Законы сохранения

Немного математики. О функциях многих переменных. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$. Аналогично случаю функции одной переменной можно ввести понятие производной. Забудем на время, что f зависит от y, тогда остается одна переменная x и можно определить производную обычным образом. Такая производная называется *частной*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1}.$$

Точно так же определяется частная производная по y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) = \lim_{y_2 \to y_1} \frac{f(x, y_2) - f(x, y_2)}{y_2 - y_1}.$$

Предположим теперь, что x и y сами являются функциями какой-то переменной t. Тогда f также является (сложной) функцией t. Нетрудно догадаться, что

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Все приведенные конструкции легко обобщаются на большее число переменных.

Нам будут часто встречаться функции от векторов, например, $f(\mathbf{r})$. Под этим понимается функция от компонент вектора $f(x, y, z)$. Частные производные такой функции $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ также образуют вектор

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

который называют еще *градиентом* функции f.

Домашнее задание. Проверить, что частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ при повороте системы координат действительно преобразуются как компоненты вектора.

Аналогично функциям одной переменной можно определить высшие производные (вторую, третью ...) через повторное дифференцирование. При этом *смешанные производные* типа $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ обладают свойством

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

(значение производной не зависит от порядка дифференцирования).

Понятие об интегралах движения

Мы записали уравнения движения (второй закон Ньютона) в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Напомним, что $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, поэтому это дифференциальные уравнения второго порядка.

Частным случаем такого уравнения является

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0.$$

Действительно, выполняя дифференцирование, найдем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{v} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{a} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

В это соотношение входят $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$.

Особая роль уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$$

в том, что оно немедленно “интегрируется”

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = c \ (= \mathrm{const})$$

и приводит к соотношению между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ (без $\mathbf{a}$!), то есть к дифференциальному уравнению меньшего (первого) порядка. Функция Φ называется *первым интегралом* исходного дифференциального уравнения $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему N материальных точек с массами m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. *Импульсом материальной точки* называется вектор

$$\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i.$$

Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов отдельных точек

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i.$$

Закон сохранения импульса утверждает, что, при некоторых дополнительных условиях, импульс системы материальных точек остается постоянным, то есть $d\mathbf{P}/dt = 0$.

Чтобы вывести закон сохранения импульса, запишем уравнения движения для каждой точки системы

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Заметим, что $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$, а потому левую часть можно записать в виде $d\mathbf{p}_i/dt$. Правую часть в соответствие с третьим законом Ньютона представим в виде

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}.$$

Итак

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Дифференцируя импульс системы по времени, найдем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}.$$

Стоящую справа двойную сумму можно представить как сумму всех элементов таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
\times & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} & \ldots & \mathbf{F}_{1N} \\
\mathbf{F}_{21} & \times & \mathbf{F}_{23} & \ldots & \mathbf{F}_{2N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{F}_{N1} & \mathbf{F}_{N2} & \mathbf{F}_{N3} & \ldots & \times
\end{array}$$

в которой диагональные элементы отсутствуют (по условию $j \neq i$). В этой таблице для любого наддиагонального элемента найдется поддиагональный противоположного знака (например, $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$). Поэтому сумма всех элементов равна нулю

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

посредством $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}$ обозначена сумма всех внешних сил, действующих на точки системы.

Если $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0$, то мы приходим к *закону сохранения импульса*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{P} = \text{const}.$$

Замечания. Мы совсем не пользовались утверждением $\mathbf{F}_{12} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ третьего закона Ньютона.

Обычно закон сохранения импульса формулируют для систем, на которые вообще не действуют внешние силы (такие системы называют *изолированными*). Однако из нашего вывода закона сохранения импульса видно, что достаточно, чтобы сумма внешних сил равнялась нулю (чтобы внешние силы компенсировались).

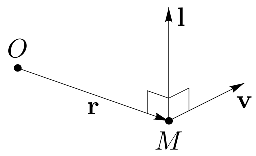
Не нужно забывать, что закон сохранения импульса — векторный закон. В ряде случаев сумма внешних сил не равна нулю, однако ее *проекция* на какую-то ось все же равна нулю. Тогда имеет место *сохранение проекции импульса* на соответствующую ось.

Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки M относительно данного начала координат O называется вектор

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор относительно O.



Момент импульса материальной точки

Замечание. Мы специально подчеркиваем, что момент импульса исчисляется относительно некоторой точки. Бессмысленно говорить просто о моменте импульса.

Моментом импульса системы материальных точек относительно точки O называется сумма моментов импульса отдельных точек относительно точки O

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i.$$

Моментом силы, действующей на материальную точку, *относительно точки O* называется вектор

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Замечания. Иногда момент силы определяют безотносительно какой-либо материальной точки, на которую сила действует, а пользуются понятием *точка приложения силы*.

Как и момент импульса, момент силы исчисляется относительно какой-либо точки.

Закон сохранения момента импульса утверждает, что, при некоторых дополнительных условиях, момент импульса системы остается постоянным, $d\mathbf{L}/dt = 0$.

Для вывода закона сохранения импульса продифференцируем $\mathbf{L}$ по времени

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Представляя, как и ранее, силы $\mathbf{F}_i$ в виде суммы внутренних и внешних, найдем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}.$$

Если мы представим двойную сумму в правой части через сумму элементов таблицы, то заметим, что в выражении $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$ можно поменять местами i и j, от этого сумма не изменится. Действительно, можно сначала сложить элементы каждой строки, а затем сложить полученные результаты. Но можно сначала сложить элементы каждого столбца, а затем сложить результаты. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}).$$

Остается воспользоваться условиями $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ и $\mathbf{F}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0$, и мы видим, что двойная сумма равна нулю. Итак

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}},$$

где $\mathbf{M}_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}$ — сумма моментов внешних сил, действующих на точки системы.

Если $\mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0$, то мы приходим к *закону сохранения момента импульса*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \text{const}.$$

Замечания. Для доказательства нам потребовались все утверждения третьего закона Ньютона.

В отличие от закона сохранения импульса, моменты внешних сил труднее компенсировать, поскольку они зависят не только от самих внешних сил, но и от положения материальных точек системы. Поэтому закон сохранения момента импульса обычно формулируется для изолированной системы.

Для неизолированных систем в ряде случаев удается воспользоваться произволом в выборе начала координат для того чтобы “занулить” момент внешних сил (или хотя бы его проекцию).

Закон сохранения момента импульса — закон векторный, поэтому отдельные проекции могут сохраняться, даже если полный момент и не сохраняется.

Понятие силового поля. Работа силы

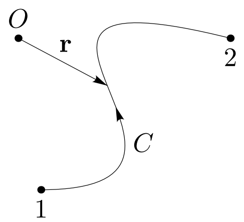
Будем предполагать, что сила, действующая на материальную точку, не зависит от ее скорости (приведенные выше примеры сил тяжести и упругости удовлетворяют этому предположению). Поскольку сила в этом случае зависит только от координат и времени, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, то можно “отделить” силу от материальной точки, считая ее характеристикой самого пространства.

Силовое поле — это сила, заданная в каждой точке пространства в каждый момент времени.

Замечание. Настоящее изучение “полей”, то есть функций $\mathbf{r}$ и t, ждет нас в следующем семестре, когда мы столкнемся с электромагнитным полем.

Если задана кривая C, то можно определить *работу силы* (точнее, *работу силового поля*)

$$A = \int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_C (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz).$$



Работа силы

Немного математики. Криволинейный интеграл второго рода. Стоящий здесь интеграл называется *криволинейным интегралом второго рода.* Он похож на определенный интеграл. Пусть кривая C задана параметрически, то есть задана функция $\mathbf{r}(\tau)$, такая что $\mathbf{r}$ пробегает кривую C, когда τ пробегает отрезок $[0, 1]$. Тогда

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau))\mathbf{r}'(\tau)\, d\tau.$$

Справа стоит уже обыкновенный (не криволинейный) определенный интеграл. От способа параметризации кривой C значение криволинейного интеграла на самом деле не зависит.

Если $\mathbf{F}$ не зависит от t, то данное нами определение работы вполне однозначно. Если же $\mathbf{F}$ зависит от t явно, $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, то нужно еще указать, как в процессе вычисления интеграла меняется время. Есть две естественные возможности, которые мы условно назовем работа-1 и работа-2.

Работа-1: время при вычислении интеграла полагается постоянным (а сам интеграл зависит от него как от параметра),

Работа-2: время меняется в соответствие с движением материальной точки по траектории C под действием самой же силы $\mathbf{F}$ (то есть параметр τ есть время, а $\mathbf{r}'(\tau)=\mathbf{v}(\tau)$).

Оба определения применяются в механике.

Замечание. Очевидно, определение работы-2 можно распространить и на силы, зависящие от скорости материальной точки.

Работа-2 и изменение кинетической энергии

Рассмотрим одну материальную точку, на которую действует сила $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$. Вычислим работу-2

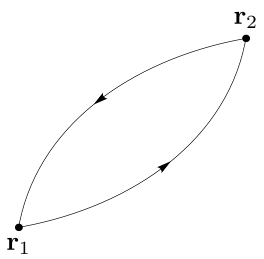
$$A^{(2)}=\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t),t)\mathbf{v}(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}m\mathbf{a}(t)\mathbf{v}(t)\,dt=$$
$$=\left.\frac{mv^2(t)}{2}\right|_{t_1}^{t_2}=\frac{mv^2(t_2)}{2}-\frac{mv^2(t_1)}{2}.$$

Величина $mv^2/2$ называется *кинетической энергией материальной точки.*

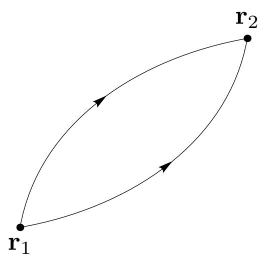
Работа-1 и понятие потенциального поля

Силовое поле $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ называется *потенциальным*, если работа-1 $A^{(1)}=0$ для любой *замкнутой* кривой C.

Определение потенциальности можно переформулировать таким образом: работа-1 для *незамкнутой* кривой C не зависит от формы кривой, а только от начальной и конечной точек. Таким образом, можно говорить о работе при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ безотносительно кривой, по которой это перемещение происходит. Нетрудно понять, что работа при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_3$ равна сумме работ при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ и перемещении из точки $\mathbf{r}_2$ в точку $\mathbf{r}_3$. Для произвольных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ это возможно, только если существует функция $U(\mathbf{r},t)$



Работа по замкнутому пути
равна нулю



Работа по незамкнутому пути
не зависит от пути

(зависимость от t как от параметра, вспомни определение работы-1), такая что

$$\int_{\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -(U(\mathbf{r}_2, t) - U(\mathbf{r}_1, t)).$$

(общий знак "минус" в правой части по историческим причинам). Функция $U(\mathbf{r}, t)$ называется *потенциальной энергией* силового поля $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.

Немного математики. Еще о криволинейном интеграле второго рода. Как восстановить силу, если известна потенциальная энергия? Поскольку криволинейный интеграл второго рода аналогичен определенному интегралу, а формула, определяющая потенциальную энергию, похожа на формулу Ньютона—Лейбница, нетрудно догадаться, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}.$$

Иначе говоря, криволинейный интеграл от градиента некоторой функции равен разности значений функции на концах контура интегрирования

$$\int_{\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\, d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1)$$

и обратно, если криволинейный интеграл равен разности значений некоторой функции на концах контура интегрирования, то подынтегральное выражение есть градиент этой функции.

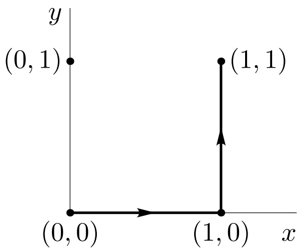
Формула, выражающая силу через потенциальную энергию, дает простой *критерий потенциальности*: поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ является потенциальным, если

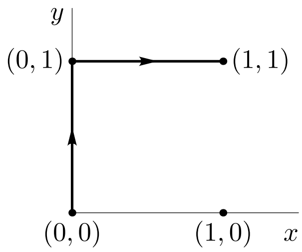
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Домашнее задание. Проверьте, что сила, равная градиенту потенциальной энергии, удовлетворяет этому критерию потенциальности.

Непотенциальное поле (двумерное). Пусть $F_x = 0$, $F_y = x$. Тогда $\partial F_x/\partial y = 0$, $\partial F_y/\partial x = 1$, так что критерий потенциальности не выполняется.

Домашнее задание. Вычислите работу этого силового поля при перемещении по ломаным $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,1)$ и $(0,0)$—$(0,1)$—$(1,1)$.





Обобщение понятия потенциальных сил на систему материальных точек выглядит следующим образом: силы, действующие в системе материальных точек называются потенциальными, если

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Замечание. Подчеркнем, что потенциальная энергия — *одна* на всю систему материальных точек, нет потенциальной энергии *отдельных* точек.

Домашнее задание. Переформулируйте определение потенциальности в терминах работы-1 для случая системы материальных точек.

Закон сохранения энергии

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий отдельных материальных точек

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Полной механической энергией системы называется сумма кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U.$$

Разумеется, речь идет только о системах, точки которых взаимодействуют потенциальными силами.

Замечание. Иногда понятие потенциальной энергии (а вместе с ним и полной) вводят для систем, в которых между точками действуют также непотенциальные силы. При этом подразумевают следующее разбиение

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{i\,\text{непотенц}}.$$

Хотя такое разбиение неоднозначно, оно прижилось в механике.

Будем полагать, что

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}}.$$

Продифференцируем полную энергию по времени

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}\mathbf{v}_i + \frac{\partial U}{\partial t} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \left(m_i \mathbf{a}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{F}_{i\,\text{внешн}} + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Если потенциальная энергия не зависит от времени явно, $\partial U/\partial t = 0$, а внешние силы отсутствуют (система изолирована), то мы приходим к *закону сохранения энергии*

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E = \text{const}.$$

Замечания. Величина $\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i$ называется *мощностью*, которую развивает сила $\mathbf{F}_i$ (это выражение уже возникало при рассмотрении работы-2). Закон сохранения энергии справедлив, если мощность, развиваемая всеми внешними силами, равна нулю, однако на практике это трудно гарантировать, поэтому обычно требуют изолированности системы.

Наличие непотенциальных сил портит закон сохранения, однако, если эти силы действуют в течение некоторого конечного промежутка времени, то в остальное время энергия сохраняется.

Нужно также упомянуть о силах реакции. Поскольку никакого выражения через координаты для них нет, потенциальными их считать нельзя. Тем не менее и при наличии сил реакции закон сохранения энергии во многих случаях справедлив. Действительно, как уже было отмечено, достаточно, чтобы мощность сил реакции равнялась нулю. Это справедливо для силы натяжения нити и силы реакции опоры, поскольку они перпендикулярны скорости материальной точки (такие силы реакции и сами связи называются *идеальными*). Это верно и для силы трения покоя, поскольку скорость равна нулю. Единственной "плохой" силой в механике остается сила трения скольжения.

В заключение приведем выражения для потенциальной энергии сил тяжести и упругости.

В модели плоской Земли

$$U = mgz,$$

где ось z перпендикулярна поверхности Земли.

В модели круглой Земли

$$U = -G\frac{mM}{r},$$

где r — расстояние от материальной точки до центра Земли.

Потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины

$$U = kx^2/2,$$

где x — удлинение пружины по сравнению с недеформированным состоянием.

Домашнее задание. Получите эти выражения.

Законы сохранения и симметрия пространства

Мы получили законы сохранения как следствие уравнений движения (второго и третьего законов Ньютона). Однако с точки зрения современной физики законы сохранения являются в некотором смысле более фундаментальными, чем уравнения движения. Оказывается, что законы сохранения тесно связаны с симметриями пространства и времени.

Третий закон Ньютона неявно подразумевает, что силы зависят только от координат, и что, скажем, сила $\mathbf{F}_{12}$ зависит только от координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ (так называемое *парное взаимодействие*). Но тогда силы в системе автоматически оказываются потенциальными, причем

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} u_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad u'_{ij}(r) = -F_{ij}(r).$$

Домашнее задание. Покажите, что сила $\mathbf{F}_{12}$, удовлетворяющая третьему закону Ньютона и зависящая только от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ имеет вид

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r} F_{12}(r), \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Пусть $u_{12}(r)$ — первообразная $-F_{12}(r)$. Покажите, что

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial u_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1}.$$

Покажите, что из приведенной выше потенциальной энергии U получается правильное выражение для силы

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

С другой стороны мы видели, что для справедливости законов сохранения импульса и момента импульса нужно обращение в нуль сумм

$$\sum_{i=0}^{N} \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0,$$

а это гораздо более слабые условия, чем третий закон Ньютона. Посмотрим, что дадут эти условия, если дополнительно предполагать потенциальность сил, но не пользоваться третьим законом.

Условие $\sum_{i=0}^{N} \mathbf{F}_i = 0$ переписывается в виде

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Стоящую здесь сумму можно интерпретировать как производную

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{r}_N + \mathbf{a}, t)}{\partial \mathbf{a}} = 0,$$

равенство нулю которой означает, что U не меняется при *сдвиге*

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}.$$

Условие $\sum_{i=0}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ переписывается в виде

$$\sum_{i=0}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Стоящую здесь сумму можно интерпретировать как производную

$$\left.\frac{\partial U(O(\varphi)\mathbf{r}_1, \ldots, O(\varphi)\mathbf{r}_N, t)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,$$

где $O(\varphi)\mathbf{r}$ означает вектор $\mathbf{r}$, повернутый вокруг какой-либо оси, например, оси z, на угол φ, то есть вектор $\mathbf{r}'$ с координатами

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Действительно, для $N = 1$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}',t)}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial\varphi} = \\ = \frac{\partial U}{\partial x'}(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \frac{\partial U}{\partial y'}(-x\cos\varphi - y\sin\varphi).$$

При $\varphi = 0$

$$\left.\frac{\partial U(\mathbf{r}',t)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{\partial U}{\partial x}y - \frac{\partial U}{\partial y}x = -\left(\mathbf{r}\times\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}\right)_z .$$

Равенство нулю таких производных (для поворотов вокруг любой оси) означает, что U не меняется при *поворотах*

$$\mathbf{r}' = O\mathbf{r},$$

где O — произвольная ортогональная матрица.

Наконец, условие $\partial U/\partial t = 0$ означает отсутствие явной зависимости U от времени, то есть неизменность U при *сдвигах времени*

$$t' = t + a.$$

Таким образом, законы сохранения оказываются связанными с фундаментальными симметриями пространства, которые мы обсуждали в связи с принципом относительности. Остались “невостребованными” только преобразования Галилея (равномерное прямолинейное движение). Оказывается, что им тоже соответствует закон сохранения, который иногда называют *теоремой о движении центра масс.*

Поскольку законы сохранения выполняются в любой инерциальной системе отсчета, они оказываются связанными друг с другом. Рассмотрим только один пример, восходящий еще к Гюйгенсу.

Запишем сохранение энергия в двух инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{u}$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}+U(\mathbf{r}_i,\ldots,\mathbf{r}_N)\right)=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i'^2}{2}+U(\mathbf{r}_i',\ldots,\mathbf{r}_N')\right)=0.$$

Здесь штрихованные и нештрихованные величины связаны равенствами

$$\mathbf{r}_i'=\mathbf{r}_i+\mathbf{u}t,\quad \mathbf{v}_i'=\mathbf{v}_i+\mathbf{u}.$$

Выражая штрихованные величины во втором равенстве через нештрихованные, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}+\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i\mathbf{u}+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i u^2}{2}+U(\mathbf{r}_i+\mathbf{u}t,\ldots,\mathbf{r}_N+\mathbf{u}t)\right)=0.$$

Третья сумма представляет собой постоянную величину $Mu^2/2$, где M — сумма масс всех материальных точек. Пользуясь инвариантностью потенциальной энергии при сдвигах, можно убрать слагаемое $\mathbf{u}t$ из всех аргументов. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i\mathbf{u}+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}+U(\mathbf{r}_i,\ldots,\mathbf{r}_N)\right)=0.$$

Но последние два слагаемых сохраняются, поэтому

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i\mathbf{u}=0.$$

При произвольном $\mathbf{u}$ это возможно, только если

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i=0.$$

Нетрудно видеть, что мы получили закон сохранения импульса.

Замечания. Оказывается, что можно не только получить одну сохраняющуюся величину, если известна другая, можно вывести их зависимость от координат и скорости, опираясь только на формулы преобразований из одной инерциальной системы отсчета в другую. В частности, выражения $m\mathbf{v}$ и $mv^2/2$ для импульса и кинетической энергии могут быть выведены из преобразований Галилея.

Связь законов сохранения друг с другом и с преобразованиями из одной инерциальной системы отсчета в другую особенно выпукло проступает в теории относительности, где энергия и импульс объединяются в один четырехмерный вектор.

Заметим, наконец, что оказывается возможным обобщить понятие потенциальности и на некоторые силы, зависящие от скорости (например, на силу Лоренца). Обобщенная потенциальная энергия уже сама зависит от скорости, а сила вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

При этом, как уже отмечалось, третий закон Ньютона теряет силу, но законы сохранения остаются, остается неизменной их связь друг с другом и с симметриями пространства.