Полные уравнения Максвелла. Электромагнитные волны.

Вот мы и дожили до изучения полных уравнений Максвелла

$$\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\mathbf{B} = 0, \qquad c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

План нашего изложения будет таков. Сначала мы покажем, что сохранение обеих производных $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\partial\mathbf{E}/\partial t$ приводит к новому эффекту: ЭМ поле может существовать вовсе без зарядов в виде ЭМ волн. Затем мы рассмотрим, как возбуждаются ЭМ волны движущимися зарядами. После этого мы обсудим важный вопрос о локальных законах сохранения для распределенных систем, каковой является ЭМ поле. Один пример такого рода — закон сохранения электрического заряда — мы уже обсуждали в самом начале курса. И наконец, мы расскажем о связи электромагнитной теории с принципом относительности. Это приведет нас к специальной теории относительности: преобразованиям Лоренца, преобразованиям полей и зарядов, необходимости модифицировать второй закон Ньютона.

Электромагнитные волны

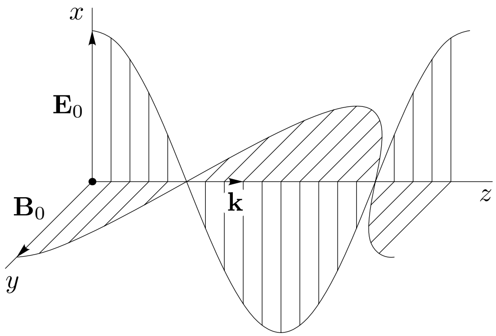
Рассмотрим уравнения Максвелла без токов и зарядов

$$\nabla\mathbf{E} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\mathbf{B} = 0, \quad c^2\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Оказывается, что они имеют отличные от нуля решения. Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}.$$

Такой вид решения называется *плоской волной*. Величина ω — *частота волны*, $\mathbf{k}$ — *волновой вектор*. Если волновой вектор направлен вдоль оси z (этого всегда можно добиться выбором осей координат), то показатель экспоненты равен $i(kz - \omega t) = ik[z - (\omega/k)t]$. Мы видим, что поля вовсе не зависят от x и y, а зависимость от z и t имеет вид $z - vt$. Это означает, что картина распределения полей не меняется, но смещается вдоль оси z



Плоская ЭМ волна

со скоростью $v = \omega/k$. Разумеется, истинные значения полей равны вещественным частям комплексных решений. Они меняются (и во времени и в пространстве) по законам синуса и косинуса, поэтому наши волны называются *гармоническими.*

Подставим предполагаемый вид решения в уравнения. После сокращения на $ie^{-i\omega t+i\mathbf{kr}}$ получим

$$\mathbf{kE}_0 = 0, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{B}_0,$$
$$\mathbf{kB}_0 = 0, \quad c^2\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0 = -\omega\mathbf{E}_0.$$

Левая колонка означает, что поля в волне перпендикулярны направлению распространения. В связи с этим ЭМ волны называют *поперечными.* Из первого уравнения правой колонки видно, что электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу, а векторы $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$ составляют правую тройку. Модули векторов связаны равенством $E_0 = (\omega/k)B_0$. Отсутствие мнимой единицы в уравнениях говорит о том, что поля меняются софазно. Наконец, уравнения правой колонки позволяют связать ω с $\mathbf{k}$ и определить скорость волн. Действительно, выражая $\mathbf{B}_0$ из правого верхнего уравнения и подставляя в правое нижнее, находим

$$c^2\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0) = -\omega^2\mathbf{B}_0.$$

Левую часть можно переписать в виде $\mathbf{k}(\mathbf{kB}_0) - k^2\mathbf{B}_0 = -k^2\mathbf{B}_0$, так что

$$c^2k^2 = \omega^2$$

и мы видим, что скорость распространения ЭМ волн равна $\omega/k = c$. Одновременно находим $E_0 = cB_0$.

Замечания. В духе того, что мы говорили о роли гармонических колебаний, можно записать общее решение уравнений Максвелла без токов и зарядов в виде суперпозиции плоских волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{E}_0(\mathbf{k})e^{-ickt+i\mathbf{kr}},\quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0(\mathbf{k})}{ck}e^{-ickt+i\mathbf{kr}},$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{k})$ — произвольная функция (плюс такое же выражение с другим знаком перед t в экспоненте).

Для уравнений Максвелла в однородной среде без внешних токов и зарядов (поляризационные, конечно же, есть)

$$\nabla\mathbf{D}=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

при условиях $\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}$ также существуют решения в виде плоских волн, причем их скорость $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Практически для большинства материалов $\mu\approx 1$, поэтому пишут $v=c/\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, показатель преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$, но мы уже вторгаемся в область оптики, так что нужно остановиться.

Общее решение уравнений Максвелла. Запаздывающие потенциалы.

В духе тех общих решений, которые мы выписывали в электростатике и задачах с постоянным магнитным полем, существует общее решение уравнений Максвелла в вакууме при известных токах и зарядах.

Скалярный и векторный потенциалы. Волновые уравнения. Мы уже вводили (скалярный) потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, но делали это в частных случаях постоянных полей. Разберемся в общем случае.

Из уравнения $\nabla\mathbf{B}=0$ в силу одной из "четырех теорем" следует, что

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}.$$

Величину $\mathbf{A}$ называют *векторным потенциалом.* Подставляя $\mathbf{B}$, выраженное через векторный потенциал, в уравнение $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$, получим

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0.$$

В силу одной из "четырех теорем"

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi.$$

Величина φ называется *скалярным потенциалом.*

Отметим, что по заданным полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ потенциалы определены неоднозначно. Так, потенциалы

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla f,\quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}$$

приводят к тем же значениям полей, что и потенциалы $\mathbf{A}$, φ.

Домашнее задание. Проверьте это утверждение.

Указанные преобразования потенциалов, не меняющие полей, называются *калибровочными преобразованиями*, а выбор конкретной функции f — *калибровкой* (или выбором калибровки).

Функцию f можно подобрать так, чтобы

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}+\nabla\mathbf{A}'=0.$$

Эта калибровка называется *калибровкой Лоренца*. Действительно, пусть f удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\Delta f=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\mathbf{A}.$$

Это уравнение называется *уравнением Даламбера*. Оно является обобщением уравнения Лапласа и при разумных дополнительных условиях разрешимо. Тогда $\mathbf{A}'$ и φ' удовлетворяют условию калибровки Лоренца.

Домашнее задание. Проверьте это утверждение.

Подставим поля, выраженные через потенциалы, в оставшиеся уравнения Максвелла. Уравнение $\nabla\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ принимает вид

$$-\Delta\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A}=\rho/\varepsilon_0.$$

С помощью условия Лоренца можно переписать его в форме

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\rho/\varepsilon_0.$$

Уравнение $c^2\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{j}/\varepsilon_0+\partial\mathbf{E}/\partial t$ принимает вид

$$c^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mathbf{j}/\varepsilon_0+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Учитывая равенство $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}$ и условие Лоренца, можно переписать его в форме

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}=\mathbf{j}/c^2\varepsilon_0.$$

Мы видим, что уравнения для φ и $\mathbf{A}$ получились фактически одинаковыми. Более того, если опустить производные по времени, то они совпадают с уравнениями для потенциалов в электростатике и постоянном магнитном поле. Уравнения для φ и $\mathbf{A}$ называют *волновыми уравнениями.*

Запаздывающие потенциалы. Общее решение уравнений для φ и $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r',\quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{4\pi\varepsilon_0c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'.$$

Это решение называют *запаздывающими потенциалами.*

Название связано с тем, что токи и заряды в формулах берутся в моменты времени $t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$. Запаздывание $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ нужно для того, чтобы ЭМ волна из точки $\mathbf{r}'$ успела дойти до точки $\mathbf{r}$.

Если токи и заряды от времени не зависят, то мы возвращаемся к общим решениям, уже известным нам из электростатики и постоянного магнитного поля. Удивительно, что единственным отличием общих решений для произвольных полей является запаздывание.

В случае постоянных полей не было вопроса о начальных условиях. Теперь же нужно указать, каким начальным условиям соответствуют приведенные решения. Поскольку уравнения для потенциалов имеют второй порядок по времени, таких начальных условий два: нужно задать сами потенциалы $\varphi(\mathbf{r},0)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},0)$ и их производные по времени $\partial\varphi/\partial t(\mathbf{r},0)$, $\partial\mathbf{A}/\partial t(\mathbf{r},0)$.

Трудность в том, что из-за запаздывания потенциалы зависят не только от токов и зарядов в момент $t=0$, но и от всей предыстории. Для того чтобы сформулировать начальную задачу, можно рассуждать следующим образом. Пусть заданы плотность заряда $\rho(\mathbf{r},t)$ и тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ при $t>0$. Продолжим их каким-либо образом на интервал $t<0$ (вплоть до $-\infty$). Вычислим запаздывающие потенциалы в момент времени $t=0$ и их производные по времени в этот момент. Вычисленные величины могут, вообще говоря, отличаться от истинных начальных условий. Решим уравнения Максвелла без токов и зарядов с начальными условиями, равными разности запаздывающих потенциалов и истинных начальных условий (мы рассматривали такого рода решения в предыдущем разделе). Тогда сумма этого решения и запаздывающих потенциалов дает решение задачи с истинными начальными условиями.

Как мы уже отмечали в самом начале курса, нельзя задавать токи и заряды произвольно. Должно выполняться равенство

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\mathbf{j}=0.$$

Разумеется, это же равенство должно выполняться для “продолжения” токов и зарядов на интервал $t<0$.

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ вычисляются по найденным потенциалам по формулам

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi,\quad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}.$$

Если начальные условия заданы для полей, а не для потенциалов, то нужно пересчитать их к потенциалам с помощью этих же формул и условия Лоренца.

Потенциалы Льенара—Вихерта

Потенциалы Льенара—Вихерта. Как ни странно, но потенциалы, создаваемые точечным зарядом, не равны подынтегральным выражениям в формулах для запаздывающих потенциалов.

Плотность заряда и тока для точечного заряда имеют вид

$$\rho(\mathbf{r},t)=q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)),\quad \mathbf{j}(\mathbf{r},t)=q\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, а $\mathbf{R}(t)$ — закон движения точечного заряда. Отсюда видно, в чем сложность: под интегралом

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'$$

стоит $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))$. Перепишем интеграл в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ = \int d^3r' \int dt' \, \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}(t'))\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

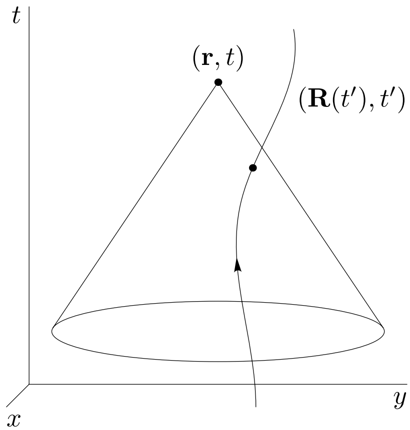
Теперь интеграл по $\mathbf{r}'$ вычисляется

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int dt' \, \frac{q\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|/c)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|}.$$

Оставшийся интеграл вычислить уже несложно. Отметим, что аргумент дельта-функции обращается в нуль

$$t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|/c = 0$$

при единственном t', если только заряд движется со скоростью меньше скорости света $\dot{\mathbf{R}} < c$. Действительно, поверхность $(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ есть *световой конус прошлого* для точки $(\mathbf{r}, t)$ и *мировая линия* заряда $(\mathbf{R}(t'), t')$ пересекает его только в одной точке.



Световой конус прошлого и мировая линия заряда.
Наклон мировой линии всегда меньше наклона образующих конуса

Пользуясь свойством $\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|$, где $f(x_0) = 0$, можно записать потенциалы точечного заряда в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c\right)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\varphi(\mathbf{r}, t),$$

где $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{R}(t')$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t')$. Эти формулы называются *потенциалами Льенара—Вихерта*. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ могут быть вычислены по общим формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Вычисление довольно громоздко и приводит к результату

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - v^2/c^2)(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c)}{4\pi\varepsilon_0(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{q\tilde{\mathbf{r}} \times ((\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}})}{4\pi\varepsilon_0 c^2(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3},$$
$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}/\tilde{r}c.$$

Чтобы продемонстрировать, что описывают эти формулы, рассмотрим два примера: поле равномерно движущегося заряда и поле колеблющегося заряда в дальней зоне.

Поле равномерно движущегося заряда. Пусть заряд движется равномерно вдоль оси x. Тогда $\mathbf{R}(t) = (vt, 0, 0)$. Уравнение для определения t' квадратное

$$(1 - v^2/c^2)t'^2 - 2(t - vx/c^2)t' + (t^2 - r^2/c^2) = 0.$$

Его корни

$$(1 - v^2/c^2)t' = t - vx/c^2 \pm \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)},$$

причем нам подходит только знак минус, поскольку должно быть $t' < t$ (запаздывание). Поскольку $\tilde{r} = c(t - t')$, то выражение $\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c = \mathbf{r} - \mathbf{v}t' - \mathbf{v}(t - t') = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, а выражение $\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c = c(t - t') - (x - vt')v/c = c[t - vx/c^2 - (1 - v^2/c^2)t']$. Подставляя найденное значение t', получим

$$\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}.$$

Окончательно

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}},$$
$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

Значения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно найти по общим формулам $\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi/c^2$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}/\tilde{r}c = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$.

Сравним полученное решение с полем точечного заряда в электростатике

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

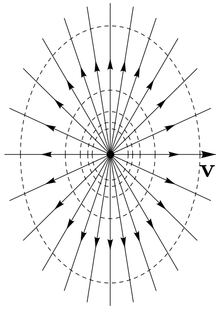
Поверхности постоянного φ уже не являются сферами — это эллипсоиды

$$\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2 = \text{const},$$

сплюснутые в направлении оси x.

Поле $\mathbf{E}$ по-прежнему направлено радиально от заряда, однако уже не сферически-симметрично: силовые линии сгущаются к плоскости, перпендикулярной скорости заряда. Действительно, поле в точке $(vt + a, 0, 0)$ на расстоянии a перед зарядом равно

$$E_x = \frac{q(1 - v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$



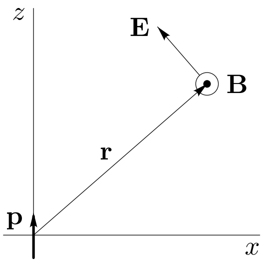
Силовые линии и эквипотенциальные поверхности
поля равномерно движущегося заряда

а поле в точке $(vt, 0, a)$ на том же расстоянии от заряда "сверху" равно

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Замечание. Конструкции $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и $(x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, появившиеся в формулах, находят свое естественное объяснение в теории относительности.

Излучение заряда, совершающего гармонические колебания. Поле заряда, движущегося с ускорением, принципиально отличается от поля равномерно движущегося заряда. Поле равномерно движущегося заряда, как и поле покоящегося заряда, убывает с расстоянием от заряда как $1/r^2$. Если же внимательно посмотреть на общую формулу, то видно, что поле заряда, движущегося с ускорением, убывает как $1/r$. Убывающую как $1/r$ часть поля называют *излучением*, поскольку она имеет вид сферической ЭМ волны.



Поляризация излучения заряда, совершающего гармонические колебания вдоль оси z

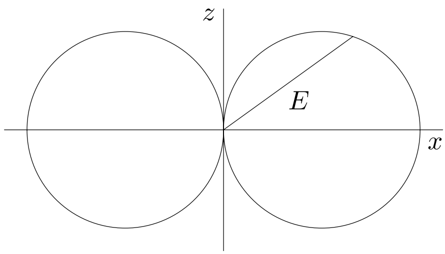


Диаграмма направленности излучения. Длина отрезка равна относительной величине поля **E** по данному направлению

Пусть заряд двигается по оси z согласно закону $\mathbf{R}(t) = (0, 0, a\cos\omega t)$. На расстояниях $r \gg a$ можно пренебречь a по сравнению с r. Пусть скорость заряда много меньше скорости света $\omega a \ll c$. Тогда $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \ldots$, $\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c = \mathbf{r} + \ldots$, $\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c = r + \ldots$, $t - t' = r/c + \ldots$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\omega^2 \cos\omega(t - r/c) + \ldots, \quad \mathbf{B} = \mathbf{r} \times \mathbf{E}/rc + \ldots,$$

где $\mathbf{p} = (0, 0, qa)$.

Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$ (локальное направление распространения) перпендикулярны друг другу и составляют правую тройку, как в плоской волне. Кроме того $B = E/c$, что тоже соответствует ЭМ волне. Интенсивность излучения зависит от направления. Лучше всего заряд излучает перпендикулярно направлению движения. Вектор $\mathbf{E}$ в волне поляризован в плоскости, в которой лежат направление движения заряда и направление распространения волны.

Законы сохранения в электродинамике

Локальные законы сохранения

Законы сохранения в механике формулируются в виде

$$\langle \text{сохраняющаяся величина} \rangle = \text{const},$$

при этом имеется в виду постоянство значения сохраняющейся величины во времени. В распределенной системе, каковой является ЭМ поле, динамические переменные зависят не только от времени, но и от координат. Конечно, можно формулировать законы сохранения в аналогичном механике виде

$$\int \langle \text{плотность сохраняющейся величины} \rangle \, d^3r = \text{const},$$

но это обедняет содержание законов. На самом деле зависимость от координат приводит к новому пониманию законов сохранения — к *локальным законам сохранения*. Локальные законы утверждают, что, если какая-либо величина (например, энергия поля) в некоторой области изменилась, то это произошло за счет втекания/вытекания этой величины через границу области. Иначе говоря, любая сохраняющаяся величина характеризуется двумя объектами: своей плотностью и своим потоком, а локальный закон сохранения выглядит так

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G \langle \text{плотность сохраняющейся величины} \rangle \, d^3r + \\ + \int_{\partial G} \langle \text{плотность потока сохраняющейся величины} \rangle_n \, dS = 0.$$

Преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса и вспоминая, что область G произвольна, можно переписать локальный закон сохранения в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\langle\text{плотность сохраняющейся величины}\rangle +$$
$$+\operatorname{div}\,\langle\text{плотность потока сохраняющейся величины}\rangle = 0.$$

Разумеется, локальный закон сохранения (при условии, что поток на бесконечности довольно быстро стремится к нулю) приводит также и к "глобальному" закону сохранения

$$\int \langle\text{плотность сохраняющейся величины}\rangle\, d^3r = \mathrm{const},$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

Закон сохранения заряда

С одним примером локального закона сохранения мы уже давно знакомы. Это закон сохранения электрического заряда. Напомним его вывод. Выпишем уравнения Максвелла

$$\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\mathbf{B} = 0, \qquad c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Вычислим дивергенцию последнего уравнения. Получим

$$0 = \nabla\mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial(\nabla\mathbf{E})/\partial t.$$

Заменяя $\nabla\mathbf{E}$ на ρ/ε_0 согласно первому уравнению, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0.$$

Структура этой формулы полностью соответствует общей форме локального закона сохранения: ρ представляет собой плотность сохраняющейся величины (заряда), а $\mathbf{j}$ — плотность потока этой величины (плотность потока заряда, то есть плотность тока). Как мы уже не раз отмечали локальное сохранения заряда означает не только, что сумма всех зарядов во всем пространстве остается постоянной ("глобальное" сохранение), но и что заряд не может внезапно исчезнуть в одной точке и появиться в другой. В частности, если постоянный ток течет по проводам, то они должны быть либо замкнуты, либо уходить концами в бесконечность.

Замечание. Строго говоря, закон сохранения электрического заряда стоит несколько особняком. Заряд и ток в уравнениях Максвелла не являются динамическими переменными, так что закон сохранения заряда не дает никаких соотношений для самого ЭМ поля. Он является условием непротиворечивости уравнений Максвелла.

Закон сохранения энергии

Мы уже сталкивались с примерами плотности энергии поля $w_E = \varepsilon_0 E^2/2$ в электростатике и $w_B = \varepsilon_0 c^2 B^2/2$ в постоянном магнитном поле. Оказывается, что сумма этих выражений $w = \varepsilon_0(E^2 + c^2B^2)/2$ равна плотности энергии поля в общем случае переменных полей. Покажем это. В соответствие с общей идеологией мы должны найти выражение для потока энергии $\mathbf{S}$, такое что $\partial w/\partial t + \nabla\mathbf{S} = 0$. Продифференцируем w по времени и воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon_0\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0[c^2\mathbf{E}(\nabla\times\mathbf{B}) - \mathbf{Ej}/\varepsilon_0 - c^2\mathbf{B}(\nabla\times\mathbf{E})].$$

Домашнее задание. Покажите, что $\mathbf{E}(\nabla\times\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{B}\times\mathbf{E})$.

Окончательно

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\mathbf{S} = -\mathbf{jE},$$

где $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}\times\mathbf{B}$ является вектором плотности потока энергии и называется *вектором Пойнтинга*.

Как видно, полученное равенство не имеет строго того вида, какой мы обещали. В правой части стоит не нуль, а произведение $\mathbf{jE}$. Это не случайно. При наличии зарядов поле не является замкнутой системой: энергия может передаваться от зарядов к полю и обратно. Эти процессы и описывает член в правой части. В отсутствие зарядов ($\mathbf{j} = 0$) получаем настоящий локальный закон сохранения.

Рассмотрим два примера, которые помогут понять некоторые особенности локального закона сохранения энергии.

В качестве первого примера рассмотрим плоскую электромагнитную волну. Как мы помним, в этом случае $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$, причем $c^2k^2 = \omega^2$ и

$$\mathbf{kE}_0 = 0, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{B}_0,$$
$$\mathbf{kB}_0 = 0, \quad c^2\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0 = -\omega\mathbf{E}_0.$$

Плотность энергии ЭМ поля

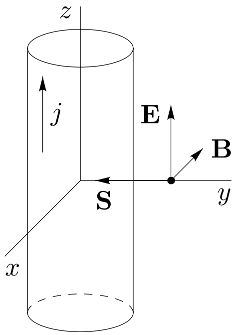
$$w = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\mathbf{kr} - \omega t).$$

Направление потока энергии совпадает с направлением $\mathbf{k}$

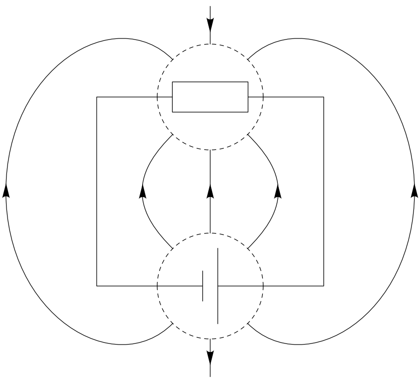
$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c E_0^2(\mathbf{k}/k)\cos^2(\mathbf{kr} - \omega t).$$

Домашнее задание. Получите эти выражения. Проверьте прямым вычислением, что $\partial w/\partial t + \nabla \mathbf{S} = 0$.

Таким образом, плоская волна переносит энергию. Энергия течет по направлению волнового вектора. Плотность потока энергии отличается от плотности энергии только множителем c, что не удивительно, если вспомнить, что ЭМ волны распространяются со скоростью c. Вывод о переносе энергии ЭМ волнами остается, разумеется, справедлив и для других типов волн, например, для сферических.



Поток энергии вблизи провода с током



Пути энергии неисповедимы

В качестве второго примера рассмотрим бесконечный прямой провод круглого сечения радиуса R с проводимостью σ, по которому течет ток j. Для простоты будем считать, что этот ток поддерживается однородным во всем пространстве электрическим полем E, направленным по оси провода. Тогда $j = \sigma E$, полный ток $I = \pi R^2 j = \pi R^2 \sigma E$, а магнитное поле вокруг провода равно $B = I/2\pi\varepsilon_0 c^2 r = R^2\sigma E/2\varepsilon_0 c^2 r$. Тепловая мощность, выделяющаяся в отрезке провода длины L равна $P = \pi R^2 L j^2/\sigma = \pi R^2 L\sigma E^2$. Вектор Пойнтинга на боковой поверхности провода направлен внутрь провода и по абсолютной величине равен $S = \varepsilon_0 c^2 EB = R\sigma E^2/2$. Поток энергии через боковую поверхность отрезка провода длины L равен $2\pi RLS = \pi R^2 L\sigma E^2$. Мы приходим к замечательному выводу. Энергия, которая выделяется в резисторе в виде тепла поступает из окружающего резистор ЭМ поля. Нетрудно подсчитать, что в нашем модельном примере поток энергии через боковую поверхность цилиндра длины L и произвольного радиуса r, соосного с проводником, не зависит от r и равен $\pi R^2 L\sigma E^2$. Это означает, что энергия течет из бесконечности. Откуда же она там берется? Мы должны вспомнить, что бесконечных проводов не бывает, это приближение. На самом деле наш провод где-то далеко замыкается на источник питания. В источнике питания ток течет против электрического поля (вне источника он течет от плюса к минусу, а в источнике — от минуса к плюсу) под действием сторонних сил. Поэтому вектор Пойнтинга направлен не внутрь источника, а вовне. Иными словами, энергия от источника питания к потребителю передается вовсе не по проводам. Энергия течет в ЭМ поле, которое эти провода окружает. При этом форма “линий поля” **S** не имеет ничего общего с формой проводов — энергия течет совершенно другими путями, сперва растекаясь от источника по пространству и вновь собираясь у потребителя.

Закон сохранения импульса

Оказывается, что выражение $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ равно не только потоку энергии, но и плотности импульса. Точнее, плотность импульса ЭМ поля равна $\mathbf{\Pi} = \mathbf{S}/c^2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Выведем закон сохранения импульса. Нам будет удобно работать в тензорных обозначениях. Тогда $\Pi_k = \varepsilon_0\varepsilon_{klm}E_l B_m$, а уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} &\partial_i E_i = \rho/\varepsilon_0, \quad && \varepsilon_{klm}\partial_l E_m = -\partial_t B_k, \\ &\partial_i B_i = 0, && c^2\varepsilon_{klm}\partial_l B_m = j_k/\varepsilon_0 + \partial_t E_k. \end{aligned}$$

Вычисляем производную $\partial_t \Pi_k$

$$\begin{aligned} \partial_t\Pi_k = \varepsilon_0\varepsilon_{klm}&[B_m\partial_t E_l + E_l\partial_t B_m] = \\ &= \varepsilon_0\varepsilon_{klm}[B_m(c^2\varepsilon_{lnp}\partial_n B_p - j_l/eps_0) - E_l\varepsilon_{mnp}\partial_n E_p] = \\ &= \varepsilon_0 c^2(B_m\partial_m B_k - B_m\partial_k B_m) - \varepsilon_0(E_l\partial_k E_l - E_l\partial_l E_k) - \varepsilon_{klm}j_l B_m = \\ &= \varepsilon_0[\partial_l(E_l E_k) - \partial_k(E^2/2)] + \varepsilon_0 c^2[\partial_m(B_m B_k) - \partial_k(B^2/2)] - \\ &\qquad - (\rho E_k + \varepsilon_{klm} j_l B_m). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\sigma_{kl} = -\varepsilon_0(E_k E_l - \delta_{kl}E^2/2) - \varepsilon_0 c^2(B_k B_l - \delta_{kl}B^2/2).$$

Тогда

$$\partial_t\Pi_k + \partial_l\sigma_{kl} = -f_k,$$

где $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$ — не что иное как сила Лоренца. Тензор σ_{kl} является тензором потока импульса ЭМ поля и называется *максвелловским тензором напряжений*. Компонента σ_{kl} этого тензора представляет собой поток k-ой компоненты импульса в l-ом направлении (или наоборот, поскольку тензор симметричный).

Появление силы Лоренца в правой части — еще одно чудо ЭМ теории. Оказывается, что сила Лоренца "спрятана" в уравнениях Максвелла. Точнее, если мы хотим интерпретировать правую часть как изменение импульса заряженных частиц, уравнение движения этих частиц должно иметь вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

где $\mathbf{p}$ — импульс частицы. Именно в таком виде мы и записали это уравнение на первой лекции, причем $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Одновременно становится понятным и появление именно члена $\mathbf{jE}$ в правой части закона сохранения энергии. Действительно, производная кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ равна

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{vF} = q\mathbf{vE}$$

(член $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ выпадает), что в точности соответствует $\mathbf{jE}$.

Замечание. Зависимость энергии от скорости имеет вид $E_{\text{кин}} = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Природу столь странной и сложной зависимости импульса и энергии от скорости мы обсудим в следующем разделе.

Выражение для компонент тензора σ_{kl} нам на самом деле давно знакомо. Вычислим поток импульса, втекающего в область G

$$\varepsilon_0 \int_{\partial G} [\mathbf{E}(\mathbf{En}) - \mathbf{n}E^2/2 + c^2(\mathbf{B}(\mathbf{Bn}) - \mathbf{n}B^2/2)]\, dS$$

(знак обратный, поскольку нормаль $\mathbf{n}$ внешняя). Мы видим, что это сумма выражений для силы, действующей на тело, которые мы выводили в электростатике и постоянном магнитном поле. Но производная импульса по времени — это и есть сила! Можно сказать, что на тело в ЭМ поле действует сила, поскольку тело поглощает втекающий в него импульс поля. Отметим, что поток импульса отличен от нуля, даже если плотность импульса равна нулю (например, в электростатическом поле).

Замечание. Можно говорить и о моменте импульса ЭМ поля. Плотность момента импульса равна $\mathbf{r} \times \mathbf{\Pi}$, а выражение для потока слишком громоздко и мы его приводить не будем.

Элементы теории относительности

Здесь мы обсудим связь уравнений Максвелла с принципом относительности. Исторически именно анализ этого вопроса привел в конечном итоге к созданию теории относительности — первого кирпича в здании современной физики.

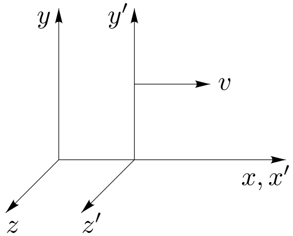
При анализе нам будет удобно исходить из волновых уравнений для потенциалов

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \mathbf{j}/c^2\varepsilon_0.$$

Принцип относительности утверждает, что пространство и время обладают определенной симметрией. Эта симметрия проявляется в равноправии всех инерциальных систем отсчета: физические явления протекают в них совершенно одинаково. Преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (преобразования Галилея) имеют вид

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Мы выписали преобразования для частного случая движения одной системы отсчета относительно другой в направлении оси x. Преобразованиями Галилея называют также всю совокупность возможных преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой, включая повороты осей и сдвиги.



Преобразования Галилея

Для выполнения принципа относительности основные законы (уравнения движения) должны быть инвариантны (сохранять свою форму) относительно преобразований Галилея. Так, например, уравнения второго закона Ньютона для системы частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, инвариантны относительно преобразований Галилея.

В механике преобразований координат и времени достаточно. Однако в электромагнитной теории независимыми переменными являются поля или потенциалы. Помимо преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой нужно еще определить преобразования полей.

Если мы сделаем преобразование Галилея над волновыми уравнениями для потенциалов, то увидим, что они не могут быть инвариантными независимо от того, как преобразуются потенциалы. Неинвариантным является сам оператор Даламбера

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \Delta'.$$

Именно поэтому долгое время считалось, что электромагнитная теория не удовлетворяет принципу относительности. Однако все эксперименты по поиску электромагнитных (в частности, световых) явлений, которые не удовлетворяли бы принципу относительности, провалились. Постепенно стало ясно, что электродинамика удовлетворяет принципу относительности, но преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой — это не преобразования Галилея, а какие-то другие преобразования.

Благодаря тому, что в волновом уравнении потенциалы “отделены” от координат, можно искать их преобразования по очереди. Сначала найдем преобразования координат, относительно которых инвариантен оператор Даламбера. Затем разберемся, как преобразуются плотность заряда и тока. Наконец, получим преобразования потенциалов.

Преобразования Лоренца

Итак, мы должны найти преобразования координат и времени, которые оставляют инвариантным оператор Даламбера. Мы будем искать простейший частный случай таких преобразований

$$x' = px + qt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = rx + st.$$

Полная совокупность преобразований получается добавлением вращений и сдвигов начала координат и времени — относительно таких преобразований оператор Даламбера, очевидно, инвариантен. Отметим, что линейность преобразований есть следствие однородности пространства и времени — инвариантности относительно сдвигов. Постоянные $p, \ldots, s$ (зависящие, конечно же, от скорости относительного движения двух систем отсчета) нам предстоит определить.

Выразим производные по x, y, z, t через производные по x', y', z', t'

$$\frac{\partial}{\partial x} = p\frac{\partial}{\partial x'} + r\frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = q\frac{\partial}{\partial x'} + s\frac{\partial}{\partial t'}.$$

Теперь можно преобразовать оператор Даламбера

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{s^2}{c^2} - r^2\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \\ + \left(\frac{qs}{c^2} - pr\right)\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} - \left(p^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Мы видим, что для инвариантности оператора Даламбера должны выполняться условия

$$\frac{s^2}{c^2} - r^2 = 1, \quad \frac{qs}{c^2} - pr = 0, \quad p^2 - \frac{q^2}{c^2} = 1.$$

Чтобы ввести относительную скорость движения v, рассмотрим начало координат штрихованной системы $x' = px + qt = 0$. Оно движется относительно нештрихованной системы со скоростью v, а потому $v = -q/p$. Совместно с этим равенством три выписанных выше уравнения позволяют определить $p, \ldots, s$ (проверьте!)

$$p = s = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad q = rc^2 = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Преобразования координат и времени имеют вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Эти формулы называются *преобразованиями Лоренца.*

При $v \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Таким образом, они не отменяют преобразований Галилея, а лишь уточняют их для случая, когда системы отсчета движутся друг относительно друга со скоростью, близкой к скорости света.

Преобразования зарядов, токов, потенциалов и полей

Плотность тока для точечного заряда — это произведение плотности заряда на его скорость. Поэтому в рамках преобразований Галилея заряд и ток преобразуются по формулам

$$j_{x'} = j_x - v\rho, \quad j_{y'} = j_y, \quad j_{z'} = j_z, \quad \rho' = \rho.$$

Совпадение этих формул с формулами преобразований координат и времени наводит на мысль, что правильные преобразования заряда и тока при преобразованиях Лоренца должны выглядеть так

$$j_{x'} = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad j_{y'} = j_y, \quad j_{z'} = j_z, \quad \rho' = \frac{\rho - vj_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Домашнее задание. (Для умелых). Получите формулы преобразования заряда и тока, если для точечного заряда $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$, $\mathbf{j} = q\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$, а преобразования координат и времени (Лоренца) уже известны.

Чтобы волновые уравнения для потенциалов оставались инвариантными (напомним, что оператор Даламбера остается инвариантным сам по себе), потенциалы должны преобразовываться так же, как ток и заряд

$$A_{x'} = \frac{A_x - v\varphi/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A_{y'} = A_y, \quad A_{z'} = A_z, \quad \varphi' = \frac{\varphi - vA_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(несколько иное расположение множителя c^2 связано только с размерностью).

Преобразования полей можно получить, используя формулы

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Вычисления довольно громоздки, но ответ достаточно простой

$$E_{x'} = E_x, \quad E_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_{z'} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$B_{x'} = B_x, \quad B_{y'} = \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B_{z'} = \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Формулы преобразования полей указывают на относительность разбиения поля на электрическое и магнитное. В действительности существует только один объект — электромагнитное поле.

Напомним, что при преобразовании полей одновременно преобразуются и координаты, от которых поля зависят. Правильней было бы писать $E_{x'}(x', y', z', t') = E_x(x, y, z, t)$ и т. д. Теперь мы в состоянии интерпретировать формулы для поля и потенциала равномерно движущегося заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}},$$
$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

В движущейся (штрихованной) системе отсчета $\varphi' = q/4\pi\varepsilon_0 r'$, $\mathbf{A}' = 0$. Для преобразования в неподвижную (нештрихованную) систему отсчета мы должны выразить штрихованные координаты через нештрихованные и преобразовать сами потенциалы. Поскольку выписанные выше формулы выражают штрихованные потенциалы через нештрихованные, нужно их обратить. Обратные формулы выглядят так же, только меняется знак у скорости v. В результате этих двух преобразований мы получаем выписанную выше формулу для φ, а также равенство $A_x = v\varphi/c^2$.

С полем $\mathbf{E}$ немного сложнее. В штрихованной системе отсчета $\mathbf{E}' = q\mathbf{r}'/4\pi\varepsilon_0 r'^3$, $\mathbf{B}' = 0$. Будем рассматривать проекции по отдельности

$$E_x = \frac{q(x-vt)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2/c^2}\left[\left(\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

Видно, что первая формула получается из $E_{x'} = qx'/4\pi\varepsilon_0 r'^3$ просто преобразованием координат, а вторая получается из $E_{y'} = qy'/4\pi\varepsilon_0 r'^3$ преобразованием координат и дополнительно делением на $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Но так и должно быть по формулам преобразования полей. Компоненты магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2$ также согласуются с формулами преобразования полей $B_x = 0$, $B_y = -vE_{z'}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $B_z = vE_{y'}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Уравнения движения заряда. Энергия и импульс частицы

Если мы отказываемся от преобразований Галилея в пользу преобразований Лоренца, то неинвариантным становится уже второй закон Ньютона. При обсуждении законов сохранения мы видели, что уравнения движения (и баланс энергии) заряженной частицы должны иметь следующий общий вид

$$\frac{dE_{\text{кин}}}{dt} = q\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}),$$

где $E_{\text{кин}}$ и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс частицы. Поскольку поведение правых частей при преобразованиях Лоренца известны, можно вывести выражения для энергии и импульса (учитывая еще то, что при $v \ll c$ они должны переходить в $E_{\text{кин}} = mv^2/2$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ соответственно)

$$E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Разложение кинетической энергии по степеням v/c имеет в действительности вид $E_{\text{кин}} = mc^2 + mv^2/2 + \ldots$ Первый член называют *энергией покоя*. Несмотря на то, что она не зависит от скорости, выбрасывать ее нельзя. Энергия покоя имеет четкий физический смысл. Так, в ядерных реакциях при столкновении частиц новые частицы рождаются только при условии, что сумма энергий исходных частиц превышает энергию покоя рождающейся частицы (так называемый порог реакции).

При преобразованиях Лоренца энергия и импульс преобразуются аналогично координатам (току и заряду, потенциалам ...)

$$p_{x'} = \frac{p_x - vE_{\text{кин}}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_{y'} = p_y, \quad p_{z'} = p_z, \quad E'_{\text{кин}} = \frac{E_{\text{кин}} - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Такие формулы преобразования автоматически обеспечивают сохранение энергии и импульса в любой инерциальной системе отсчета, если они сохраняются хотя бы в одной.