Предмет механики

Механика изучает механическое движение тел. *Механическое движение* — это изменение положения тела с течением времени. Собственно механика имеет дело с такими системами, движение которых можно описать конечным числом функций времени $q_1(t), \ldots, q_n(t)$. Число n необходимых функций называют *числом степеней свободы* системы.

Замечание. Таким образом, собственно механика изучает системы с конечным числом степеней свободы. Иногда сферу действия механики расширяют, включая в нее течение жидкости и колебания упругих тел.

Сами величины $q_1, \ldots, q_n$ называют *координатами*. Зависимость координат от времени называют *законом движения. Основная задача механики* состоит в определении закона движения данной механической системы при данных начальных условиях.

Основные модели механики — материальная точка и твердое тело.

Материальная точка — это модель тела, размерами которого в условиях задачи можно пренебречь. (Размерами тела можно пренебречь, если они много меньше каких-то других характерных размеров задачи. Например, если вы бросаете камень размером 5 см на расстояние 20 м, то камень можно, очевидно, считать материальной точкой.) По самому смыслу, материальная точка имеет три степени свободы.

Твердое тело — это система материальных точек и связей, таких что расстояние между двумя любыми материальными точками остается неизменным. Хотя твердое тело может состоять из большого или даже бесконечного (сплошное тело) числа материальных точек, наличие связей приводит к тому, что число степеней свободы конечно и равно шести.

Кинематика материальной точки

Системы координат

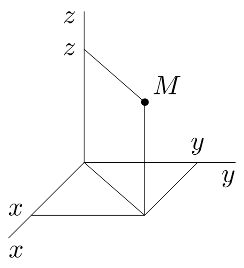
Для описания движения материальной точки нужно ввести какую-либо систему координат. Ниже мы рассмотрим наиболее употребительные системы.

Декартова система координат. Движение материальной точки описывается функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

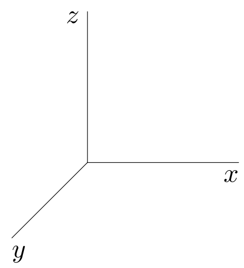
Полярная система координат (на плоскости). Движение материальной точки описывается функциями $r(t)$, $\varphi(t)$.

Связь с декартовыми координатами

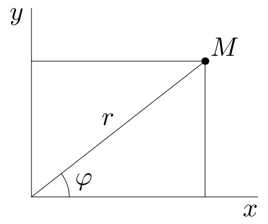
$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$



“Правая” декартова система координат

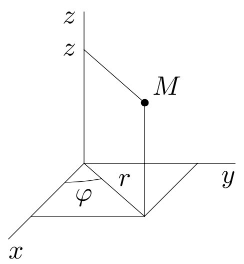


“Левая” (не будем пользоваться)

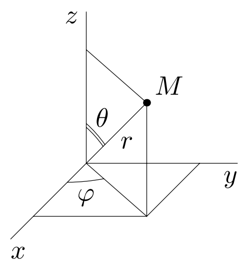


Полярная система координат

Цилиндрическая система координат (в пространстве). Движение материальной точки описывается функциями $r(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$.



Цилиндрическая система координат



Сферическая система координат

Связь с декартовыми координатами такая же, как для полярной системы координат.

Сферическая система координат. Движение материальной точки описывается функциями $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$. Связь с декартовыми координатами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Выбор той или иной системы координат для описания движения материальной точки диктуется соображениями удобства.

Скорость и ускорение

Рассмотрим сначала движение точки по прямой. Положение ее характеризуется функцией $x(t)$.

Средней скоростью на интервале $[t_1, t_2]$ называется

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) в момент времени t_1 называется предел средней скорости на $[t_1, t_2]$ при $t_2 \to t_1$

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Немного математики. Производная. Таблица производных. Правила дифференцирования. Как известно, такой предел называется *производной функции* $x(t)$

$$v(t) = x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

(это все разные обозначения производной). Приведем тут же маленькую таблицу производных и некоторые правила дифференцирования для дальнейших ссылок.

Таблица производных

функция	производная
x^a	ax^{a-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x

Правила дифференцирования

$$(f+g)' = f' + g'; \quad (cf)' = cf', \quad c = \text{const};$$
$$(fg)' = f'g + g'f \quad \text{(правило Лейбница)};$$
$$[g(f(x))]' = g'(y)|_{y=f(x)} f'(x) \quad \text{(производная сложной функции)}.$$

Ускорение определяется аналогично скорости

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = v' = x''$$

(*вторая производная* от координаты x, другие обозначения $\ddot{x}$ и d^2x/dt^2).

Немного математики. Интегрирование. Первообразная. Определенный интеграл. Пусть дана функция $f(x)$ и нужно найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, а сама операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием* и обозначается

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Таблица первообразных и правила интегрирования следуют из таблицы производных и правил дифференцирования.

Таблица интегралов

функция	интеграл
$x^a, \quad a \neq -1$	$x^{a+1}/(a+1) + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1/x$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$

Сразу отметим, что интегрирование — неоднозначная операция. Функции $F(x)$ и $F(x) + c$, где $c = \text{const}$, имеют одну и ту же производную, а потому обе являются первообразными для $f(x)$.

Правила интегрирования

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx; \quad \int [cf(x)]\, dx = c \int f(x)\, dx, \quad c = \text{const};$$

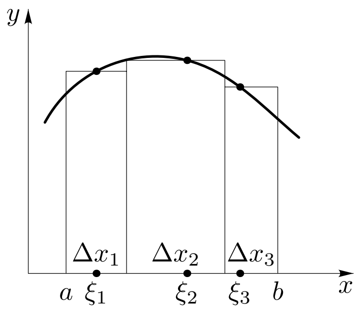
$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int g'(x) f(x)\, dx \quad \text{(интегрирование по частям);}$$

$$\int g(f(x)) f'(x)\, dx = \int g(y)\, dy \Big|_{y=f(x)} = G(f(x)) \quad \text{(замена переменной в интеграле).}$$

В последней формуле через $G(x)$ обозначена первообразная функции $g(x)$.

Наряду с введенным выше так называемым *неопределенным интегралом* в математическом анализе используется понятие *определенного интеграла.* Пусть задана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на несколько меньших отрезков, пусть их длины равны Δx_1, Δx_2, ... , длину наибольшего отрезка обозначим через Δ. На каждом отрезке выберем по точке ξ_1, ξ_2, ... и составим сумму $f(\xi_1)\, \Delta x_1 + f(\xi_2)\, \Delta x_2 + \ldots$ Геометрически эта сумма равна площади ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел этой суммы при измельчении разбиения

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta \to 0} f(\xi_1)\, \Delta x_1 + f(\xi_2)\, \Delta x_2 + \ldots$$



Определенный интеграл

(геометрически определенный интеграл равен площади под графиком функции $f(x)$).

Оказывается, что определенный интеграл просто связан с неопределенным (или с первообразной). Именно, имеет место *формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

В механике чаще встречается интегрирование, чем дифференцирование. Причина этого в том, что основной задачей является получение закона движения, то есть зависимость координат от времени, а из уравнений движения (подробнее ниже) обычно определяется ускорение. Координаты же должны быть затем восстановлены интегрированием.

Домашнее задание. Вспомнить формулы для скорости v координаты x при прямолинейном равномерном и прямолинейном равноускоренном движении.

Рассмотрим теперь общий трехмерный случай. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки M.

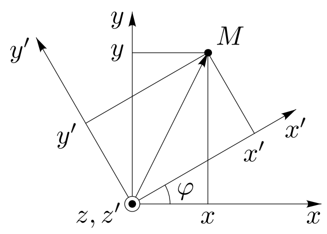
Вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ называется *радиус-вектором* точки M.

Вектор $\mathbf{v} = (x', y', z')$ называется *скоростью* точки M (иначе записывается как $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$).

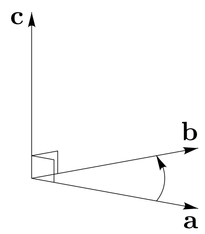
Вектор $\mathbf{a} = (x'', y'', z'')$ называется *ускорением* точки M (иначе записывается как $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{r}''$).

Немного математики. Операции над векторами. Математики, которые будут читать вам линейную алгебру, объяснят, что вектор $\mathbf{b}$ характеризуется своими проекциями на оси некоторой декартовой системы координат, в нашем случае тройкой (b_x, b_y, b_z). При замене системы координат проекции изменяются по определенным правилам, которые следуют из геометрической интерпретации вектора.

Домашнее задание. Написать формулы преобразования проекций вектора при повороте системы координат на угол φ вокруг оси z.



Поворот системы координат



Векторное произведение

Для векторов определены умножение на число, сложение, скалярное и векторное произведения.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *произведением вектора* $\mathbf{b}$ *на число* a, если

$$c_x = ab_x, \quad c_y = ab_y, \quad c_z = ab_z$$

(записывается $\mathbf{c} = a\mathbf{b}$).

Вектор $\mathbf{c}$ называется *суммой векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z$$

(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$).

Число c называется *скалярным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(записывается $c = \mathbf{ab}$, иногда применяются обозначения $c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или $c = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$). Как вас учили в школе, величина скалярного произведения равна произведению модулей векторов на косинус угла между ними. В частности, скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *векторным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

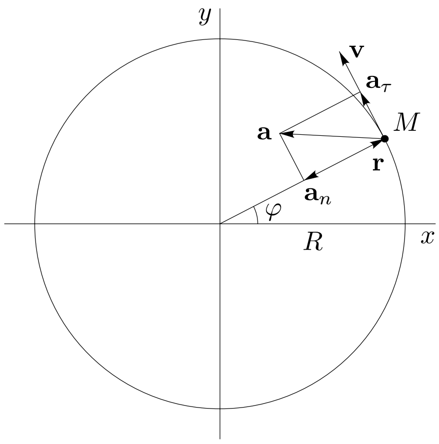
(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, иногда встречается обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или даже $\mathbf{c} = [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$). Правила расстановки индексов в этих на первый взгляд сложных формулах на самом деле просты. Первые три индекса (индекс в левой части и индексы в первом произведении в правой части) всегда идут в порядке $x \to y \to z \to x$. Индексы во втором произведении в правой части получаются перестановкой индексов в первом произведении. Отметим, что эти формулы справедливы только для "правой" системы координат ("левые" мы уже договорились не использовать). Геометрически вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а его направление определяется правилом правого винта: если крутить винт от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$, то он будет ввинчиваться по направлению вектора $\mathbf{c}$. Абсолютная же величина вектора $\mathbf{c}$ равна произведению модулей векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на синус угла между ними. В частности, векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю.

Движение по окружности

Естественно воспользоваться полярными координатами. Тогда

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi,$$

причем от времени зависит только φ.



Движение по окружности

Чтобы найти скорость, продифференцируем координаты по времени

$$v_x = -\dot{\varphi}R\sin\varphi,$$
$$v_y = \dot{\varphi}R\cos\varphi.$$

Величина $\dot{\varphi} = \omega$ называется *угловой скоростью* движения материальной точки. С помощью прямого вычисления убеждаемся, что $\mathbf{rv} = 0$, то есть скорость перпендикулярна радиус-вектору, следовательно, она направлена по касательной к окружности. Модуль скорости

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2\omega^2.$$

Таким образом линейная скорость связана с угловой равенством

$$v = \omega R.$$

Для определения ускорения дифференцируем дальше

$$a_x = -\dot{\varphi}^2 R \cos\varphi - \ddot{\varphi} R \sin\varphi,$$
$$a_y = -\dot{\varphi}^2 R \sin\varphi + \ddot{\varphi} R \cos\varphi.$$

Величину $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon$ называют *угловым ускорением* движения материальной точки. (Иногда угловое ускорение обозначают буквой β.) Для анализа удобно разбить ускорение на две части $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$, где

$$\mathbf{a}_n = (-R\omega^2 \cos\varphi, -R\omega^2 \sin\varphi) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

называется *нормальным ускорением* (оно сонаправлено с $\mathbf{r}$, а потому перпендикулярно к скорости), а

$$\mathbf{a}_\tau = (-R\varepsilon \sin\varphi, R\varepsilon \cos\varphi)$$

называется *тангенциальным ускорением* (оно сонаправлено со скоростью).

Абсолютная величина нормального ускорения может быть выражена через ω или v

$$a_n = \omega^2 R = v^2/R.$$

Используя уже полученное равенство $v = \omega R$, найдем $dv/dt = \varepsilon R$, после чего проекция тангенциального ускорения на направление скорости также может быть выражена двумя способами

$$a_\tau = \varepsilon R = dv/dt$$

(подчеркнем, что в этой формуле стоит производная абсолютной величины скорости). Поскольку тангенциальное и нормальное ускорения перпендикулярны друг другу, то величина полного ускорения равна

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Замечания. Тангенциальное и нормальное ускорения имеют смысл при движении по любой траектории, а не только по окружности. Все выведенные выше формулы сохраняют силу, однако не так то просто вычислить радиус кривизны произвольной траектории!

Введенные нами угловые характеристики (скорость и ускорение) встретятся еще раз при изучении кинематики твердого тела. Не следует смешивать эти понятия.

Законы Ньютона

Событием называют мгновенное происшествие, происходящее в данной точке пространства. (Например: материальная точка M в момент времени t проходит через точку с координатами x, y, z.) Для того чтобы описывать события, мы должны добавить к системе координат “часы” и превратить ее в *систему отсчета*.

Замечание. Настоящее осознание понятий “событие” и “система отсчета” приходит в теории относительности.

Первый закон Ньютона. Преобразования Галилея

Первый закон Ньютона гласит: существуют системы отсчета, в которых всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Такие системы отсчета называются *инерциальными*. Равномерное прямолинейное движение тела (в отсутствие воздействия со стороны других тел) называют движением по инерции, а первый закон Ньютона называют еще законом инерции.

Оказывается, что все инерциальные системы отсчета могут быть получены из одной

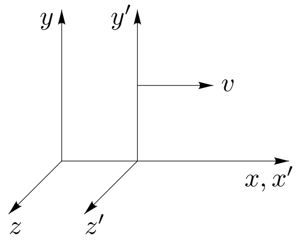
- сдвигом начала координат,
- изменением начала отсчета времени,
- поворотом осей координат,
- равномерным прямолинейным движением.

Одно и то же событие будет иметь разные координаты и время в разных инерциальных системах отсчета. Довольно очевидно, как пересчитываются координаты и время в первых трех (из четырех перечисленных) случаях. При равномерном прямолинейном движении

$$\begin{aligned} &x = x' + vt', \\ &y = y', \quad z = z', \\ &t = t'. \end{aligned}$$

Ввиду особой важности эти формулы получили название *преобразования Галилея*.

Замечания. Преобразованиями Галилея называют также всю совокупность преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой (включая сдвиги и повороты).



Преобразование Галилея

В теории относительности показано, что формулы преобразований Галилея не совсем точны. Они приближенно справедливы при малых (по сравнению со скоростью света) скоростях движения систем отсчета друг относительно друга. При больших скоростях формулы преобразований Галилея должны быть заменены формулами преобразований Лоренца.

Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона утверждает, что для любой материальной точки

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Здесь m — *масса* материальной точки, $\mathbf{a}$ — ее ускорение, $\mathbf{F}$ — действующая на материальную точку *сила*. Поскольку и понятие массы, и понятие силы относятся к фундаментальным (то есть к с трудом поддающимся определению), то нужно пояснить, в чем заключается смысл закона. Предполагается, что сила может зависеть от координат материальной точки, ее скорости и от времени $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Таким образом, закон связывает $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$ и $\mathbf{r}'' = \mathbf{a}$. Эту связь называют *уравнением движения*.

Немного математики. Дифференциальные уравнения. Уравнения, связывающие функцию и ее производные, называются *дифференциальными уравнениями*. Содержание второго закона Ньютона в том, что движение тел можно описывать такими уравнениями. В данном случае это уравнения *второго порядка*, потому что в них входит вторая производная (а третья уже не входит). Математики объяснят вам, что решение дифференциального уравнения неединственно: оно содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. В нашем случае их две. Чтобы определить эти постоянные и однозначно зафиксировать решение, мы должны задать *начальные условия*

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

— начальные координаты и скорости в момент времени $t = 0$. Совокупность уравнения и начальных условий

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$
$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

называется *задачей Коши*. Решение задачи Коши уже единственно и описывает движение материальной точки под действием заданной силы при заданных начальных условиях.

Домашнее задание. Пусть материальная точка движется в поле тяготения Земли. Тогда сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Написать закон движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Указать зависимость от начальных условий.

Обобщение на случай системы N материальных точек довольно очевидно. Для каждой материальной точки нужно записать уравнение движения

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Сила $\mathbf{F}_i$, действующая на i-ую материальную точку, может теперь зависеть от координат и скоростей всех материальных точек

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t).$$

Начальные условия также нужно задать для всех материальных точек системы

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Принцип относительности

Выше мы уже говорили, что во всех инерциальных системах отсчета тело, на которое не действуют другие тела, движется равномерно и прямолинейно. Однако справедливо и более сильное утверждение: все физические явления протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Это утверждение называется *принципом относительности*.

Нас сейчас интересуют механические явления. Мы уже знаем, что движение материальной точки описывается уравнением $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ и что это уравнение не определяет движения однозначно — нужны еще начальные условия. Принцип относительности нужно понимать так, что при создании одинаковых начальных условий (независимо от того, в какой системе отсчета они созданы) в одинаковых системах дальнейшее механическое движение будет одинаковым.

Нетрудно видеть, что принцип относительности накладывает некоторые ограничения на вид функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (точнее, на функции $\mathbf{F}_i$ для системы материальных точек, но в целях упрощения обозначений мы будем писать уравнения так, будто точка всего одна).

В системе отсчета (x, y, z, t) закон движения материальной точки есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ &\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

В системе отсчета $(x', y', z', t' = t)$ закон движения той же материальной точки при тех же начальных условиях есть решение задачи Коши

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'),$$
$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}_0.$$

(Штрих здесь обозначает не дифференцирование, а другую систему отсчета.) Функция $\mathbf{F}$ в обоих случаях одна и та же, поскольку системы одна и та же. Постоянные $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ одни и те же в соответствие с формулировкой принципа относительности. В соответствие с тем же принципом решения двух задач должны совпадать, то есть должны совпадать функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$. Это возможно, только если совпадают сами уравнения $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$ и $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (с точностью до замены штрихованных координат и времени нештрихованными). Таким образом, математическая формулировка принципа относительности состоит в инвариантности (неизменности) уравнений движения относительно преобразований Галилея.

Замечания. Принцип относительности часто понимают неправильно. Особенно много проблем это порождает в теории относительности. Будьте бдительны!

Принцип относительности, очевидно, не может применяться к системам материальных точек, которые взаимодействуют с внешними телами. В этом случае следовало бы “переносить” из одной системы отсчета в другую внешние тела, что автоматически изменяет уравнения движения.

Домашнее задание. Пусть система состоит из двух материальных точек, а

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$$

(сила тяготения Ньютона). Показать, что уравнения движения этой системы инвариантны относительно преобразований Галилея.

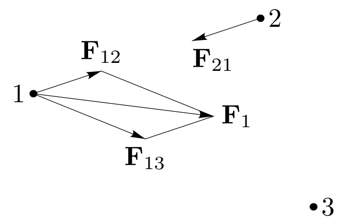
Третий закон Ньютона

Третий закон предполагает, что силу, действующую на материальную точку, можно представить в виде суммы, каждый член которой обусловлен действием какой-то другой материальной точки. (На рисунке показан случай системы из трех точек.)

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}.$$

Третий закон утверждает, что

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$



Третий закон Ньютона

и аналогично для любой другой пары индексов, а также что

$$\mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0,$$

то есть $\mathbf{F}_{12} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Замечание. Третий закон Ньютона не является столь фундаментальным, как второй. На сегодняшний день дифференциальными уравнениями второго порядка (обыкновенными или в частных производных) описываются практически любые физические системы. В то же время с точки зрения современной физики третий закон Ньютона — всего лишь досадный компромисс, другой способ записи фундаментального закона сохранения импульса, приспособленный для механики с ее дальнодействующими силами. К примеру, в электродинамике уравнение движения заряженной частицы в форме второго закона Ньютона сохраняется (с поправкой на релятивизм), а вот третьего закона нет и в помине.

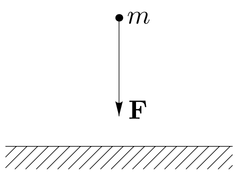
Силы в механике

С математической точки зрения *механическая система считается заданной, если заданы силы*, действующие на все материальные точки системы. Тогда можно с помощью второго закона Ньютона составить уравнения движения, решить их, и найти закон движения каждой материальной точки. Однако на практике силы редко бывают заданы явно. Вместо этого механическая системы описывается “на словах”. Мы должны уметь переводить такое “физическое” описание на язык математики. Поскольку общих рецептов здесь нет, то мы просто перечислим те силы, с которыми нам придется иметь дело.

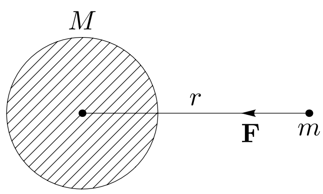
Силы делятся на “настоящие”, те для которых действительно можно указать выражение $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, и силы реакции связей. Из “настоящих” сил мы встретимся с силой тяжести и силой упругости.

Сила тяжести. Сила тяжести — это сила взаимодействия материальной точки и Земли. В модели “плоской” Земли

$$F = mg,$$



“Плоская” Земля



“Круглая” Земля

где m — масса материальной точки, а g — ускорение свободного падения.

В модели “круглой” Земли

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Это *закон всемирного тяготения.*

Сила упругости. Сила упругости — это сила, с которой действует на материальную точку прицепленная к ней пружина. Величина этой силы определяется *законом Гука*

$$F = kx,$$

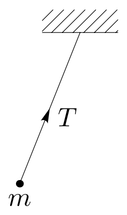
где x — удлинение пружины по сравнению с недеформированным состоянием, k — жесткость пружины.

Силы реакции связей. Материальные точки редко бывают предоставлены сами себе. Чаще что-то мешает им двигаться свободно. Они привязаны нитками или лежат на плоскости. Такие ограничения называют *связями.* Связи уменьшают число степеней свободы системы. При наличии связей некоторые координаты (вообще говоря, координаты и скорости) оказываются зависимыми. Эту зависимость называют *уравнением связи.* Например, если материальная точка лежит на столе, то она имеет не три, а две степени свободы. Если ввести декартову систему координат, и направить ось z перпендикулярно столу, то уравнением связи будет $z = 0$.

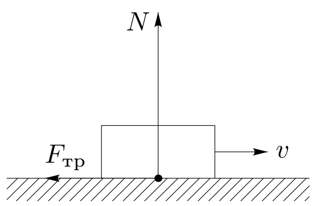
При наличии связей возникают дополнительные силы, которые называются *силами реакции связей.* Отличие их от “настоящих” состоит в том, что невозможно дать формулу вычисления силы реакции связи. Эта сила ровно такая, какая нужна для того, чтобы выполнялось уравнение связи.

Замечание. Подставляя “настоящие” силы во второй закон Ньютона, мы получаем уравнения движения, решая которые, находим закон движения. С силами реакции связей все наоборот: подставляя уравнения связей в закон Ньютона, мы можем определить силы реакции связей.

Сила натяжения нити. Если материальная точка привязана к нитке, то на нее действует сила натяжения нити T. Сила натяжения нити всегда направлена вдоль нити.



Сила натяжения нити



Сила реакции опоры и сила трения

Сила реакции опоры. Если материальная точка соприкасается с каким-либо твердым телом, например, лежит на столе, то на нее действует сила реакции опоры N. Эта сила всегда направлена перпендикулярно поверхности опоры.

Сила трения покоя. Помимо силы реакции опоры на материальную точку может действовать сила трения. Сила трения всегда направлена по касательной к поверхности опоры. Если материальная точка не движется, то силу трения называют силой трения покоя. Абсолютная величина силы трения покоя не может быть больше μN, где μ — коэффициент трения. Если вычисленная из уравнений движения сила трения оказывается больше этой величины, тело начинает скользить по опоре.

Сила трения скольжения. Абсолютная величина этой силы равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

а направлена она всегда против скорости движения.