Постоянный ток

Мы приступаем к изучению уравнений Максвелла в случае постоянных токов. О магнитном поле, создаваемом этими токами, мы еще будем говорить в следующем разделе. Здесь же нас будет интересовать протекание тока по проводникам. Тем не менее, выпишем все уравнения Максвелла в случае постоянных ρ и $\mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, \qquad & \nabla\times\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla\mathbf{B} &= 0, \qquad & c^2\nabla\times\mathbf{B} &= \mathbf{j}/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Уравнения первого столбца нам сейчас неинтересны. Вычисляя дивергенцию от нижнего уравнения правого столбца, избавляемся от магнитного поля $\nabla\mathbf{j} = 0$. Итак, уравнения, которыми описывается протекание постоянного тока по проводникам, имеют вид

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0, \quad \nabla\mathbf{j} = 0.$$

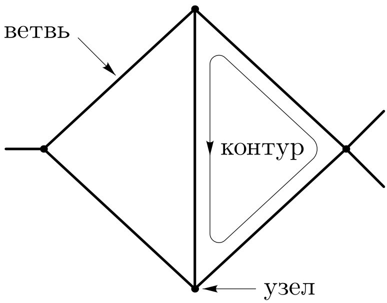
Первое из них, как и раньше, означает, что электрическое поле потенциально.

Цепи постоянного тока

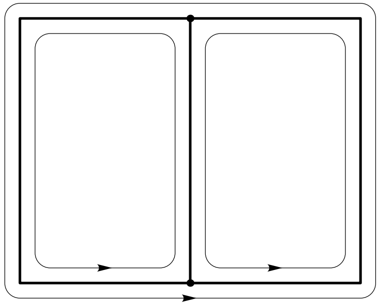
Основная часть задач, стоящих перед теорией, относится к расчету *электрических цепей постоянного тока.* С математической точки зрения электрическая цепь представляет собой *граф.* Она состоит из *узлов*, соединенных *ветвями.* Узел — это точка, в которой соединяется три или более ветвей. В каждой ветви находятся какие-то *элементы* электрической цепи (соединенные последовательно). Несколько последовательных ветвей, приводящих в исходную точку цепи, образуют *контур.*

Наряду с замкнутыми цепями, все ветви которых соединяют узлы данной цепи, можно рассматривать и незамкнутые цепи, некоторые ветви которых только одним концом присоединены к узлу данной цепи, а другим концом — к узлу какой-то другой цепи. Такая ситуация встречается, когда мы рассматриваем не всю цепь, а только ее часть.

Для контуров цепи естественно определены операции *инверсии* (изменения направления на противоположное) и *объединения.* Совокупность контуров назовем *независимой*, если ни один из них не может быть получен из остальных посредством этих операций. Совокупность контуров назовем



Цепь, узел, ветвь, контур



Объединение контуров

полной, если любой контур может быть получен из них с помощью операций инверсии и объединения. (Сравните с определением базисных векторов в линейной алгебре.)

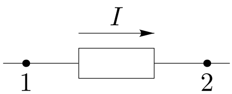
Мы рассмотрим два элемента электрических цепей постоянного тока.

Резистор. Резистор — это такой элемент цепи, разность потенциалов на котором пропорциональна току через него

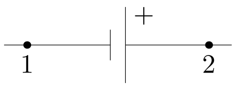
$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = RI,$$

где R — *сопротивление* резистора. Оказывается, что такая зависимость характерна для проводников. Она называется *законом Ома.*

Замечание. Конечно же, закон Ома относится к свойствам вещества, а не ЭМ поля так такового. В этом смысле он столь же нефундаментален, как материальное уравнение.



Резистор



Источник ЭДС

Источник ЭДС. Источник ЭДС — это такой элемент цепи, разность потенциалов на котором постоянна независимо от тока через него. Эту разность потенциалов называют *электродвижущей силой (ЭДС)* и обозначают $\mathcal{E}$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}.$$

Замечание. Иногда говорят, что для наличия ЭДС должны существовать силы “неэлектростатической природы”. С подобным утверждением легко согласиться в случае *генераторов*, в которых разность потенциалов возникает за счет электромагнитной индукции. Однако в *гальванических элементах* и *аккумуляторах* ЭДС создается исключительно за счет химических реакций, которые полностью объясняются законом Кулона.

Иногда говорят об *источнике ЭДС* $\mathcal{E}$ *с внутренним сопротивлением* r. Это означает просто последовательно соединенный источник ЭДС $\mathcal{E}$ и резистор r.

Замечание. Иногда вводят еще *источники тока*, но мы воздержимся.

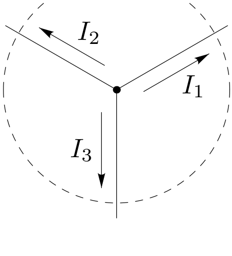
Рассмотренный нами ранее конденсатор с точки зрения постоянного тока представляет собой просто разрыв в цепи. Мы восстановим его в правах, когда будем говорить о квазистационарных явлениях.

Правила Кирхгофа

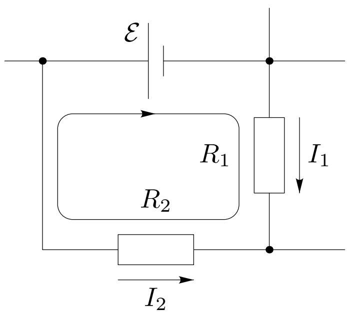
Первое правило Кирхгофа. Рассмотрим какой-либо узел электрической цепи. Возьмем область, содержащую в себе этот узел и не содержащую других узлов или элементов цепи. Проинтегрируем уравнение $\nabla \mathbf{j} = 0$ по этой области. С помощью теоремы Гаусса преобразуем интеграл по области в интеграл по границе. Интеграл по границе равен просто сумме токов, вытекающих из узла по всем присоединенным к нему ветвям

$$\sum_k I_k = 0.$$

Это равенство называется *первым правилом Кирхгофа*. Оно выражает закон сохранения заряда для случая постоянных токов.



К первому правилу Кирхгофа



Ко второму правилу Кирхгофа

Второе правило Кирхгофа. Рассмотрим какой-либо контур электрической цепи. Он является границей некоторой натянутой на него поверхности. Проинтегрируем уравнение $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ по этой поверхности. С помощью теоремы Стокса преобразуем интеграл по поверхности в интеграл по контуру. Интегралы по отдельным ветвям, содержащимся в контуре, равны просто разности потенциалов на элементах цепи, включенных в эти ветви. Разделяя вклады от резисторов и источников ЭДС, можно написать

$$\sum_k I_k R_k = \sum_n \mathcal{E}_n.$$

Это равенство называется *вторым правилом Кирхгофа.* Оно выражает факт потенциальности электрического поля в случае постоянных токов.

Применение правил Кирхгофа. Вообще говоря, правила Кирхгофа справедливы для любого узла цепи и любого контура. Для расчета цепей с использованием правил Кирхгофа нужно уметь выписывать достаточное (для определения всех неизвестных) количество независимых уравнений.

Мы рассмотрим один из способов записи уравнений, когда в качестве неизвестных величин выбираются токи во всех ветвях цепи. Таким образом, прежде всего нужно ввести токи во всех ветвях цепи, обозначить их и выбрать их направления. Направления можно выбирать произвольно. Если вы "ошибетесь" с выбором направления тока, то, решив задачу и вычислив его, получите отрицательное значение — это и означает, что в действительности направление тока противоположно тому, что вы выбрали.

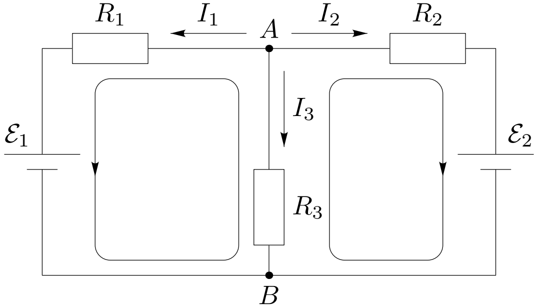
Теперь нужно записать уравнения для токов. Начнем с первого правила Кирхгофа. Рассмотрим сначала замкнутую цепь. Первое правило Кирхгофа нужно записать для всех узлов, кроме одного. Уравнение для последнего узла будет линейной комбинацией уже выписанных уравнений. Действительно, каждый ток входит в правила Кирхгофа два раза: один раз как вытекающий из узла, а второй раз — как втекающий в (другой) узел. Поэтому сумма левых частей первого правила Кирхгофа для всех узлов цепи равна нулю тождественно. Итак, первое правило Кирхгофа нужно записать для всех узлов цепи, кроме одного. Узел, для которого вы не будете писать первого правила Кирхгофа, можно выбирать произвольно. При записи уравнения вытекающие (согласно выбранным вами направлениям) из узла токи входят в сумму со знаком плюс, а втекающие — со знаком минус. (Можно и наоборот. Можно даже писать то так, то сяк для разных узлов. Но лучше всегда писать так, как я сказал.)

Рассмотрим теперь незамкнутую цепь. В этом случае у вас есть ветви, по которым токи втекают и вытекают в цепь извне. Эти "внешние" токи должны быть заданы. Записав первое правило Кирхгофа для всех узлов, замечаем, что сумма левых частей есть просто сумма “внешних” токов. Таким образом, сумма “внешних” токов должна быть равна нулю (иначе задача неразрешима). Если же сумма “внешних” токов равна нулю, то сумма левых частей первых правил Кирхгофа для всех узлов равна нулю тождественно. Стало быть, как и в случае замкнутой цепи, мы должны писать первое правило Кирхгофа для всех узлов, кроме одного.

Перейдем ко второму правилу. Пусть у нас есть полная система независимых контуров. Второе правило Кирхгофа нужно записать для каждого контура этой системы. Уравнение для любого другого контура будет линейной комбинацией уже выписанных уравнений, поскольку любой контур можно получить из полной системы независимых с помощью операций инверсии и объединения. Итак, прежде всего нужно выбрать полную систему независимых контуров. (В простых схемах это легко. Более того, существует множество способов выбора. Годится любой, на ваш вкус.) Нужно выбрать направление в каждом контуре (собственно, это входит в определение контура). При написании уравнений член IR (в левой части равенства) нужно брать со знаком плюс, если ток I сонаправлен с направлением контура, и со знаком минус в обратном случае. Член $\mathcal{E}$ (в правой части равенства) нужно брать со знаком плюс, если ЭДС “старается создать ток в направлении контура”, и со знаком минус в обратном случае.

В теории графов доказывается, что число узлов минус один плюс число независимых контуров равно числу ветвей. Таким образом, мы написали ровно столько уравнений, сколько нужно. По построению они линейно независимы, поэтому мы можем найти токи.

Домашнее задание. Стребуйте доказательство этого утверждения у математиков.



Пример применения правил Кирхгофа

Рассмотрим пример применения правил Кирхгофа. В приведенной на рисунке цепи три ветви. Обозначим токи, текущие через резисторы R_1, R_2, R_3 через I_1, I_2, I_3 (направления токов показаны на рисунке). В цепи два узла: A и B. Запишем первое правило Кирхгофа для узла A

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Полная система независимых контуров состоит из двух контуров. Можно, например, взять контуры $AR_1\mathcal{E}_1BR_3A$ и $AR_2\mathcal{E}_2BR_3A$ (направления контуров показаны на рисунке). Запишем второе правило Кирхгофа для этих контуров

$$\begin{aligned} I_1R_1 - I_3R_3 &= -\mathcal{E}_1, \\ I_2R_2 - I_3R_3 &= -\mathcal{E}_2. \end{aligned}$$

Из выписанных трех уравнений определяем токи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_2R_3 - \mathcal{E}_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_1R_3 - \mathcal{E}_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1},$$
$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}.$$

Домашнее задание. Получите эти формулы.

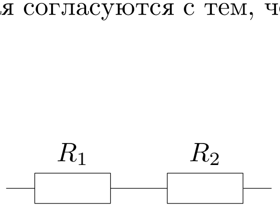
В предельном случае $R_1 \to \infty$ (обрыв ветви с R_1) получаем

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{\mathcal{E}_2}{R_2+R_3}, \quad I_3 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2+R_3}.$$

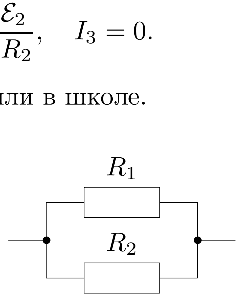
В предельном случае $R_3 \to \infty$ (обрыв ветви с R_3) получаем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_1+R_2}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1+R_2}, \quad I_3 = 0.$$

Оба случая согласуются с тем, чему вас учили в школе.



Последовательное соединение резисторов



Параллельное соединение резисторов

Последовательное и параллельное соединение резисторов. Рассмотрим последовательное и параллельное соединение резисторов. Нетрудно сообразить, что последовательно и параллельно соединенные резисторы ведут себя как один резистор, то есть ток через них пропорционален напряжению. Проще всего вычислить сопротивление при последовательном соединении. Ток I через оба резистора один и тот же, а "внешнее" напряжение U равно сумме напряжений на резисторах $U = U_1 + U_2$. Согласно определению резистора $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$, поэтому

$$R = U/I = U_1/I + U_2/I = R_1 + R_2.$$

Для вычисления сопротивления при параллельном соединении применим правила Кирхгофа. Первое правило говорит нам, что "внешний" ток равен сумме токов через резисторы $I = I_1 + I_2$. Второе правило (для единственного контура) приводит к равенству $I_1R_1 - I_2R_2 = 0$. "Внешнее" напряжение $U = I_1R_1 = I_2R_2$, поэтому

$$1/R = I/U = I_1/U + I_2/U = 1/R_1 + 1/R_2.$$

Замечание. Фактически мы пользовались правилами Кирхгофа (хотя и не говорили об этом), когда вычисляли емкость параллельно соединенных конденсаторов. Теперь вам должно быть понятно, как вычислить емкость "пяти конденсаторов". Аналогично и соединения резисторов могут не сводится к параллельному и последовательному. Теперь вы знаете, как вычислять сопротивление в произвольном случае.

Баланс энергии в цепях постоянного тока. Электростатическая аналогия

Мы начали этот раздел с дифференциальных уравнений

$$\nabla\mathbf{j} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

но очень быстро перешли к "интегральным" правилам Кирхгофа. Теперь мы возвращаемся к "дифференциальной" точке зрения.

Как мы помним, на заряд в электрическом поле действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Мощность, развиваемая этой силой есть произведение силы на скорость заряда $P = q\mathbf{v}\mathbf{E}$. Произведение $q\mathbf{v}$ соответствует плотности тока. Итак, мощность, развиваемая электрическим полем в области G, равна

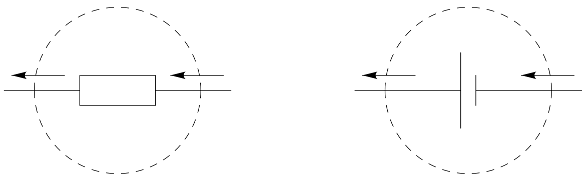
$$P = \int_G \mathbf{j}\mathbf{E}\, d^3r.$$

Замечание. В конце курса мы поговорим о сохранении энергии в электромагнитной теории и увидим, что это выражение возникает "само собой" из уравнений Максвелла.

Используя потенциальность поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и теорему Гаусса, можно переписать это выражение в виде

$$P = -\int_{\partial G} j_n \varphi \, dS + \int_G \varphi \nabla \mathbf{j} \, d^3 r = -\int_{\partial G} j_n \varphi \, dS$$

(при получении последнего равенства мы учли, что $\nabla \mathbf{j} = 0$).



К вычислению мощности на резисторе и источнике ЭДС

Применим полученное равенство к резистору. В качестве области G возьмем область, содержащую только этот резистор. Тогда интеграл по границе сведется к двум слагаемым по проводам, которыми резистор подключен в цепь. Мы получим

$$P = IU = I^2 R$$

— так называемый *закон Джоуля—Ленца.* Эта мощность выделяется на резисторе в виде тепла.

Применяя формулу для мощности к источнику ЭДС, найдем

$$P = -I\mathcal{E}$$

(предполагается, что направление тока согласовано с ЭДС, тогда мощность поля отрицательна).

Наконец, применяя формулу для мощности ко всей цепи, получаем, что сумма мощностей по всем резисторам и всем ЭДС равна

$$\sum_k I_k^2 R_k - \sum_n \mathcal{E}_n I_n = -\sum_p \varphi_p I_p,$$

где справа стоит сумма по всем узлам, с которых стекают токи I_p вовне цепи (для незамкнутой цепи). В силу условия $\sum_p I_p = 0$, обсуждавшегося выше, правая часть не зависит от выбора начала отсчета потенциала.

Уравнений для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ недостаточно для решения задачи (сравни с электростатикой диэлектриков). Нужно как-то связать их друг с другом. Выше мы определили резистор как элемент цепи, напряжение на котором линейно связано с током через него. Эта связь в дифференциальной форме выглядит так

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

(так называемый *закон Ома в дифференциальной форме*), где σ характеризует среду (материал проводника) и называется *удельной проводимостью.* Обратная к ней величина $\rho = 1/\sigma$ называется *удельным сопротивлением.*

Замечание. Выше мы уже отмечали нефундаментальность закона Ома. Теперь мы ясно видим, что закон Ома в дифференциальной форме аналогичен материальному уравнению в электростатике диэлектриков.

Если проводник имеет постоянное сечение S и длину L, электрическое поле в нем однородно, а ток равномерно распределен по сечению, то

$$I = jS = \sigma S E = \sigma S U/L = U/R,$$

где $R = L/\sigma S = \rho L/S$ — сопротивление проводника.

Используя равенство $P = \int_G \mathbf{j}\mathbf{E}\, d^3r$ и закон Ома в дифференциальной форме, можно написать

$$P = \int_G \sigma E^2\, d^3r.$$

Это соотношение называют *законом Джоуля—Ленца в дифференциальной форме.*

Отметим формальную аналогию между уравнениями электростатики и уравнениями постоянного тока. В электростатике (диэлектриков) в отсутствие “внешних” зарядов

$$\nabla \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Уравнения постоянного тока

$$\nabla \mathbf{j} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Видно, что поле $\mathbf{j}$ соответствует полю $\mathbf{D}$, если отождествить σ с $\varepsilon\varepsilon_0$. При этом мощность в задаче постоянного тока соответствует энергии поля в электростатике. Таким образом, зная решение какой-либо электростатической задачи, можно тут же получить решение соответствующей задачи постоянного тока. При этом проводнику в электростатике (который можно рассматривать как диэлектрик с $\varepsilon \to \infty$) соответствует сверхпроводник (с $\sigma \to \infty$) в задаче постоянного тока.

На практике эту аналогию используют в обратную сторону: по известному решению задачи постоянного тока получают решение электростатической задачи. Дело в том, что решение задачи постоянного тока нетрудно получить экспериментально. Для этого в ванну наливают подсоленную воду (обладающую сравнительно низкой проводимостью), расставляют медные проводники надлежащей формы (медь — хороший проводник, так что играет роль "сверхпроводника") и подключают их к источникам ЭДС. Обычным вольтметром можно исследовать эквипотенциальные поверхности поля $\mathbf{E}$.