Электростатика проводников

Говоря о проводниках (и далее о диэлектриках) мы должны отдавать себе отчет в том, что выходим за рамки собственно электромагнитной теории. Проводник или диэлектрик — это противное, грязное, нелинейное вещество. Хотя раздел физики, изучающий электромагнитные свойства вещества и называют "электродинамикой сплошных сред", все же это больше наука о свойствах вещества, нежели ЭМ поля, и в этом смысле он скорее относится к молекулярной теории. К счастью, можно предложить достаточно простую, но вместе с тем реалистичную модель вещества, которая позволит нам сконцентрироваться в основном на свойствах ЭМ поля.

Модель проводника в электростатике формулируется так: *электрическое поле внутри проводника равно нулю.* Прежде всего мы замечаем, что искать поле во всем пространстве нам уже не нужно, достаточно найти поле *вне* проводников. Однако на поверхности проводников должны быть выполнены некоторые *граничные условия.* Поскольку граничные условия играют большую роль при использовании уравнений в частных производных, мы остановимся на них подробно.

Замечание. Физическая причина отсутствия поля в проводнике в том, что в нем есть так называемые "свободные заряды". Если бы в проводнике было поле, то эти заряды перемещались бы, так что плотность заряда зависела бы от времени, чего в электростатике быть не должно.

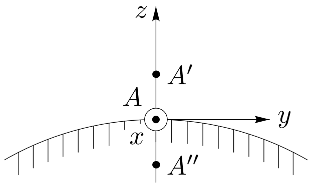
Граничные условия. Граница — это поверхность, на которой резко изменяются свойства вещества. При получении граничных условий удобно сперва считать, что граница "размыта", то есть свойства меняются плавно, а затем сжимать область "размытости". Для "размытой" границы считается, что уравнения Максвелла выполняются не только вне, но и внутри проводника, а также "внутри границы". Предельным переходом получают граничные условия для резкой границы.

Замечание. Конечно, граничные условия (как и начальные) дополняют уравнение, а вовсе не следуют из него. Однако, задавая их как попало, вы можете получить разные чудеса.

Взглянем на уравнения еще раз

$$\nabla \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

В проводнике $\mathbf{E} = 0$, потому $\rho = 0$, однако это не исключает заряда *на границе.* Возьмем какую-либо точку A на поверхности проводника. Пусть



К граничным условиям на поверхности проводника

начало декартовой системы координат совпадает с точкой A, ось z направлена перпендикулярно поверхности вовне проводника.

Рассмотрим уравнение $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Запись через компоненты гласит

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Среди производных выделяются производные по z, поскольку направление z перпендикулярно границе. Эти производные на границе могут быть очень большими, тогда как остальные производные остаются конечными. Если мы теперь возьмем две точки на оси z, точку A' вне проводника и точку A'' внутри проводника, проинтегрируем уравнения по отрезку $A''A'$ и будем приближать A' и A'' к A, то мы увидим, что интегралы от производных по x и y будут стремиться к нулю, а интегралы от производных по z дадут просто разность значений поля вне и внутри проводника. Производные по z входят только в первые два уравнения, поэтому получается два условия

$$E_{x,y}(A') - E_{x,y}(A'') = 0, \quad A' \to A, \quad A'' \to A.$$

Поскольку поле внутри равно нулю $\mathbf{E}(A'') = 0$, то на поверхности проводника

$$E_x = 0, \quad E_y = 0.$$

Эти равенства иногда записывают как $E_\tau = 0$ и говорят, что касательная к поверхности компонента поля равна нулю. Иначе говоря, поле на поверхности проводника перпендикулярно этой самой поверхности.

Учитывая связь напряженности поля с потенциалом, можно сказать, что поверхность проводника — это эквипотенциальная поверхность $\varphi = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь уравнение $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ или

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho/\varepsilon_0.$$

Предполагая, что ρ на поверхности может быть очень большой и проделывая те же операции, что и ранее, получим

$$E_z = \sigma/\varepsilon_0,$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Это условие иногда записывают в виде $\varepsilon_0 E_n = \sigma$ и говорят, что нормальная компонента поля на поверхности проводника связана с поверхностной плотностью заряда.

На языке потенциала $-\varepsilon_0(\nabla\varphi)_n = -\varepsilon_0 \partial\varphi/\partial n = \sigma$ — нормальная производная потенциала связана с поверхностной плотностью заряда (а тангенциальная равна нулю $(\nabla\varphi)_\tau = 0$, поскольку поверхность проводника — эквипотенциальная).

Полный заряд проводника, занимающего область G, есть

$$Q = \varepsilon_0 \int_{\partial G} E_n \, dS = -\varepsilon_0 \int_{\partial G} (\nabla\varphi)_n \, dS.$$

Если проводник (конечных размеров) был исходно заряжен зарядом q, то должно быть $Q = q$.

Теперь мы готовы четко сформулировать задачу электростатики проводников.

Уравнения. Пусть проводники занимают (непересекающиеся) области $G_1, \ldots, G_n$. Пусть задано распределение "внешних" зарядов $\rho(\mathbf{r})$ (разумеется, вне проводников). Для каждого проводника можно задать одно из двух условий: известен либо потенциал проводника, либо заряд проводника. Уравнения и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0, \quad \mathbf{r} \notin G_1, \ldots, G_n, \\
&(\nabla\varphi)_\tau|_{\partial G_1, \ldots, \partial G_n} = 0, \\
&\varphi|_{\partial G_1} = \varphi_1, \quad -\varepsilon_0 \int_{\partial G_2} (\nabla\varphi)_n \, dS = q_2, \quad \ldots
\end{aligned}$$

(для определенности мы приняли, что заданы потенциал первого проводника и заряд на втором).

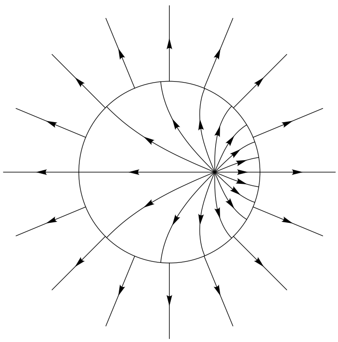
Замечания. Поскольку потенциал определен с точностью до постоянной, может показаться, что, если заданы потенциалы некоторых проводников, можно считать один из них равным нулю. При этом, однако, потенциал *на бесконечности* может оказаться ненулевым. Для системы проводников конечных размеров принято нормировать потенциал именно на бесконечности, потенциалы отдельных проводников тогда имеют абсолютный смысл.

Если какие-то проводники уходят в бесконечность (например, бесконечная плоскость), то формулировка граничных условий требует более тонкого анализа. В частности, нельзя, вообще говоря, задавать заряд такого проводника, поскольку он всегда может "натечь из бесконечности".

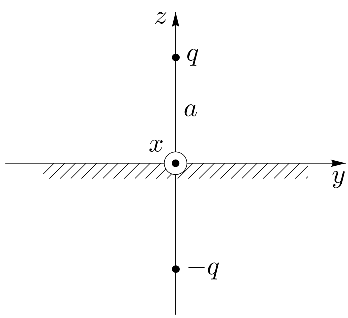
В большинстве случаев возможно лишь численное решение этих уравнений. Некоторые специальные случаи, когда аналитическое решение возможно, мы разберем ниже.

В двумерном случае есть мощный метод решения, основанный на комплексном анализе и конформных отображениях. Он позволяет решить любую задачу, в которой границы проводников есть ломаные, а также множество других задач с проводниками более сложной формы.

Если в проводнике имеется полость, а в полости — какие-то "внешние" заряды, то поставленная выше задача для *внешней области* должна быть дополнена аналогичной задачей для *внутренней области*. Мы подчеркиваем, то внешняя и внутренняя задачи *никак не связаны друг с другом*, разве что через полный заряд проводника. Для примера на рисунке представлено решение задачи для проводящей сферы с "внешним" зарядом внутри (заряд самой сферы равен нулю). Подчеркнем, что поле *вне* сферы совершенно не зависит от положения "внешнего" заряда внутри сферы, тогда как поле *внутри* сферы от положения этого заряда серьезнейшим образом зависит.



Заряд в проводящей сфере



Метод изображений
для проводящей плоскости

Метод изображений. Проводящая плоскость. Рассмотрим случай, когда проводник заполняет полупространство (скажем, $z < 0$), а в оставшемся полупространстве имеется единственный точечный заряд q (скажем, в точке $(0, 0, a)$). Поле в полупространстве $z > 0$ оказывается возможно найти с помощью следующего приема. Уберем проводник и поместим точечный заряд $-q$ в точку $(0,0,-a)$. Потенциал поля зарядов q и $-q$ равен просто сумме потенциалов каждого из зарядов в отдельности

$$\varphi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}.$$

При $z=0$ и произвольных x и y имеем $\varphi(x,y,0)=0$. Иначе говоря, плоскость $z=0$ является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $\varphi=0$. Но это означает. что поле, которое создают в полупространстве $z>0$ заряды q и $-q$, во-первых, удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=-\rho/\varepsilon_0$, где ρ — плотность, соответствующая заряду q (заряд $-q$ находится в другом полупространстве!), во-вторых, удовлетворяет граничному условию $\varphi|_{z=0}=\text{const}$. Стало быть, это поле является решением исходной задачи о проводнике и точечном заряде q.

Замечания. Заряд $-q$ называют *зарядом-изображением.* Это как бы зеркальное отражение заряда q в проводнике.

Как мы уже отмечали, для бесконечного проводника нельзя накладывать условия на его заряд (ниже мы вычислим заряд плоскости). Потенциал в данном случае оказывается нормирован на нуль в бесконечности.

Поверхностная плотность заряда на плоскости равна

$$\sigma(x,y)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,0)=-\frac{qa}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}.$$

Полный заряд проще всего сосчитать, используя полярные координаты (r,φ)

$$Q=\int dx\,dy\,\sigma(x,y)=-\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{qa}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}=$$
$$=-\int_0^\infty\frac{qa}{(r^2+a^2)^{3/2}}r\,dr=\left.\frac{qa}{\sqrt{r^2+a^2}}\right|_0^\infty=-q.$$

Этот результат не должен нас удивлять, поскольку мы знаем, как было построено решение. Очевидно, что заряд плоскости должен совпадать с зарядом-изображением.

Замечания. Чтобы не думать о полупространстве $z<0$, мы заполнили его проводником. Это не обязательно. Проводником может быть и плоскость, но, как мы уже говорили, задача в полупространстве $z<0$ никак не связана с задачей в полупространстве $z>0$.

Не думайте, что вы ограничены только одним точечным зарядом. Их может быть и два (и больше). Развивая эту мысль, вы, возможно, придете к тому, что заряды не должны быть непременно точечными.

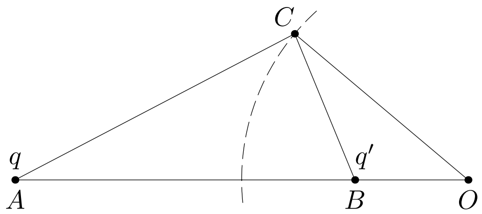
Не думайте также, что вы ограничены проводником-плоскостью. Если две плоскости пересекаются под углом в 90, 60, ... градусов, то все еще можно применить метод изображений, просто изображений станет больше.

Домашнее задание. Постройте решение для точечного заряда между проводящими плоскостями, которые составляют угол 60 градусов. Сколько зарядов-изображений понадобится?

Метод изображений. Проводящая сфера. Пусть проводник представляет собой проводящую сферу радиуса R, а точечный заряд q расположен на расстоянии r от центра сферы ($r > R$). Решение во внешней области строится так. Обозначим центр сферы через O, точку, в которой находится заряд q, — через A. Уберем сферу и поместим заряд-изображение $q' = -qR/r$ в точку B на отрезке OA на расстоянии $r' = R^2/r$ от центра сферы ($r' < R$). Тогда потенциал в точке C на расстоянии R от точки O равен

$$4\pi\varepsilon_0\varphi(C) = \frac{q}{AC} + \frac{q'}{BC} = \frac{q}{AC}\left(1 - \frac{R}{r}\frac{AC}{BC}\right).$$

Треугольники $\triangle OAC$ и $\triangle OCB$ подобны. Действительно, угол O у них общий, а две прилежащих стороны составляют одинаковое отношение $OC/OA = R/r = r'/R = OB/OC$. Оставшиеся две стороны должны составлять то же отношение $BC/AC = R/r$, поэтому $\varphi(C) = 0$. Таким образом, сфера радиуса R вокруг точки O представляет собой эквипотенциальную поверхность поля двух зарядов q и q'. Это поле дает решение внешней задачи о сфере и точечном заряде при граничном условии $\varphi|_{\text{на сфере}} = 0$. Заряд сферы при этом равен q'.



Метод изображений для проводящей сферы

Что делать, если задан заряд сферы и он не равен q', или потенциал сферы не равен нулю? Тогда нужно поместить дополнительный заряд q'' в центр сферы. Поверхность сферы останется эквипотенциальной, однако заряд сферы изменится на q'', а потенциал — на $q''/4\pi\varepsilon_0 R$. Подбирая q'', можно удовлетворить любым граничным условиям.

Внутренняя задача решается аналогично, только заряд-изображение располагается вне сферы и дополнительный заряд в центре не нужен.

Электростатика диэлектриков

Диэлектрик, как и проводник, состоит из зарядов. Эти заряды тоже могут двигаться, но они уже не так свободны, как в проводнике. Они не могут уйти далеко от своего первоначального положения. Поэтому поле внутри диэлектрика *есть*, к тому же нужно как-то описывать смещение зарядов.

Вектор поляризации. Вектор электрической индукции. Уравнения электростатики диэлектриков. Как мы отмечали при обсуждении уравнений Максвелла, заряды (и, в частности, те, из которых состоит диэлектрик) должны удовлетворять уравнению непрерывности $\partial\rho/\partial t + \nabla\mathbf{j} = 0$. Проинтегрируем это соотношение по времени, считая, что $\rho(\mathbf{r}, t = -\infty) = 0$. Мы получим

$$\rho_{\text{пол}} = -\nabla\mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t')\, dt'$. Вектор $\mathbf{P}$ называется *вектором поляризации*, а плотность заряда, возникающая в диэлектрике за счет смещения зарядов, из которых состоит диэлектрик, называется плотностью *поляризационных зарядов* (чтобы отличать ее от плотности "внешних" зарядов). Полная плотность заряда теперь равна $\rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{внешн}}$, а уравнение $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ принимает вид

$$\nabla\mathbf{D} = \rho_{\text{внешн}},$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ называется *вектором электрической индукции* или *вектором электрического смещения*. Второе уравнение

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

остается без изменения.

Граничные условия. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков можно получить аналогично тому, как мы это делали в случае проводников. Уравнения $\nabla\mathbf{D} = \rho_{\text{внешн}}$ и $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ приводят к условиям

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_{\text{внешн}}, \quad E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0$$

(нормаль направлена внутрь первой среды).

Соотношение $\rho_{\text{пол}} = -\nabla\mathbf{P}$ приводит к условию

$$P_{n1} - P_{n2} = -\sigma_{\text{пол}}.$$

Замечания. Частный случай границы между диэлектриком и вакуумом получается из общих формул, если положить $\mathbf{P} = 0$ (соответственно $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$) в вакууме.

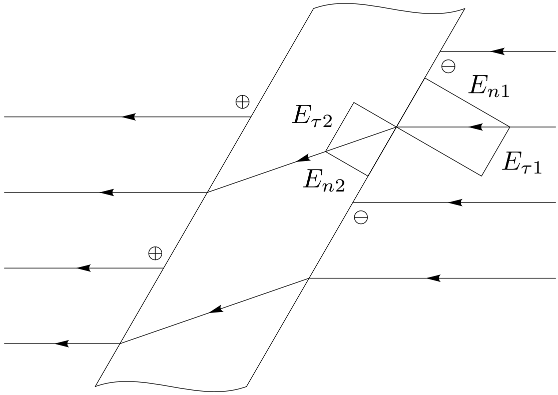
О границе диэлектрика с проводником лучше не думать. Представляйте себе, что между ними есть "тонкий слой вакуума".

Связь D с E. Материальное уравнение. Ясно, что с введением нового вектора $\mathbf{D}$ неизвестных стало слишком много. Нужно как-то связать

D с **E**. Повторимся еще раз, что связь эта относится к ведению науки о свойствах вещества, а вовсе не к ЭМ полю как таковому. К счастью, можно предложить весьма простую модель, которая всех устраивает,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Постоянная ε называется *диэлектрической проницаемостью* диэлектрика. Выписанную выше связь **D** с **E** называют *материальным уравнением.*



Диэлектрическая пластина во внешнем однородном поле

Рассмотрим в качестве примера, что происходит, когда мы помещаем диэлектрическую пластину в однородное электрическое поле. Пусть нормаль к пластине составляет угол 30 градусов с направлением поля, а диэлектрическая проницаемость пластины равна 2. Пусть величина поля равна E.

Тангенциальная и нормальная составляющие поля в вакууме равны, соответственно $E/2$ и $E\sqrt{3}/2$. Согласно граничным условиям $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, $D_{n1} = D_{n2}$ (внешних зарядов нет). С учетом соотношений $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ в вакууме и $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ в диэлектрике тангенциальная и нормальная составляющие поля в диэлектрике равны $E/2$ и $E\sqrt{3}/4$. Нормальная компонента $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}$ в диэлектрике равна $\varepsilon_0 E\sqrt{3}/4$, эта же величина равна плотности связанных зарядов на поверхности пластины.

Понятие электроемкости. Конденсаторы

Конденсатором называется система двух проводников с зарядами q и $-q$. *Емкостью* конденсатора называется отношение

$$C = |q/(\varphi_1 - \varphi_2)|,$$

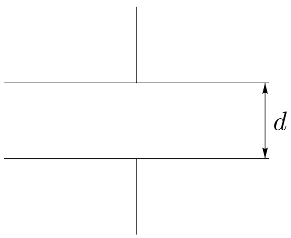
где $\varphi_{1,2}$ — потенциалы проводников. В силу линейности уравнений Максвелла, емкость зависит только от геометрии проводников, но не от их заряда.

Замечания. Строго говоря, понятие емкости имеет смысл, только если нет никаких других тел. Обычно стараются сконструировать конденсатор так, чтобы электрическое поле концентрировалось внутри конденсатора, тогда третьи тела мало влияют на емкость.

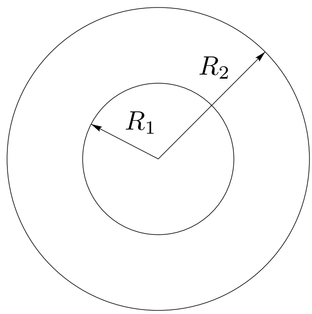
Иногда говорят о емкости уединенного проводника. Под этим подразумевают отношение $C = q/\varphi$, где q — заряд проводника, φ — потенциал проводника, причем потенциал нормирован на бесконечности $\varphi_{\mathbf{r}\to\infty} \to 0$.

Проводники называют *обкладками* конденсатора, а разность потенциалов на обкладках называют еще *напряжением* U на конденсаторе.

Плоский конденсатор. Плоский конденсатор представляет собой две параллельные бесконечные проводящие пластины, отстоящие на расстояние d друг от друга. Конечно, в данном случае нужно говорить о емкости на единицу площади пластин. Если пластины заряжены с поверхностной плотностью заряда σ и $-\sigma$, то нетрудно построить решение электростатической задачи: поле между пластинами равно $E = \sigma/\varepsilon_0$ и перпендикулярно к пластинам, а поле в остальном пространстве равно нулю.



Плоский конденсатор
(в разрезе)



Цилиндрический или сферический
конденсаторы (в разрезе)

Напряжение на конденсаторе $U = Ed = \sigma d/\varepsilon_0$. Заряд на площади S равен $Q = \sigma S$. Емкость равна

$$C = \varepsilon_0 S/d.$$

Приближенно эта формула верна и для конденсатора конечных размеров, если только размеры пластин много больше расстояния между ними.

Цилиндрический конденсатор. Цилиндрический конденсатор представляет собой два бесконечных проводящих коаксиальных цилиндра радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. В этом случае нужно говорить о емкости на единицу длины цилиндров. Если внутренний цилиндр заряжен с линейной плотностью λ, то поле между цилиндрами равно

$$E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$$

и направлено по радиусу, а поле внутри малого цилиндра и вне большого равно нулю. Напряжение на конденсаторе

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Заряд на длине L равен $Q = \lambda L$. Емкость равна

$$C = 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(R_2/R_1).$$

Приближенно эта формула годится и для конденсатора конечных размеров, если его длина много больше радиуса R_2.

Если радиусы обкладок близки друг к другу $R_2 = R_1 + d$, $d \ll R_1$, то ($\ln(1+x) \approx x$)

$$C \approx 2\pi\varepsilon_0 L R_1/d = \varepsilon_0 S/d,$$

то есть мы возвращаемся к формуле для плоского конденсатора.

Сферический конденсатор. Сферический конденсатор представляет собой две проводящие концентрические сферы радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Если заряд внутренней сферы равен q, то поле между сферами равно

$$E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

и направлено по радиусу, а поле внутри малой сферы и вне большой равно нулю. Напряжение на конденсаторе

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Емкость равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2/(R_2 - R_1).$$

Если $R_2 = R_1 + d$, $d \ll R_1$, то

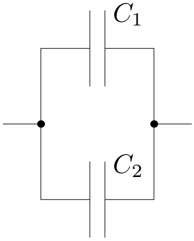
$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 R_1^2/d = \varepsilon_0 S/d,$$

и мы снова получаем формулу для емкости плоского конденсатора.

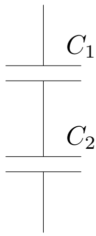
Конденсатор, заполненный диэлектриком. Мы рассмотрим только плоский конденсатор. Пусть он заполнен диэлектриком с проницаемостью ε, но, как мы предлагали при рассмотрении граничных условий для диэлектриков, будем считать, что между обкладками и диэлектриком имеется небольшой зазор. Согласно граничным условиям для проводников поле в зазоре по-прежнему равно $E = \sigma/\varepsilon_0$. Однако поле в диэлектрике, согласно граничному условию $D_{n1} = D_{n2}$, будет уже в ε раз меньше $E = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$. Соответственно будет меньше и напряжение $U = \sigma d/\varepsilon\varepsilon_0$, а емкость, наоборот, больше

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d.$$

Для конденсаторов другой геометрии результат аналогичен: заполнение конденсатора диэлектриком приводит к увеличению его емкости в ε раз.



Параллельное соединение конденсаторов



Последовательное соединение конденсаторов

Параллельное и последовательное соединение конденсаторов. Конденсаторы можно соединять параллельно и последовательно, как показано на рисунке. При этом, как нетрудно догадаться, соединенные конденсаторы ведут себя как один конденсатор (заряд пропорционален напряжению). Вычислим емкость параллельно и последовательно соединенных конденсаторов.

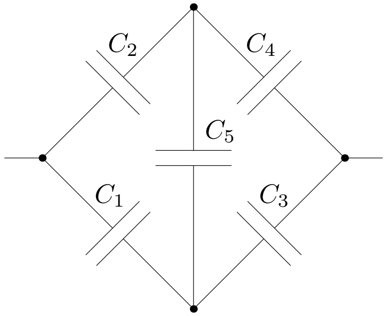
При параллельном соединении напряжение на конденсаторах одно и то же и совпадает с “внешним” напряжением $U_1 = U_2 = U$. Полный же заряд равен сумме зарядов конденсаторов $Q = Q_1 + Q_2$. Поэтому емкость

$$C = Q/U = Q_1/U_1 + Q_2/U_2 = C_1 + C_2.$$

При последовательном соединении заряды на конденсаторах равны и равны “внешнему заряду” $Q_1 = Q_2 = Q$. “Внешнее” напряжение равно сумме напряжений на конденсаторах $U = U_1 + U_2$. Обратная емкость

$$1/C = U/Q = U_1/Q_1 + U_2/Q_2 = 1/C_1 + 1/C_2.$$

Замечание. Соединения конденсаторов не обязательно сводятся к последовательным и параллельным. Для примера на рисунке приведено соединение, которое нельзя разложить на параллельные и последовательные.



Пять конденсаторов

Домашнее задание. Попробуйте определить емкость такого соединения.

Сила, действующая на тело в электростатическом поле.

Сила, действующая на точечный заряд. На точечный заряд в ЭМ поле действует сила Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. В электростатике второе слагаемое равно нулю

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Тут надо сделать одну оговорку. В качестве поля $\mathbf{E}$ нужно брать поле всех зарядов, кроме самого заряда q. Если, например, у нас есть три заряда q_1, q_2, q_3 в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, то на первый заряд действует сила

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \left[\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) q_3}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \right].$$

Замечание. Аналогично можно вычислить силу, действующую на протяженное тело, заряженное “внешними” зарядами. Нужно вычислить поле, которое создают все тела, кроме данного, и вычислить интеграл

$$\mathbf{F} = \int_G \rho \mathbf{E}\, d^3 r$$

по области, которое занимает тело.

Сила, действующая на тело, при наличии проводников или диэлектриков. Если у нас есть проводники и диэлектрики, дело осложняется тем, что присутствуют не только "внешние", но и поляризационные заряды. Конечно, найдя решение электростатической задачи, можно восстановить и плотность зарядов, а затем вычислить силу. Но есть более короткий путь: силу можно выразить непосредственно через поле $\mathbf{E}$. Пишем

$$\mathbf{F} = \int_G \rho \mathbf{E}\, d^3r.$$

Здесь уже поле $\mathbf{E}$ — это полное поле, включая и поле, созданное зарядами в теле.

Замечание. Таким образом, мы учитываем и "самодействие" зарядов. Конечно, полное "самодействие" всех зарядов в теле равно нулю. В электростатике это довольно очевидно, однако в динамической теории проблема самодействия не так проста.

Дальнейшие вычисления не так просты, приводим их в качестве дополнительного материала.

Вспомним уравнения электростатики

$$\nabla \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Нам удобно будет работать в тензорных обозначениях

$$\partial_k E_k = \rho/\varepsilon_0, \quad \partial_i E_k = \partial_k E_i.$$

Имеем

$$\begin{aligned} F_i = \int_G \rho E_i\, d^3r = \varepsilon_0 \int_G (\partial_k E_k) E_i\, d^3r = \\ = \varepsilon_0 \int_G [\partial_k (E_k E_i) - E_k (\partial_k E_i)]\, d^3r = \varepsilon_0 \int_G [\partial_k (E_k E_i) - E_k (\partial_i E_k)]\, d^3r = \\ = \varepsilon_0 \int_G [\partial_k (E_k E_i) - \partial_i (E^2/2)]\, d^3r = \varepsilon_0 \int_{\partial G} [n_k E_k E_i - n_i (E^2/2)]\, dS \end{aligned}$$

($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе области G).

Итак, сила, действующая на тело, равна

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0 \int_{\partial G} [\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n}) - \mathbf{n}E^2/2]\, dS.$$

Замечания. Интеграл можно брать не только по границе тела, но и по любой охватывающей поверхности, лишь бы внутрь не попало лишних зарядов. Разумеется, вокруг тела должен быть вакуум (хотя бы тонкая прослойка). Какие силы действуют на тело, погруженное в (жидкий) диэлектрик, — это отдельный вопрос и мы его касаться не будем.

В конце курса мы увидим, что эта формула связана с *потоком импульса* ЭМ поля.

Рассмотрим пример. Вычислим, с какой силой отталкиваются две полусферы проводящей сферы радиуса R с зарядом q. Поле на границе сферы равно $E = q/4\pi\varepsilon_0 R$ и направлено радиально (по нормали к поверхности). Вводя сферические координаты и интегрируя по верхней полусфере, получаем

$$F_z = \varepsilon_0 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \cos\theta E^2/2 = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

(Попробуйте получить этот результат, вычисляя отталкивание по закону Кулона!)

Энергия электростатического поля

Поскольку на тела в электрическом поле действуют силы, то уместно поставить вопрос о работе этих сил, а затем и об энергии. Правда, в рамках электростатики перемещать тела нельзя, но, если это перемещение очень медленное (сравни с квазистатическими процессами в термодинамике), то можно. Простейший случай — точечный заряд во внешнем поле. Сила, действующая на заряд,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi$$

потенциальна, так что можно говорить о потенциальной энергии

$$W = q\varphi.$$

Следующий случай — система точечных зарядов. Выше мы выписывали соответствующее выражение для силы. Нетрудно написать потенциальную энергию системы N зарядов

$$W = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

Замечание. Энергию непрерывно распределенных "внешних" зарядов можно вычислить по аналогичной формуле

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') \, d^3r \, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) \, d^3r.$$

Множитель $1/2$ появился из-за того, что в интеграле невозможно наложить условие $i < j$, которое мы накладывали для точечных зарядов. Конечно, в интеграл входит и "самодействие" зарядов.

Если присутствуют проводники или диэлектрики, то простых формул написать уже нельзя, поскольку при перемещении тел меняются поляризационные заряды. Теперь уже нужно решать электростатическую задачу, находить поляризационные заряды и только затем вычислять энергию. Аналогично тому, как мы поступили с силой, проще выразить энергию непосредственно через электрическое поле.

Исходная формула

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r})\, d^3 r.$$

Интегрируем сначала по конечной области G. Используя уравнения электростатики $\nabla \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ и $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и теорему Гаусса, можно записать

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_G \varphi \nabla \mathbf{E}\, d^3 r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_G [\nabla(\varphi \mathbf{E}) - \mathbf{E}\nabla\varphi]\, d^3 r = \\ = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_{\partial G} \varphi E_n\, dS + \int_G E^2\, d^3 r \right).$$

Теперь растягиваем область G до бесконечности. Если заряды расположены в конечной области пространства, то при $r \to \infty$ имеем $E \sim 1/r^2$, $\varphi \sim 1/r$. Интеграл по границе стремится к нулю, окончательно

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2\, d^3 r.$$

Полученная формула не только решает задачу, но и подсказывает новую интерпретацию потенциальной энергии. В механике мы говорили о кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия была связана с частицей самой по себе, а кинетическая энергия системы равнялась просто сумме кинетических энергий частиц. Потенциальная же энергия была одна на всю систему. Теперь мы видим, что потенциальную энергию естественно приписать *полю*. Поскольку поле — распределенная система, естественно говорить о плотности энергии, энергии в области, потоке энергии.

Энергия электрического поля в области G равна

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_G E^2\, d^3 r.$$

Величина $w = \varepsilon_0 E^2/2$ называется *плотностью энергии* электрического поля.

Замечание. В конце курса мы увидим, что это выражение может быть получено прямо из уравнений Максвелла. Кроме того, мы получим локальный закон сохранения энергии, аналогичный закону сохранения заряда.

Если в задаче есть точечные заряды, то энергия поля, очевидно, расходится. В самом деле, для двух точечных зарядов

$$(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2.$$

Поскольку $E \sim 1/r^2$ при $r \to 0$, интегралы от первых двух членов расходятся. Однако они не зависят от положения зарядов, так что представляют просто постоянную (хоть и бесконечную) добавку к энергии (она называется *собственной энергией* заряда). Можно отсчитывать энергию от этой (бесконечной) величины, тогда интеграл от оставшегося третьего члена как раз даст энергию взаимодействия точечных зарядов.

Домашнее задание. Доказать это вам будет, пожалуй, трудновато. Решите более простую задачу. Пусть есть две бесконечные параллельные пластины, заряженные с поверхностными плотностями σ и $-\sigma$, а между ними располагается точечный заряд q. Вычислите энергию поля (за вычетом собственной энергии точечного заряда и однородного поля между пластинами). Покажите, что на заряд действует сила $F = q\sigma/\varepsilon_0$.

Все сказанное выше относится к вакууму (с тривиальным обобщением на проводники). Если имеются диэлектрики, то выражение для плотности энергии нужно модифицировать. Физически это связано с тем, что при поляризации диэлектрика натягиваются некие внутренние “пружинки”, удерживающие заряды, из которых состоит диэлектрик (в проводнике таких “пружинок” нет). Это приводит к появлению дополнительной потенциальной энергии, которая, хоть и не относится к собственно полю, но входит в общий баланс. Для диэлектриков, в которых $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$,

$$w = \mathbf{DE}/2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2.$$

Вычислим энергию плоского конденсатора. Имеем $E = \sigma/\varepsilon_0$. Поэтому

$$W = (\varepsilon_0/2)(\sigma/\varepsilon_0)^2 Sd = (\sigma S)^2/2(\varepsilon_0 S/d) = Q^2/2C.$$

Эта формула справедлива и для конденсаторов другой конструкции, а также для конденсатора, заполненного диэлектриком.