} = \tfrac{1}{3}\delta_{ab},\\
&\overline{\beta_a\beta_b\beta_c\beta_d} = \tfrac{1}{15}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}),\\
&\overline{\beta_a\beta_b\eta^+_c\eta^-_d} = \tfrac{2}{15}\delta_{ab}\delta_{cd} - \tfrac{1}{30}(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}),\\
&\overline{\eta^+_a\eta^-_b\eta^+_c\eta^-_d} = -\tfrac{1}{15}\delta_{ac}\delta_{bd} + \tfrac{1}{10}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc}).
\end{aligned}$$

г) Представление операторов. Вычисление $\mathrm{G}^{ab}_{\mu\nu}$ — нетривиальная задача. Сначала введем матричное представление для операторов типа $A^{ab}_{\mu\nu}$. Определим матрицу A_{ij}:

$$A^{ab}_{\mu\nu} = \xi^a_\mu(i) A_{ij} \xi^{*b}{}_\nu(j)$$

($*$ — комплексное сопряжение). Произведению операторов соответствует произведение матриц:

$$A^{ab}_{\mu\nu} B^{\nu\lambda}_{bc} = \xi^a_\mu(i) A_{ij} \xi^{*b}{}_\nu(j) \xi^\nu_b(k) B_{kp} \xi^{*\lambda}{}_c(p) = \xi^a_\mu(i) A_{ij} B_{jp} \xi^{*\lambda}{}_c(p).$$

Транспонированному оператору вовсе не соответствует транспонированная матрица. Введем альтернативное матричное представление операторов:

$$A^{ab}_{\mu\nu} = \xi^{*a}{}_\mu(i) \tilde{A}_{ij} \xi^b_\nu(j).$$

Теперь:

$$A^{\dagger ab}{}_{\mu\nu} = A^{ba}_{\nu\mu} = \xi^{*b}{}_\nu(i) \tilde{A}_{ij} \xi^a_\mu(j) = \xi^a_\mu(j) \tilde{A}_{ij} \xi^{*b}{}_\nu(i),$$

то есть транспонированному оператору соответствует матрица $\tilde{A}^\dagger$.

д) Вычисления. Перейдем непосредственно к вычислению пропагатора $\mathrm{G}^{ab}_{\mu\nu}$. Матрица оператора $\mathrm{D}^{-1}{}^{ab}_{\mu\nu}$ выписана в [12]. Она распадается на блоки:

$$\mathrm{D}^{-1\,(1)}_{ij}(\sigma)=a^2\begin{pmatrix}-(q^2+1) & \sigma f+1 & \sigma\varkappa\\ \sigma f+1 & -(q^2+1)+f^2 & (f-\sigma)\varkappa\\ \sigma\varkappa & (f-\sigma)\varkappa & -(q^2+2)+2f\sigma+\varkappa^2\end{pmatrix},$$

$\sigma=1\colon i,j=1,2,3,\quad \sigma=-1\colon i,j=4,5,6,$

$$\mathrm{D}^{-1\,(2)}_{ij}(\sigma)=a^2(-q^2+2f\sigma),\quad \sigma=1\colon i=j=7,\quad \sigma=-1\colon i=j=8,$$

$$\mathrm{D}^{-1\,(3)}_{ij}=$$

$$=a^2\begin{pmatrix}-(q^2+3+2f) & -1 & -(f+2) & -\varkappa\\ -1 & -(q^2+3-2f) & f-2 & \varkappa\\ -(f+2) & f-2 & -(q^2+2-f^2) & f\varkappa\\ -\varkappa & \varkappa & f\varkappa & -(q^2+2-\varkappa^2)\end{pmatrix},$$

$i,j=9,10,11,12.$

Обращение дает:

$$\mathrm{D}^{(1)}(\sigma)=\frac{1}{a^2}\frac{1}{2q^2(\sigma f-2)+4\sigma f}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}q^2+2-2f\sigma & q^2(f\sigma-1)+2 & \sigma\varkappa q^2\\ q^2(f\sigma-1)+2 & (q^2+2)(f-\sigma)^2+2f\sigma & \varkappa(q^2(f-\sigma)+2f)\\ \sigma\varkappa q^2 & \varkappa(q^2(f-\sigma)+2f) & (q^2+2)\varkappa^2-2f\sigma\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}^{(2)}(\sigma)=\frac{1}{a^2}\frac{1}{-q^2+2f\sigma},$$

$$\mathrm{D}^{(3)}=\mathrm{D}^{(3)}_A+\mathrm{D}^{(3)}_B,$$

$$\mathrm{D}^{(3)}_A=\frac{1}{4a^2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & f & \varkappa\\ 1 & -1 & -f & -\varkappa\\ f & -f & -f^2 & -f\varkappa\\ \varkappa & -\varkappa & -f\varkappa & -\varkappa^2\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}^{(3)}_B=\frac{1}{a^2}\frac{2}{4(q^4+6q^2-4f^2)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-(q^2+2) & -(q^2+2) & 2(f^2+2) & 2f\varkappa\\ -(q^2+2) & -(q^2+2) & 2(f^2+2) & 2f\varkappa\\ 2(f^2+2) & 2(f^2+2) & -(f^2+2)(q^2+4) & -4f\varkappa\\ 2f\varkappa & 2f\varkappa & -4f\varkappa & -(\varkappa^2+2)(q^2+4)+8\end{pmatrix}.$$

Матрица Π (как, впрочем, и $\tilde{\Pi}$) распадается на такие же блоки (они не выписаны в [12]), которые мы обозначим $\Pi^{(1)}(\sigma)$, $\Pi^{(2)}(\sigma)$ и $\Pi^{(3)}$ (соответственно для $\tilde{\Pi}$):

$$\Pi^{(1)}(\sigma)=\frac{1}{2-\sigma f}\begin{pmatrix}1-\sigma f & 1-\sigma f & -\sigma\varkappa\\ 1 & 1 & \sigma\varkappa\\ 0 & 0 & 2-\sigma f\end{pmatrix},\qquad \Pi^{(3)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & f & \varkappa\\ 1 & 1 & -f & -\varkappa\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$\Pi^{(2)}(\sigma) = 1, \qquad \tilde{\Pi}^{(2)}(\sigma) = 1,$$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{2+\sigma f}\begin{pmatrix} 1+\sigma f & 1+\sigma f & \sigma\varkappa \\ 1 & 1 & -\sigma\varkappa \\ 0 & 0 & 2+\sigma f \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Pi}^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -f & -\varkappa \\ 1 & 1 & f & \varkappa \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Окончательное выражение для $\mathrm{G}^{ab}_{\mu\nu}$:

$$\mathrm{G}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{a^2}\frac{2}{2-\sigma f}\frac{1}{2q^2(\sigma f - 2) + 4\sigma f}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} f^2 - 2\sigma f + 2 & f^2 - 2\sigma f + 2 & f\varkappa \\ f^2 - 2\sigma f + 2 & f^2 - 2\sigma f + 2 & f\varkappa \\ f\varkappa & f\varkappa & f^2 - 2\sigma f + 2\varkappa^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{G}^{(2)}(\sigma) = \frac{1}{a^2}\frac{1}{-q^2 + 2\sigma f},$$

$$\mathrm{G}^{(3)} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{4(q^4 + 6q^2 - 4f^2)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} -(q^2+2) & -(q^2+2) & 2(f^2+2) & 2f\varkappa \\ -(q^2+2) & -(q^2+2) & 2(f^2+2) & 2f\varkappa \\ 2(f^2+2) & 2(f^2+2) & -(f^2+2)(q^2+4) & -f\varkappa(4+q^2) \\ 2f\varkappa & 2f\varkappa & -f\varkappa(4+q^2) & -(\varkappa^2+2)(q^2+4)+8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы впервые в явном виде построили пропагатор глюонов в поле “3λ”. Сделаем теперь одно замечание по поводу полученных результатов. После вычисления становится видна особенность пропагаторов. В то время как $\mathrm{G}^{(1)}(\sigma)$ и $\mathrm{G}^{(2)}(\sigma)$ при устремлении импульсной переменной p к бесконечности ведут себя как $1/p^2$, пропагатор $\bar{\mathrm{M}}^{-1}$ и часть $\mathrm{G}^{(3)}$ ведут себя ~ 1. Теория, стало быть, неперенормируема по индексу.

Заключение

В работе исследована гамильтонова структура теории Янга-Миллса с внешним током. Подобная схема — один из ответов на вопрос, как строить теорию в окрестности внешнего поля, не являющегося решением классических лагранжевых уравнений. Показано, что гамильтонова структура теории (вопреки ожиданиям) достаточно сложна и зависит от внешнего тока. Гамильтонова теория с неабелевым током без нулевой компоненты исследована достаточно подробно. Произведено построение соответствующей квантовой теории и вычислен пропагатор в популярном поле “3λ”.

Литература

1. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A109** (1925), 642.
2. P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950), 129.
3. C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954), 191.
4. L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. **B25** (1967), 29.

5. Л. Д. Фаддеев, ТМФ **1** (1969), 3.
6. Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, М. Наука, 1986.
7. G. K. Savvidi, Phys. Lett. **B71** (1977), no. 1, 133.
8. N. K. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. **B144** (1978), 376.
9. В. В. Скалозуб, ЯФ **28** (1978), 228.
10. L. S. Brown, W. I. Weisberger, Nucl. Phys. **B157** (1979), no. 2, 285.
11. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, А. О. Старинец, Изв. Вузов. Физика **11** (1992), 65.
12. А. Кабо, А. Е. Шабад, Труды ФИАН **192** (1988), М. Наука, 153.
13. В. Г. Багров, А. С. Вшивцев, С. В. Кетов, *Дополнительные главы математической физики (калибровочные поля)*, Томск, Изд. Томского университета, 1990.
14. R. Roskies, Phys. Rev. **D15** (1977), no. 6, 1722.
15. T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. **D12** (1975), 3843.
16. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, М. Наука, 1988.
17. И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, ТМФ **21** (1974), no. 3, 311.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

117454, Проспект Вернадского, 78, Москва, Россия