

## Квазистационарное приближение. Электромагнитная индукция

В квазистационарном приближении пренебрегают производной  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  в уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\mathbf{B} &= 0, & c^2\nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

При этом производной  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  отнюдь не пренебрегают. На первый взгляд, здесь есть противоречие. Рассмотрим вопрос детальнее. Пусть характерные размеры системы  $l$ , а характерное время изменения полей  $t$ . Тогда производные по времени имеют порядок  $1/t$ , а по координатам —  $1/l$ . Предположим, что производная  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  имеет тот же порядок, что  $\nabla \times \mathbf{E}$ , то есть

$$E/l \sim B/t.$$

Тогда отношение члена  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  к члену  $c^2\nabla \times \mathbf{B}$  будет порядка

$$\frac{E/t}{c^2 B/l} \sim (l/ct)^2.$$

Ниже мы рассмотрим полные уравнения Максвелла и покажем, что электромагнитные волны распространяются со скоростью  $c$ , а пока возьмем этот факт “взаймы”. Если размеры системы  $l$  малы по сравнению с расстоянием  $ct$ , которое пробегает электромагнитная волна за характерное время изменения полей, то вычисленное отношение много меньше единицы, и действительно можно пренебрегать производной  $\partial\mathbf{E}/\partial t$ , сохраняя в то же время производную  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Например, для усилителя низкой частоты (звуковых колебаний,  $t \sim 1/20000$  с), величина  $ct \sim 10^4$  м, и конечно процессы, протекающие в усилителе с размерами порядка 1 м, можно считать квазистационарными.

Есть еще одно условие, которое должно выполняться. Член  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  должен быть не только много меньше  $c^2\nabla \times \mathbf{B}$ , но и много меньше  $\mathbf{j}/\varepsilon_0$ . Как мы уже отмечали, во многих случаях справедливо феноменологическое соотношение  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ . Таким образом, должно выполняться еще условие

$$\sigma/\varepsilon_0 \ll 1/t.$$

Для проводников это выполняется с огромным запасом ( $\sigma \sim 10^8$  1/Ом·м). Для диэлектриков приближение несправедливо ( $\sigma \sim 10^{-13}$  1/Ом·м) и уж

конечно оно несправедливо для вакуума, где вообще нет проводимости. С математической точки зрения это означает, что конденсатор (и только его) нужно описывать полными уравнениями Максвелла.

С физической точки зрения квазистационарное приближение соответствует, с одной стороны, отсутствию *запаздывания*, связанного с распространением ЭМ волн. Это дает возможность описывать процессы в электрических цепях, основываясь на представлении о сосредоточенных элементах (резисторах, конденсаторах, катушках индуктивности). С математической точки зрения такие цепи описываются уравнениями в обыкновенных, а не в частных производных.

С другой стороны, квазистационарное приближение соответствует отсутствию *излучения* ЭМ волн. Это дает возможность сформулировать баланс энергии также на языке сосредоточенных элементов.

Итак, мы будем исследовать уравнения

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, & c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} / \varepsilon_0.\end{aligned}$$

## Обобщенные правила Кирхгофа

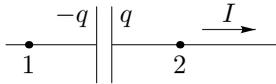
**Элементы электрических цепей.** Мы будем рассматривать те же электрические цепи, что при изучении постоянного тока, однако появятся новые элементы. Кроме того, теперь мы будем вместо разности потенциалов говорить об интеграле от электрического поля по пути, по-прежнему называя это напряжением. Поскольку уравнение  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  теперь неверно, электрическое поле, вообще говоря, непотенциально.

**Конденсатор.** Конденсатор — это такой элемент цепи, напряжение на котором пропорционально заряду на нем

$$U = \int_{1 \rightarrow 2} E_\tau dl = -q/C.$$

Коэффициент пропорциональности называется *емкостью* конденсатора (иногда *электроемкостью*). Отметим, что заряды на обеих обкладках равны по модулю и противоположны по знаку, а ток через конденсатор связан с зарядом на нем равенством

$$I = -dq/dt.$$



Конденсатор



Катушка индуктивности

**Катушка индуктивности.** Катушка индуктивности — это такой элемент цепи, напряжение на котором пропорционально изменению тока через него

$$U = -L dI/dt.$$

Коэффициент пропорциональности называется *индуктивностью*. Иногда катушки могут быть индуктивно связаны друг с другом (например, намотаны на общий каркас), тогда в формуле для напряжения появляется дополнительный член

$$U = -(L dI/dt + M dI'/dt),$$

где  $M$  — коэффициент *взаимной индукции*, а  $I'$  — ток через вторую катушку.

**Замечание.** Строго говоря, такое определение катушки условно. Так называемая ЭДС индукции определена только для замкнутого контура. Иначе говоря, сказанное выше справедливо, лишь если выводы катушки замкнуть.

**Первое правило Кирхгофа.** Поскольку уравнение  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  то же, что в случае постоянных токов, первое правило Кирхгофа остается без изменений

$$\sum_k I_k = 0.$$

**Второе правило Кирхгофа.** Рассмотрим какой-либо контур  $\partial S$  цепи. Будем интегрировать уравнение  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  по поверхности  $S$ , ограниченной этим контуром. Интеграл от левой части при помощи теоремы Стокса преобразуется в интеграл от электрического поля по контуру  $\int_{\partial S} E_\tau dl$ . Каждый конденсатор, резистор и источник ЭДС вносят в этот интеграл соответствующие вклады. Для вычисления интеграла от правой части пренебрежем магнитным полем везде, кроме катушек. Тогда в правой части стоит производная по времени от потока магнитного поля через все катушки, входящие в контур  $-d\Phi_B/dt$ . Поток магнитного поля через катушку обусловлен током через нее, а если есть индуктивно связанные катушки, то и токами через другие катушки. Иначе говоря,  $\Phi_B = LI + MI'$ .

Дифференцируя, мы получаем выписанный уже выше вклад, который дает катушка. Окончательно

$$\sum_k I_k R_k + \sum_p q_p / C_p = \sum_l \mathcal{E}_l - \sum_n L_n dI_n / dt.$$

(Для определенности мы написали равенство в случае отсутствия индуктивно связанных катушек.) Как видно, отличие от постоянного тока состоит в появлении дополнительных членов в правой части, которые обычно называют *ЭДС индукции*

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L dI / dt.$$

Применяются обобщенные правила Кирхгофа так же, как обычные.

**Баланс энергии в электрических цепях.** В дополнение к мощности, рассеиваемой на резисторе, и мощности, развиваемой источником ЭДС, в квазистационарных цепях есть еще энергия конденсатора  $W = q^2 / 2C$  и энергия катушки  $W = LI^2 / 2$ . Баланс энергии выглядит так: сумма энергий всех конденсаторов и катушек меняется за счет рассеяния энергии на резисторах и работы источников ЭДС

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{q_k^2}{2C_k} + \sum_p \frac{L_p I_p^2}{2} \right) = - \sum_l I_l^2 R_l + \sum_n \mathcal{E}_n I_n.$$

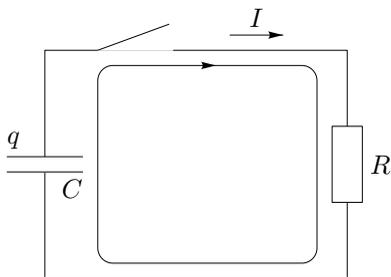
(В случае постоянных токов левая часть была равна нулю.)

## Нестационарные процессы в электрических цепях с источниками постоянной ЭДС

**Цепи первого порядка. Релаксация.** Цепями первого порядка (название не общепринятое) я называю цепи, в которых есть либо только конденсаторы, либо только катушки. Мы рассмотрим простейшие одноконтурные схемы, которые будут описываться дифференциальными уравнениями первого порядка.

Рассмотрим цепь состоящую из конденсатора и резистора. Пусть конденсатор был сперва заряжен от источника ЭДС, а затем разряжается через резистор. Выбор положительной обкладки конденсатора, направление тока и направление обхода контура показаны на рисунке. По второму правилу Кирхгофа

$$-q/C + IR = 0.$$



$RC$ -цепочка

При этом нужно учесть, что  $I = -\dot{q}$ . Начальное условие — заряженный конденсатор  $q(0) = q_0 = C\mathcal{E}$ . Итак,

$$q/C + \dot{q}R = 0, \quad q(0) = C\mathcal{E}.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$q = q_0 e^{-t/RC}.$$

При этом ток

$$I = -\dot{q} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}.$$

Величину  $\tau = RC$  называют *постоянной времени*  $RC$ -цепи, поскольку она задает характерное время разрядки конденсатора.

Вычислим количество теплоты, выделяющееся на резисторе за все время разрядки конденсатора

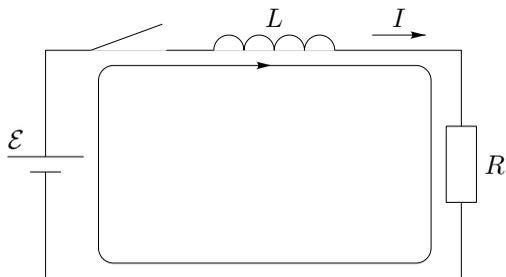
$$Q = \int_0^{\infty} I^2(t)R dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Это как раз равно энергии, запасенной первоначально в конденсаторе.

**Домашнее задание.** Рассмотрите вариант этой схемы, когда конденсатор *заряжается* от источника ЭДС через резистор.

Рассмотрим цепь, состоящую из катушки и резистора. Пусть в начальный момент включается источник ЭДС. Вычислим, как меняется ток в цепи. По второму правилу Кирхгофа

$$IR = \mathcal{E} - L\dot{I}, \quad I(0) = 0.$$



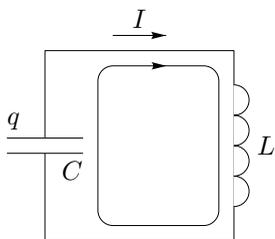
$RL$ -цепочка

Решение этой задачи

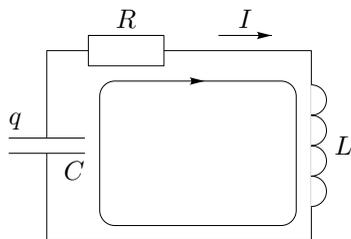
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right).$$

Величину  $\tau = L/R$  называют постоянной времени  $LR$ -цепи, поскольку она определяет характерный масштаб времени установления тока.

**Цепи второго порядка. Колебания.** Рассмотрим теперь цепи, в которых присутствуют и катушки и конденсаторы. Простейший случай — цепь из катушки и конденсатора, так называемый *колебательный контур*.



Колебательный контур



Колебательный контур с сопротивлением

По второму правилу Кирхгофа  $-q/C = -L\dot{I}$ , причем  $I = -\dot{q}$ . Итак

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$q = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, а

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

— *формула Томсона*. Ток в контуре

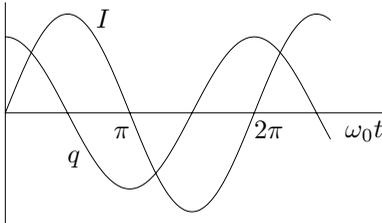
$$I = -\dot{q} = \omega_0(A \sin \omega_0 t - B \cos \omega_0 t).$$

Значения постоянных  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий. Так, если первоначально конденсатор заряжен  $q(0) = q_0$ , а тока в цепи нет  $I(0) = 0$ , то решение имеет вид  $q = q_0 \cos \omega_0 t$ . Энергии конденсатора и катушки

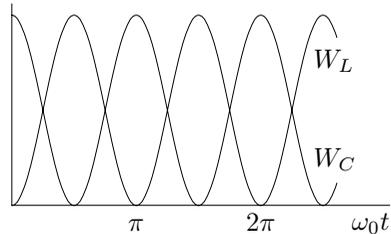
$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t,$$

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t.$$

Их сумма, как и полагается, равна первоначальной энергии конденсатора  $W_C + W_L = q_0^2/2C$ .



Зависимость заряда на конденсаторе и тока в контуре от времени



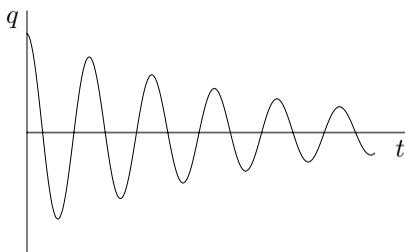
Зависимость энергии конденсатора и катушки индуктивности от времени

Приведем для справки решение задачи в случае, когда в контуре есть сопротивление. По второму правилу Кирхгофа

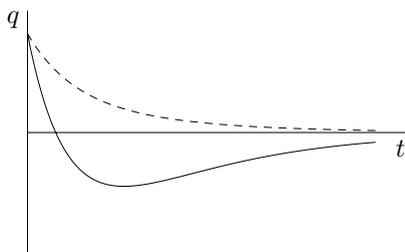
$$IR - q/C = -L\dot{I}.$$

Дифференциальное уравнение для  $q$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$



Затухающие колебания



Апериодический режим

Его решение зависит от соотношения параметров  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и  $\gamma = R/2L$ .

а)  $\gamma < \omega_0$ . Решение описывает *затухающие колебания*

$$q = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)e^{-\gamma t},$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

б)  $\gamma > \omega_0$ . Решение описывает *апериодический режим*

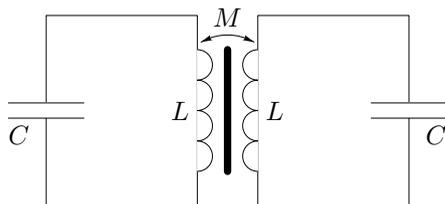
$$q = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t},$$

где  $\gamma_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ .

в)  $\gamma > \omega_0$ . Вырожденный случай апериодических колебаний

$$q = (At + B)e^{-\gamma t}.$$

**Замечание.** В многоконтурных схемах будет не одна, а несколько постоянных времени, не одна, а несколько частот колебаний. Общее решение будет линейной комбинацией решений с разными постоянными времени или частотами колебаний.



Связанные контуры

**Домашнее задание.** Вычислите, какие частоты колебаний возможны в системе двух одинаковых индуктивно связанных контуров. Емкости конденсаторов  $C$ , индуктивности катушек  $L$ , взаимная индуктивность  $M$ . Ответ:  $\omega = 1/\sqrt{LC(1 \pm M/L)}$ .

## Стационарные процессы в электрических цепях с гармоническими источниками ЭДС

**Немного математики. Комплексные числа. Преобразование Фурье.** *Комплексным числом* называется пара  $z = (x, y)$  двух вещественных чисел. Для комплексных чисел вводятся операции сложения и умножения

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Нетрудно проверить, что они обладают всеми свойствами сложения и умножения вещественных чисел (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность ...). Нулем является число  $(0, 0)$ , а единицей — число  $(1, 0)$ .

**Домашнее задание.** Выведите формулы вычитания и деления.

Числа вида  $(x, 0)$  при сложении и умножении снова дают числа того же вида, нуль и единица имеют тот же вид. Естественно отождествить такие числа с вещественными числами. В связи с этим  $x$  называют *вещественной частью* комплексного числа, а  $y$  — *мнимой частью*.

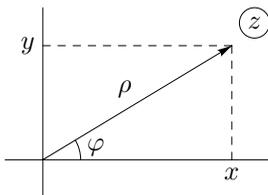
Нетрудно проверить, что любое комплексное число можно записать в виде

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) * (y, 0).$$

Число  $i = (0, 1)$  называют *мнимой единицей*. Нетрудно проверить, что  $i^2 = (-1, 0)$ . Поэтому еще одной распространенной записью комплексного числа является

$$z = x + iy.$$

В такой записи можно производить над числами все алгебраические операции, как над вещественными, не забывая заменять  $i^2$  на  $-1$ .



Комплексная плоскость

Правило сложения комплексных чисел подсказывает их геометрическую интерпретацию. Комплексное число — это точка на плоскости (*комплексной плоскости*) или вектор, проведенный в эту точку. Ось  $x$  называют *вещественной осью* (на ней расположены вещественные числа), а ось  $y$  — *мнимой осью*. Сложение комплексных чисел интерпретируется как сложение векторов.

Умножение интерпретировать сложнее. *Модулем* комплексного числа называется длина вектора  $(x, y)$ , то есть  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . *Аргументом* комплексного числа называется угол, который составляет вектор  $(x, y)$  с вещественной осью, то есть  $\varphi = \arctg y/x$ . Оказывается, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

**Домашнее задание.** Докажите это.

Функции комплексного переменного легче всего определить через разложения в ряды. Берем разложение в ряд функции вещественного переменного, заменяем вещественное число комплексным и вновь суммируем. Справедлива *формула Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

**Домашнее задание.** Докажите ее, пользуясь разложением в ряды. Указание:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ,  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$ ,  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$

Формула Эйлера позволяет записать комплексное число в виде

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

из которого геометрическая интерпретация операции умножения становится очевидной.

Комплексные числа удобны при решении линейных уравнений. Рассмотрим сначала однородные уравнения. Будем считать неизвестные величины (токи, заряды, напряжения) комплексными и искать их в виде  $ae^{-i\omega t}$ , где  $a$  и  $\omega$  — вообще говоря, комплексные числа (при этом амплитуды у разных неизвестных разные, а частота — одна и та же). Поскольку производная экспоненты (в отличие от синуса и косинуса) есть снова экспонента, то для амплитуд и частоты получаются алгебраические уравнения. Относительно амплитуд эти уравнения линейны и однородны. Условие разрешимости (определитель матрицы системы равен нулю) приводит к уравнению для определения частот, которых в многоконтурных схемах может быть несколько. Каждой частоте соответствует набор амплитуд (“собственный вектор”). Общее решение представляет собой суперпозицию найденных “собственных колебаний” с произвольными коэффициентами. Нетрудно проверить, что вещественная и мнимая части этого решения в свою очередь будут решениями, но уже вещественными. Комплексные произвольные коэффициенты перейдут в вещественное решение в виде своих вещественных и мнимых частей. Значения этих произвольных коэффициентов определяются из начальных условий.

Если уравнения неоднородные (например, есть ЭДС, меняющиеся во времени), то нужно начать со случая, когда неоднородность меняется гармонически (то есть ЭДС равна  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ). Далее, делаем неоднородность комплексной ( $\mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t + \varphi)}$ ) и ищем решение в прежнем виде  $ae^{-i\omega t}$  с той же частотой, что у неоднородности. Опять-таки для амплитуд получается система линейных, но на этот раз неоднородных, уравнений. Решая ее, находим амплитуды.

Особая роль гармонических функций состоит в том, что любую функцию (с точностью до некоторых математических формальностей) можно представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} F(\omega)$$

с надлежащим образом подобранной функцией  $F(\omega)$ , то есть в виде суперпозиции гармонических функций. Эта формула называется *преобразованием Фурье*. Функция  $F(\omega)$  может быть вычислена по известной  $f(t)$  следующим образом

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} f(t).$$

Иначе говоря, если вы знаете отклик линейной системы на гармоническое возмущение, вы знаете ее отклик на *любое* возмущение. Теперь вы должны понимать, в чем состоит метод Фурье решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Возмущение (в нашем случае — переменная ЭДС) раскладывается по гармоническим функциям. Решается задача для гармонического возмущения с произвольной частотой. С помощью преобразования Фурье возвращаются от частоты ко времени.

Наконец, общее решение неоднородного уравнения складывается из построенных выше частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, которое получается отбрасыванием неоднородности.

**Замечания.** Если функция строго периодическая,  $f(t + T) = f(t)$ , то ее можно разложить в *ряд Фурье*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-2\pi i n t / T}$$

с надлежащим образом подобранными коэффициентами  $a_n$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{2\pi i n t / T} dt.$$

В электротехнике прижился противоположный знак в показателе экспоненты, поэтому мы в дальнейшем тоже будем писать  $e^{i\omega t}$ , а не  $e^{-i\omega t}$ .

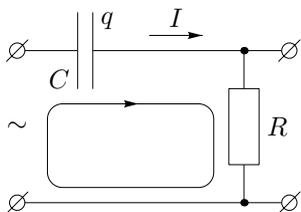
**Цепи первого порядка. Фильтры.** Рассмотрим последовательно соединенные конденсатор и резистор. Пусть на них подается гармоническое напряжение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\mathcal{E}_0$ . Вычислим напряжение на резисторе.

Согласно сказанному выше вводим комплексную ЭДС  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ . Истинная ЭДС пусть будет равна вещественной части  $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . По второму правилу Кирхгофа

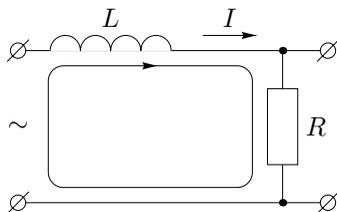
$$IR - q/C = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Учитывая связь  $I = -\dot{q}$ , получаем дифференциальное уравнение

$$-R\dot{q} - q/C = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$



RC-фильтр



RL-фильтр

Будем искать  $q$  в виде  $q = q_0 e^{i\omega t}$ , где  $q_0$  уже может быть и не вещественно. Подставляем в уравнение и находим

$$q_0 = -\frac{\mathcal{E}_0}{i\omega R + 1/C}.$$

Ток описывается такой же формулой  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , причем из связи  $I = -\dot{q}$  получаем  $I_0 = -i\omega q_0$ , поэтому

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + 1/i\omega C}.$$

Эта формула выглядит так, как будто конденсатор обладает сопротивлением

$$X_C = 1/i\omega C.$$

Величину  $X_C$  называют *комплексным сопротивлением* или *импедансом*.

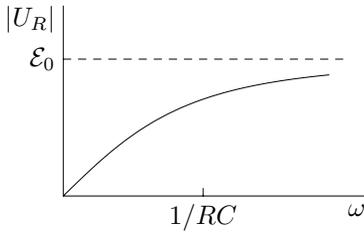
Амплитуду напряжения на резисторе получим, вычислив модуль тока и умножив его на  $R$

$$|U_R| = \frac{\mathcal{E}_0 R}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}.$$

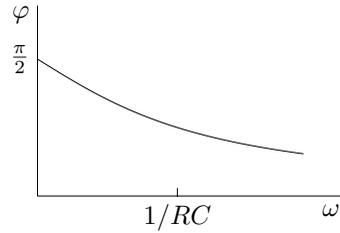
Эту зависимость называют *амплитудно-частотной характеристикой* фильтра. Наш фильтр хорошо пропускает высокие частоты и подавляет низкие.

Однако  $I_0$  комплексно. Это означает, что при вычислении вещественной части выражения  $I_0 e^{i\omega t}$  (а мы договорились, что именно вещественная часть дает истинное решение) появится не только  $\cos \omega t$ , как в ЭДС, но и  $\sin \omega t$ . Иначе говоря, ток сдвинут по фазе относительно напряжения. Эту фазу вычислим, вычислив аргумент  $I_0$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}.$$



Амплитудно-частотная характеристика  
RC-фильтра



Фазово-частотная характеристика  
RC-фильтра

Зависимость  $\varphi(\omega)$  называется *фазово-частотной характеристикой* фильтра.

Рассмотрим теперь фильтр из катушки и резистора. По второму правилу Кирхгофа

$$IR = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} - L\dot{I}.$$

Ищем ток в виде  $I = I_0 e^{i\omega t}$ . Тогда

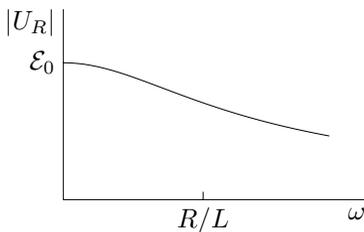
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + i\omega L}.$$

Величину  $X_L = i\omega L$  также называют комплексным сопротивлением. Амплитудно-частотная и фазово-частотные характеристики фильтра таковы

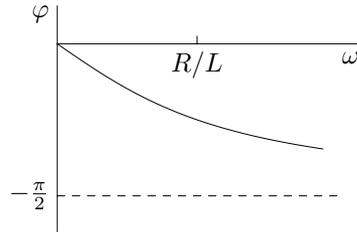
$$|U_R| = \frac{\mathcal{E}_0 R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \omega L/R.$$

Этот фильтр хорошо пропускает низкие частоты и подавляет высокие.



Амплитудно-частотная характеристика  
RL-фильтра



Фазово-частотная характеристика  
RL-фильтра

**Цепи второго порядка. Резонанс.** Посмотрим теперь, что происходит, если последовательно соединить конденсатор, катушку и резистор и подать на них гармоническое напряжение. По второму правилу Кирхгофа

$$-q/C + IR = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} - LI \dot{.}$$

Учитывая связь  $I = -\dot{q}$ , можно написать

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}e^{i\omega t}.$$

Решение ищем в виде  $q = q_0 e^{i\omega t}$ , тогда

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0/L}{1/LC - \omega^2 + i\omega R/L}.$$

Вычислим ток:  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , причем  $I_0 = -i\omega q_0$ . Находим

$$I_0 = -\frac{i\omega\mathcal{E}_0/L}{1/LC - \omega^2 + i\omega R/L}.$$

Найдем амплитуды напряжений на всех элементах. На конденсаторе

$$|U_C| = |q_0|/C = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}}$$

(мы ввели те же обозначения  $\omega_0$  и  $\gamma$ , что при рассмотрении колебаний). На резисторе

$$|U_R| = |I_0|R = \frac{2\omega\gamma\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}}.$$

Для вычисления напряжения на катушке нужно еще раз продифференцировать ток

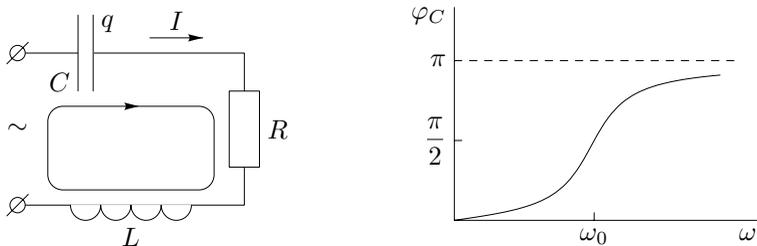
$$|U_L| = |\dot{I}|L = \frac{\omega^2 \mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}}.$$

Графики зависимости напряжений от частоты показаны на рисунке. Обратите внимание, что при  $\gamma \ll \omega_0$  максимумы на кривых  $U_{C,L}(\omega)$  (при  $\omega \approx \omega_0$ ) могут быть много выше  $\mathcal{E}_0$  (порядка  $(\omega_0/2\gamma)\mathcal{E}_0$ ). Это явление называется *резонансом*.

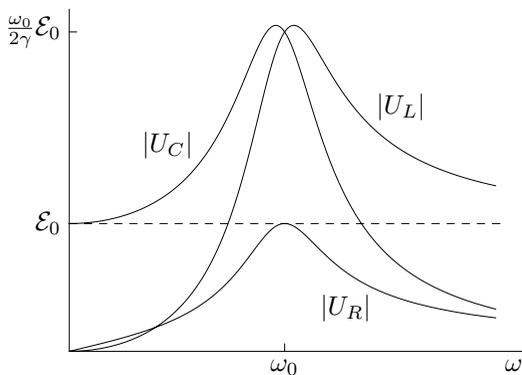
Приведем фазовые сдвиги для всех элементов схемы

$$\varphi_C = \arctg \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\varphi_R = \varphi_C - \pi/2, \quad \varphi_L = \varphi_C - \pi (= \varphi_C + \pi).$$



К расчету установившихся колебаний Фазовый сдвиг напряжения на конденсаторе



Резонансные кривые

**Замечание.** Многоконтурные схемы могут иметь еще более изощренные амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики.

**Домашнее задание.** Какая (качественно) амплитудно-частотная характеристика у предложенной выше схемы из двух индуктивно связанных колебательных контуров?

Мы рассчитали стационарный режим электрических цепей. Если в цепи есть диссипация энергии (то есть резисторы), то именно этот режим устанавливается по прошествии достаточно большого времени. Однако в начальный период в цепи могут также происходить нестационарные процессы, рассмотренные нами ранее. Иначе говоря, в полном соответствии с учением о линейных дифференциальных уравнениях, общее решение представляет собой суперпозицию установившихся колебаний и нестационарных процессов. С течением времени нестационарные процессы замирают и остаются только установившиеся колебания.

## Электромагнитная индукция

Общий закон электромагнитной индукции гласит: ЭДС индукции, возникающая в контуре, равна производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, натянутую на контур (в силу уравнения  $\nabla \mathbf{B} = 0$  все такие потоки одинаковы)

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

При этом направление нормали к поверхности при определении потока должно быть согласовано с направлением обхода контура при определении знака ЭДС по правилу правого винта.

Поток через контур может изменяться из-за двух причин: изменения во времени магнитного поля при неизменном положении контура или движения контура (а также изменения его формы) при неизменном поле.

В первом случае ЭДС возникает за счет *вихревого электрического поля*, которое возникает при изменении магнитного согласно уравнению  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , и мы сразу получаем закон ЭМ индукции, интегрируя это уравнение по поверхности, натянутой на контур.

Во втором случае физика ЭДС индукции несколько иная. Никакого вихревого электрического поля нет, поскольку магнитное поле не меняется. Однако электроны, двигаясь вместе с проводником, имеют составляющую скорости, перпендикулярную проводнику. Эта составляющая скорости приводит к вкладу в силу Лоренца, интеграл от которого по контуру и дает ЭДС. Проследим это подробнее. Наше рассмотрение будет существенно опираться на вычисление работы при перемещении проводника, проделанное нами ранее.

Пусть проводник описывается параметрически  $\mathbf{r}(s, t)$ , где  $s \in [0, 1]$  — параметр вдоль проводника, а  $t$  — время (проводник замкнут, так что  $\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{r}(1, t)$ ). Скорость электрона, находящегося в точке проводника с параметром  $s$  равна  $\mathbf{v} = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ , где первое слагаемое описывает скорость электрона вдоль проводника. Сила Лоренца, действующая на электрон, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q \left( \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right),$$

где первое слагаемое перпендикулярно контуру. При интегрировании по контуру (чтобы получить ЭДС) оно выпадает, так что

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int_{\partial S} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right)_{\tau} dl = \int_0^1 \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds.$$

Дальнейшее совсем просто и дословно совпадает с вычислением работы по перемещению контура. Интегрируя ЭДС по времени, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}_{\text{инд}}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 ds \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) \mathbf{B} = -(\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)).$$

Дифференцируя полученное соотношение по  $t_2$ , окончательно находим

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

**Замечание.** Внимательный читатель заметил, что составляющая скорости электрона вдоль контура приводит как раз к вычисленной ранее работе по перемещению контура. Совпадают и величины работ. Таким образом, полная работа силы Лоренца равна, как и полагается, нулю, но сила Лоренца выполняет роль своеобразного рычага: она преобразует наши усилия по движению контура в *перпендикулярном* к контуру направлении в ЭДС индукции, которая движет электроны *вдоль* контура.

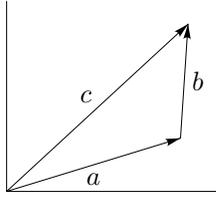
## Сложение колебаний

Выше мы отмечали, что в многоконтурных схемах токи (напряжения) представляют собой суммы слагаемых вида  $ae^{i\omega t}$ . Если все  $\omega$  вещественны, то есть отдельные слагаемые представляют собой (незатухающие) колебания, то о сумме говорят как о сумме колебаний. Мы рассмотрим кратко основные особенности такого *сложения колебаний*.

**Сложение колебаний одной частоты. Векторная диаграмма.** Рассмотрим сперва простейший случай, когда складываются два колебания одинаковой частоты. Пусть они описываются комплексными функциями  $ae^{i\omega t}$  и  $be^{i\omega t}$ . Ясно, что результат сложения — колебание  $ce^{i\omega t}$  с той же частотой, причем  $c = a + b$ . Напомним, что  $a$  и  $b$  — вообще говоря, комплексные числа. Результат сложения удобно геометрически изобразить на комплексной плоскости. Эту картинку называют *векторной диаграммой*. Разумеется, мы нарисовали ее для начального момента времени. Вся картина вращается против часовой стрелки вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$ . Истинные колебания (отдельные и сумма) есть вещественные части соответствующих комплексных чисел.

Найдем амплитуду и начальную фазу суммарного колебания, считая, что известны амплитуды и фазы слагаемых. Обозначим начальные фазы колебаний-слагаемых через  $\alpha$  и  $\beta$ , а начальную фазу суммы через  $\gamma$ . Тогда  $a = (|a| \cos \alpha, |a| \sin \alpha)$ ,  $b = (|b| \cos \beta, |b| \sin \beta)$ . Вычисляя модуль суммы  $a + b$ , получим

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \cos(\alpha - \beta).$$



Векторная диаграмма

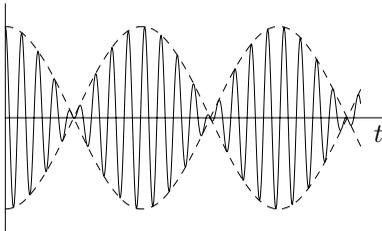
(Этот же результат можно получить чисто геометрически, по теореме косинусов.) Отношение мнимой и вещественной частей суммы  $a + b$  равно  $\operatorname{tg} \gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|a| \sin \alpha + |b| \sin \beta}{|a| \cos \alpha + |b| \cos \beta}.$$

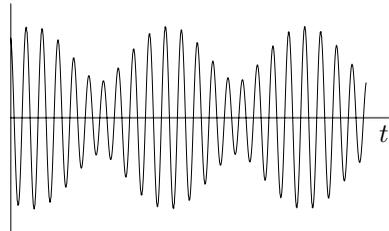
**Сложение колебаний близких частот. Биения.** Сложим колебания  $\cos \omega_1 t$  и  $\cos \omega_2 t$ . По формуле суммы косинусов

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right).$$

Если частоты близки  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ , то первый множитель меняется гораздо быстрее второго. Можно представлять себе второй множитель как медленно меняющуюся амплитуду колебаний, описываемых первым множителем. Такую картину колебаний называют *биениями*. Биения возникают, например, при настройке гитары, когда она уже почти настроена, а вы извлекаете один и тот же звук на разных струнах. График медленно меняющейся амплитуды называют *огibaющей*.



Сумма  $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ .  
Пунктиром показана огibaющая



Сложение произвольных колебаний

Векторная диаграмма позволяет понять, что происходит в случае сложения произвольных колебаний (а не только колебаний с совпадающими амплитудами и фазами, которые мы только что рассмотрели). Суммарное колебание по-прежнему представляется суммой векторов, однако теперь они вращаются с разными угловыми скоростями. Ясно, что минимальная амплитуда равна модулю разности амплитуд слагаемых (а не нулю), а максимальная — их сумме. Ясно, что колебания по-прежнему происходят с частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ , а амплитуда меняется с частотой  $|\omega_1 - \omega_2|$ .

**Сложение перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.** Рассмотрим теперь другое сложение колебаний, которое возникает, например, когда вы подаете на  $x$ - и  $y$ -входы осциллографа напряжения с двух разных источников. Луч осциллографа описывает на плоскости кривую, которая описывается параметрически

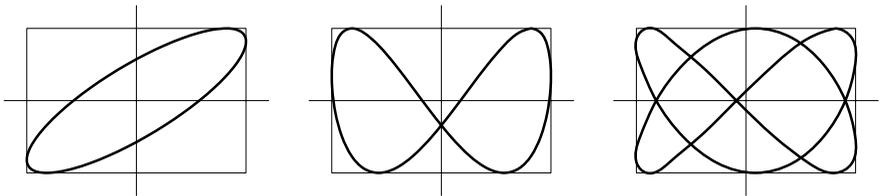
$$x = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y = b \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

При произвольном соотношении частот эта кривая заполняет весь квадрат  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Однако если частоты относятся как (небольшие) целые числа

$$\omega_1/\omega_2 = m/n,$$

то траектория является замкнутой кривой. Такие кривые называются *фигурами Лиссажу*.

**Домашнее задание.** (Для умелых.) Покажите, что фигура Лиссажу — алгебраическая кривая, то есть имеет уравнение  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  — полином.



Фигура Лиссажу  
с отношением частот 1 : 1

С отношением частот 1 : 2

С отношением частот 2 : 3

Фигуры Лиссажу применяются, например, для измерения частоты колебаний. На вход  $y$  осциллографа подают сигнал, частоту которого требуется определить, а на вход  $x$  — сигнал от генератора с известной частотой. Изменяя частоту генератора, добиваются появления фигуры Лиссажу.

Подсчитывают, сколько раз фигура Лиссажу пересекает ось  $x$  и сколько раз она пересекает ось  $y$  (или любые другие прямые, параллельные осям  $x$  и  $y$ ). Отношение этих чисел равно отношению частот исследуемого сигнала и генератора.

**Замечание.** Фигуры Лиссажу образуются и при негармонических сигналах по  $x$  и/или  $y$ . Качественно фигуры выглядят так же, как для гармонических сигналов (по крайней мере пока имеется единственный минимум и единственный максимум на период), но форма кривых немного другая.