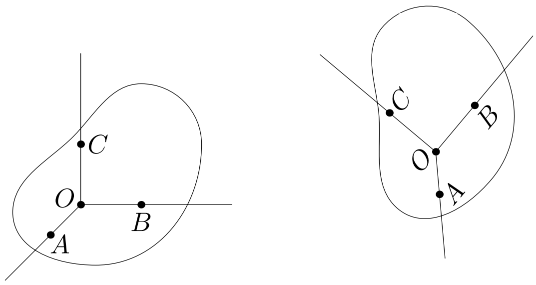
Кинематика твердого тела

Число степеней свободы. Углы Эйлера

Как мы уже говорили, *твердое тело* — это система материальных точек и связей, таких что расстояние между двумя любыми материальными точками остается неизменным. Нетрудно догадаться, что и *углы* между векторами, соединяющими любые три точки твердого тела, тоже остаются неизменными.

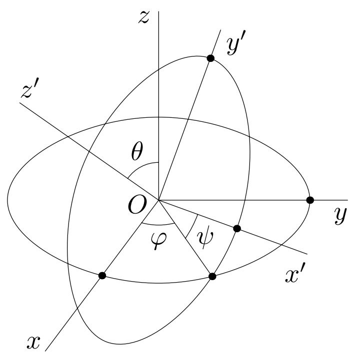
Домашнее задание. Докажите неизменность скалярных произведений векторов, соединяющих любые три точки твердого тела. Выведите из этого неизменность углов.



Вмороженная система координат

Неизменность расстояний и углов дает возможность ввести *вмороженную систему координат.* Рассмотрим начальное положение твердого тела. Совместим начало неподвижной лабораторной декартовой системы координат с какой-либо точкой O твердого тела. Точки твердого тела, лежащие на осях координат (на положительных полуосях) и отстоящие от начала координат на 1 м (или 1 мм — масштаб не важен), обозначим через A, B, C. Рассмотрим какое-либо положение твердого тела в процессе движения. Точки O, A, B, C уже не совпадают со своими начальными положениями, однако расстояния между точкой O и точками A, B, C по-прежнему равны 1 м, а углы между векторами OA, OB, OC — по-прежнему прямые. Это означает, что можно ввести декартову систему координат с началом в O и осями, проходящими через A, B, C. В этой — вмороженной — системе координат точки A, B, C в процессе движения имеют постоянные координаты, равные их начальным значениям.

Домашнее задание. Покажите, что координаты *любой точки* твердого тела во вмороженной системе остаются неизменными в процессе движения.



Углы Эйлера

Описание движения твердого тела — это описания движения каждой его точки. Ясно, что описание движения твердого тела сводится к описанию движения вмороженной системы координат относительно лабораторной. Движение вмороженной системы координат опишем в два приема. Сначала опишем движение начала координат O. На это уйдет три координаты. Поворот осей вмороженной системы относительно лабораторной также можно описать тремя координатами, например тремя *углами Эйлера*. Таким образом, для описания движения твердого тела в общем случае нужно шесть координат. Три степени свободы, связанные с координатами точки O и соответствующие поступательному движению, называют *поступательными*, а три степени свободы, соответствующие углам Эйлера — *вращательными*.

Замечание. Конечно, такое разбиение условно (определенный смысл имеет только полное число степеней свободы), однако оно практически удобно и вошло в обиход.

Домашнее задание. Сколько поступательных и вращательных степеней свободы имеет твердое тело в двумерном пространстве? А в четырехмерном?

Из сказанного выше есть одно важное исключение. Если все точки твердого тела расположены на одной прямой (например, тело представляет собой тонкий стержень), то степеней свободы пять, а не шесть. Поступательное движение по-прежнему описывается тремя координатами некоторой точки O твердого тела, однако для описания вращений достаточно двух координат, например двух сферических углов.

Замечание. Если на твердое тело наложены связи, то, как и в случае материальной точки, число степеней свободы уменьшается. Довольно типичны два случая. Если одна из точек твердого тела закреплена, то остается всего три (вращательных) степени свободы. Если закреплены две точки (твердое тело на оси), то остается всего одна (вращательная) степень свободы. Одна степень свободы остается также в некоторых случаях качения твердого тела.

Угловая скорость

Координаты любой точки твердого тела в лабораторной системе координат выражаются через координаты какой-то одной его точки O в лабораторной системе координат и углы Эйлера

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\mathbf{r}',$$

где векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_O$ составлены из координат точек M и O *в лабораторной системе координат*, а вектор $\mathbf{r}'$ составлен из (постоянных) координат точки M *во вмороженной системе координат.* Матрица A описывает преобразование компонент вектора от вмороженной системы координат к лабораторной. Последнее слагаемое нужно понимать как произведение

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx}x' + a_{xy}y' + a_{xz}z' \\ a_{yx}x' + a_{yy}y' + a_{yz}z' \\ a_{zx}x' + a_{zy}y' + a_{zz}z' \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы a_{xx} и т. д. зависят от углов Эйлера, а через них — от времени, компоненты же x', y', z' от времени не зависят.

Немного математики. Кое-что о матрицах. *Матрица* — это прямоугольная таблица чисел. Число строк и число столбцов таблицы — это *размеры матрицы.* Например, матрица A — матрица 3×3, а $\mathbf{r}'$ — матрица 3×1. Матрицы с равным числом строк и столбцов называются *квадратными.*

Для матриц одинакового размера естественно определяется операция *сложения.* Матрица C называется суммой матриц A и B (записывается $C = A + B$), если для всех i, j

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Матрица B называется произведением матрицы A на число c (записывается $B = cA = Ac$), если для всех i, j

$$b_{ij} = ca_{ij}.$$

Для случая, когда второй размер матрицы A (число столбцов) совпадает с первым размером матрицы B (числом строк), определяется *произведение* $C = AB$

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

(частный случай этого равенства явно выписан выше). Квадратные матрицы (определенного размера) хороши тем, что их можно и умножать и складывать. При этом операции сложения и умножения матриц обладают многими свойствами операций сложения и умножения чисел, однако, в отличие от произведения чисел, произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, то есть $AB \neq BA$.

Нам понадобится еще операция *транспонирования* матрицы. Она сводится к замене элемента a_{ij} элементом a_{ji} и наоборот: $B = A^T$, если

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$, и *антисимметричной*, если $A^T = -A$. Нетрудно показать, что $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратная матрица называется *единичной*, если ее элементы $a_{ii} = 1$, а остальные равны нулю. Нетрудно проверить, что единичная матрица обладает свойством обычной единицы: ее произведение на любую квадратную матрицу A того же размера равно матрице A.

Элементы матрицы A довольно сложно зависят от углов Эйлера (частный случай мы рассматривали в первой лекции). Мы не будем выписывать эту зависимость явно. Вместо этого мы установим некоторое свойство матрицы A. Возьмем три единичных вектора вдоль осей вмороженной системы, они имеют компоненты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ во вмороженной системе координат. Компоненты в лабораторной системе получим, умножив на матрицу A, они оказываются равны (a_{xx}, a_{yx}, a_{zx}), (a_{xy}, a_{yy}, a_{zy}), (a_{xz}, a_{yz}, a_{zz}). Поскольку это все те же единичные взаимно перпендикулярные векторы, то модуль каждого из них равен единице, а скалярные произведения равны нулю, и мы получаем условия на элементы матрицы A. Например, из равенства единице модуля первого вектора найдем $a_{xx}^2 + a_{yx}^2 + a_{zx}^2 = 1$. Все условия оказывается возможным записать в компактном виде

$$AA^T = 1,$$

где 1 означает единичную матрицу 3×3. Матрица A с таким свойством называется *ортогональной*.

Домашнее задание. Проверьте, что условие $AA^T = 1$ действительно порождает условия нормированности и ортогональности векторов (a_{xx}, a_{yx}, a_{zx}), (a_{xy}, a_{yy}, a_{zy}), (a_{xz}, a_{yz}, a_{zz}). Проверьте, что условие $A^T A = 1$ эквивалентно условию $AA^T = 1$.

Продифференцируем условие $AA^T = 1$ по времени, учитывая, что единичная матрица от времени не зависит (производная от матрицы — это матрица, составленная из производных от элементов)

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0.$$

Согласно свойству операции транспонирования $(\dot{A}A^T)^T = A\dot{A}^T$. Таким образом, полученное равенство означает, что $(\dot{A}A^T)^T = -\dot{A}A^T$, то есть что $\dot{A}A^T$ — антисимметричная матрица.

Антисимметричная матрица 3×3 имеет всего три независимых элемента

$$\dot{A}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

из которых можно составить вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Этот вектор называется *угловой скоростью твердого тела*.

Скорость произвольной точки нетрудно теперь выразить через скорость точки O и угловую скорость. Дифференцируя соотношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\mathbf{r}'$ по времени, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \dot{A}\mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + \dot{A}(A^T A)\mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + (\dot{A}A^T)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O).$$

Замечания. Угловая скорость является характеристикой движения твердого тела как целого. Хотя в полученную формулу для скорости произвольной точки входят радиус-вектор и скорость точки O, угловая скорость не зависит от того, какая точка взята в качестве начала координат. Иначе говоря, можно написать

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'})$$

с какой-то другой точкой O', а угловая скорость останется прежней (проверьте!). Здесь имеется некая антианалогия с моментом импульса, который зависит от выбора начала координат.

Если тело закреплено на оси, то вектор угловой скорости направлен вдоль оси. Действительно пусть точки A и B лежат на оси. Тогда их скорости равны нулю. Но

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A),$$

поэтому $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = 0$, что означает $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. В этом случае часто говорят об угловой скорости как о скалярной величине ω.

Уравнения движения твердого тела

Общие уравнения движения. Центр масс

Поскольку твердое тело — это система материальных точек, то для него справедливы те общие соотношения, которые мы получили при выводе законов сохранения. В частности

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}.$$

Нетрудно понять, что выписанные равенства как раз и представляют собой уравнения движения твердого тела. При этом импульс $\mathbf{P}$ и момент импульса $\mathbf{L}$ выражаются через координаты какой-либо точки O и углы

Эйлера, и мы получаем шесть уравнений для шести переменных. Поскольку в дальнейшем все силы будут только внешними, индекс "внешн" будем опускать.

Первое из этих уравнений нетрудно проанализировать. *Центром масс* системы материальных точек называется точка C с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i / m,$$

где $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — полная масса системы. Очевидно, что координаты центра масс твердого тела во вмороженной системе координат постоянны, так что центр масс — это какая-то "вмороженная" в твердое тело точка.

Скорость центра масс равна

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i / m,$$

Вспоминая определение импульса

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i,$$

видим, что импульс выражается через скорость центра масс

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c,$$

причем эта связь такая же, как для одной материальной точки. Окончательно первое из уравнений движения твердого тела можно записать так

$$m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}.$$

Иначе говоря, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе твердого тела, под действием всех сил, приложенных к твердому телу.

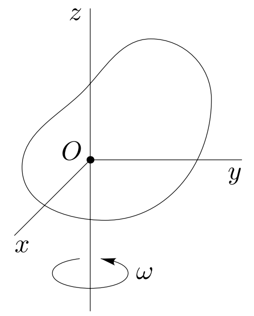
Замечание. На самом деле это утверждение справедливо для любой системы материальных точек, а не только для твердого тела. Оно получило название *теоремы о движении центра масс.* Мы уже упоминали о нем в связи с законами сохранения.

Поскольку мы без всяких усилий получили уравнение движение центра масс твердого тела, то в качестве "какой-либо точки O" часто оказывается удобно выбирать центр масс тела C.

В противоположность уравнениям для поступательного движения, уравнения для углов оказываются очень сложными, поэтому далее мы рассмотрим два простых частных случая: тело на оси и так называемое плоское движение твердого тела.

Тело на оси. Основное уравнение вращательного движения

Пусть твердое тело закреплено на оси. Как мы уже говорили, в этом случае оно имеет одну степень свободы, так что нужно всего одно уравнение движения. Поместим начало координат O в какую-либо точку на оси вращения. Ось z системы координат направим по оси вращения. Тогда необходимое уравнение движения получится, если расписать z-компоненту уравнения $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$.



Твердое тело на оси

Сделаем некоторые приготовления. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ направлена по оси z, поэтому скорость i-ой точки тела с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$ равна $\mathbf{v}_i = (-\omega y_i, \omega x_i, 0)$. Проекция момента импульса этой точки на ось z равна

$$l_{iz} = m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega.$$

Суммируя моменты импульса отдельных точек тела, получим

$$L_z = J\omega, \quad J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Величина J называется *моментом инерции тела относительно оси* z. Очевидно, она не меняется во время движения, поскольку выражения $x_i^2 + y_i^2$ не меняются во время движения.

Замечание. Момент инерции определяется относительно некоторой оси. Бессмысленно говорить о моменте инерции, не указывая ось, к которой он относится. С другой стороны, ось не обязана быть осью вращения. Можно говорить о моменте инерции относительно любой воображаемой оси.

Подставляя найденное выражение для L_z в уравнение $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$, получаем

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

Это соотношение получило не очень удачное название *основного уравнения вращательного движения*. Производную $d\omega/dt = \beta$ обычно называют *угловым ускорением твердого тела*.

Замечания. Угловое ускорение можно ввести как производную $d\boldsymbol{\omega}/dt$ в общем случае, но это как-то не прижилось.

При применении основного уравнения вращательного движения нужно помнить, что в правой части стоит z-компонента суммы моментов внешних сил относительно какой-то точки на оси. Эта величина не зависит от выбора начала координат O на оси. Действительно, $M_z = xF_y - yF_x$. В это выражение вовсе не входит координата z, которая только и меняется при выборе другого начала координат O'.

Силы реакции оси не дают вклада в z-компоненту момента внешних сил. Действительно, они приложены в точках с $x = 0$, $y = 0$, так что по формуле $M_z = xF_y - yF_x$ их вклад равен нулю.

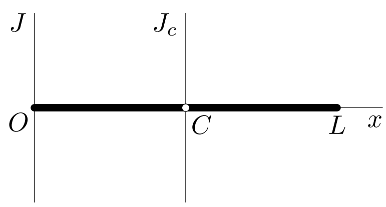
Момент инерции

Выше мы назвали моментом инерции твердого тела относительно оси z величину

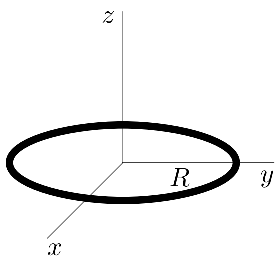
$$J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

В таком виде формула хороша для твердых тел, состоящих из отдельных материальных точек. Если же тело сплошное, то следует писать

$$J = \int \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2)\, d^3r.$$



Момент инерции стержня



Момент инерции кольца

В качестве примера вычислим момент инерции стержня длины L и массы m относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню. Имеем

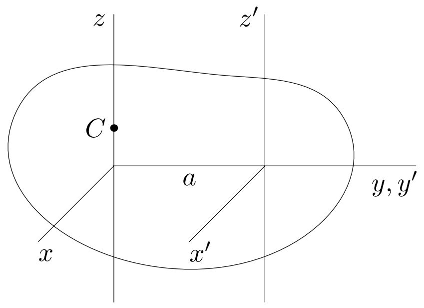
$$J = \int_0^L \frac{m}{L} x^2\, dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{mL^2}{3}.$$

При вычислении моментов инерции оказываются полезными следующие два приема.

Теорема Штейнера. Пусть известен момент инерции J_c относительно некоторой оси z, проходящей через центр масс. Тогда момент инерции относительно любой другой оси z', параллельной данной, вычисляется по формуле

$$J = J_c + ma^2,$$

где a — расстояние между осями.



К теореме Штейнера

Для доказательства введем две системы координат (x, y, z) и (x', y', z'). Имеем $x = x'$, $y = y' + a$, $z = z'$. Поэтому

$$J = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) = \sum_i m_i(x_i^2 + (y_i - a)^2) =$$
$$= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i y_i + a^2 \sum_i m_i = J_c + ma^2.$$

Вторая сумма равна нулю, так как представляет собой y-координату центра масс $y_c = (\sum_i m_i y_i)/m$, которая равна нулю.

Замечание. Одна из осей в теореме Штейнера должна проходить через центр масс. Теорема неверна для двух произвольных осей.

В качестве примера вычислим момент инерции уже рассмотренного стержня относительно оси, проходящей через середину стержня, и перпендикулярной стержню. Это как раз J_c из теоремы Штейнера, поэтому $mL^2/3 = J = J_c + mL^2/4$, откуда $J_c = mL^2/12$.

Плоская фигура. Пусть все точки тела лежат в плоскости xy. Тогда

$$J_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = J_y + J_x.$$

Применим это соотношение для вычисления момента инерции кольца радиусом R и массой m относительно его диаметра (оси x на рисунке). Момент инерции кольца относительно оси z, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, легко вычисляется по определению

$$J_z = mR^2.$$

Моменты инерции относительно осей x и y, очевидно, равны в силу симметрии кольца

$$J_x = J_y.$$

Теперь можно написать

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = mR^2/2.$$

Плоское движение

Плоским движением твердого тела называется такое движение, когда направление угловой скорости остается постоянным, а скорость какой-либо точки O (и тогда любой точки) перпендикулярна угловой скорости.

Плоское движение можно еще описать, сказав, что оно эффективно двумерное: разные точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях, а сами эти плоскости перпендикулярны угловой скорости. Примером плоского движения является качение цилиндра по наклонной плоскости.

Как уже говорилось в начале лекции, в двумерном пространстве твердое тело имеет три степени свободы: две поступательных и одну вращательную. Уравнения движения, соответствующие поступательным степеням свободы, имеют вид

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F_x, \quad m\frac{dv_{cy}}{dt} = F_y.$$

Уравнение вращательного движения проще всего записать, взяв в качестве базовой точки центр масс тела C. Приготовления аналогичны тем, что мы делали, когда рассматривали тело на оси. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Скорость точки с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$ равна $\mathbf{v}_i = (v_{cx} - \omega(y_i - y_c), v_{cy} + \omega(x_i - x_c), 0)$. Момент импульса одной точки

$$\begin{aligned} l_{iz} = m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = m_i[x_i v_{cy} - y_i v_{cx} + \omega(x_i(x_i - x_c) + y_i(y_i - y_c))] = \\ = m_i(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) + m_i\omega[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2] + \\ + m_i[(x_i - x_c)(v_{cy} + \omega x_c) + (y_i - y_c)(-v_{cx} + \omega y_c)]. \end{aligned}$$

При вычислении момента импульса всего тела последнее слагаемое обращается в нуль вследствие определения центра масс

$$L_z = m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) + J_c\omega,$$

где $J_c = \sum_i m_i[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2]$ — момент инерции твердого тела относительно оси z, проходящей через центр масс. Как и в случае тела на оси, эта величина остается постоянной в процессе движения. Первое слагаемое в формуле для L_z тоже имеет простую интерпретацию — это момент импульса “тела как целого” относительно начала координат лабораторной системы отсчета.

Суммарный момент внешних сил может быть записан аналогично

$$M_z = \sum_i x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = x_c F_y - y_c F_x + \sum_i (x_i - x_c)F_{iy} - (y_i - y_c)F_{ix},$$

где $F_x = \sum_i F_{ix}$ (аналогично для y), а последнюю сумму естественно назвать суммарным моментом внешних сил относительно центра масс тела

$$M_{cz} = \sum_i (x_i - x_c)F_{iy} - (y_i - y_c)F_{ix}.$$

Если мы теперь подставим найденные выражения для L_z и M_z в уравнение $dL_z/dt = M_z$, то получим

$$J_c \frac{d\omega}{dt} = M_{cz}.$$

Действительно, дифференцируя выражение $m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx})$ по времени, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) = m(\dot{x}_c v_{cy} - \dot{y}_c v_{cx}) + \\ + m(x_c \dot{v}_{cy} - y_c \dot{v}_{cx}) = m(x_c \dot{v}_{cy} - y_c \dot{v}_{cx}), \end{aligned}$$

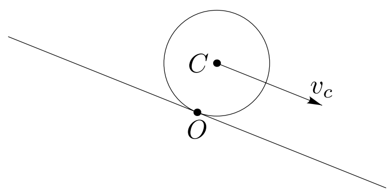
а это выражение сокращается с $x_c F_y - y_c F_x$ в силу уже выписанных уравнений поступательного движения.

Замечания. Некоторая громоздкость вывода уравнения вращательного движения в этом случае по сравнению со случаем тела на оси (уравнение-то получилось то же самое) связана с тем, что исходный закон изменения момента импульса $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$ справедлив только в инерциальной системе отсчета (в нашем случае — в неподвижной лабораторной). Нельзя просто записать этот закон, выбрав в качестве базовой точки центр масс тела C, поскольку он, вообще говоря, движется с ускорением.

В уравнения плоского движения твердого тела входят только масса тела и момент инерции. Таким образом тело характеризуется всего двумя числами. Два совершенно разных твердых тела будут двигаться совершенно одинаково, если только их массы и моменты инерции совпадают. Этот удивительный вывод справедлив и в общем случае с одним маленьким уточнением: твердое тело однозначно характеризуется своей массой и тремя моментами инерции (так называемыми главными моментами), то есть всего четырьмя числами.

Мгновенная ось вращения

Как мы видели выше, при плоском движении скорость точки твердого тела с радиус-вектором $\mathbf{r}$ равна $\mathbf{v} = (v_{cx} - \omega(y - y_c), v_{cy} + \omega(x - x_c), 0)$. Если $\omega \neq 0$, то существует точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю $\mathbf{v} = 0$. Координаты этой точки равны $x = x_c - v_{cy}/\omega$, $y = y_c + v_{cx}/\omega$, координата z произвольна. Таким образом, существует целая прямая, такая что ее точки в данный момент времени имеют нулевую скорость. Эта прямая называется *мгновенной осью вращения тела.*



Качение цилиндра по наклонной плоскости.
Точка O — мгновенная ось вращения

Замечание. В общем трехмерном случае прямой, точки которой в данный момент времени имели бы нулевые скорости, нет. Однако справедливо следующее обобщение: существует прямая, точки которой имеют скорости, направленные вдоль этой прямой. Таким образом, наиболее общее движение твердого тела есть винтовое движение: вращение вокруг какой-либо прямой с одновременным поступательным движением вдоль этой же прямой.

В ряде случаев удается записать уравнение вращательного движения, взяв за базовую точку не центр масс C, а мгновенную ось вращения O. Выражения для координат мгновенной оси вращения можно записать в векторном виде $\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c/\omega^2$. Модуль вектора $\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c$ равен $|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c| = v_c/\omega$. Момент инерции относительно оси O можно найти по теореме Штейнера

$$J_o = J_c + mv_c^2/\omega^2.$$

В отличие от момента инерции J_c момент инерции J_o зависит от времени

$$\frac{dJ_o}{dt} = m\left(\frac{v_c^2}{\omega^2}\right)'.$$

Момент внешних сил относительно точки C можно выразить через момент относительно O

$$M_{cz} = M_{oz} + [(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}]_z = M_{oz} - \frac{\mathbf{v}_c\mathbf{F}}{\omega} =$$
$$= M_{oz} - \frac{m}{\omega}\left(\frac{v_c^2}{2}\right)' = M_{oz} - \frac{m\omega}{2}\left(\frac{v_c^2}{\omega^2}\right)' - \frac{mv_c^2}{\omega^2}\omega'$$

(при переходе ко второй строке мы использовали уравнение $md\mathbf{v}_c/dt = \mathbf{F}$). После сделанных приготовлений мы можем записать

$$J_o\frac{d\omega}{dt} = J_c\frac{d\omega}{dt} + \frac{mv_c^2}{\omega^2}\omega' = M_{cz} + \frac{mv_c^2}{\omega^2}\omega' = M_{oz} - \frac{m\omega}{2}\left(\frac{v_c^2}{\omega^2}\right)' = M_{oz} - \frac{\omega}{2}J_o'.$$

Если $J_o' = 0$ (это справедливо, например, для качения цилиндра по наклонной плоскости), то

$$J_o\frac{d\omega}{dt} = M_{oz}.$$

Замечание. Подчеркнем, что записать уравнение движения в столь простом виде можно только при соблюдении условия $J_o' = 0$, что справедливо далеко не всегда. Уравнением же $J_c d\omega/dt = M_{cz}$ можно пользоваться в любом случае.

Твердое тело в силовом поле

Записывая выше уравнения движения твердого тела, мы ничего не говорили о внешних силах, молчаливо предполагая, что каждая внешняя сила действует только на одну точку твердого тела. В силовом поле (например, в поле тяжести) это уже не так — силовое поле действует на все точки твердого тела разом. Поскольку в уравнения движения входят только суммарная сила и суммарный момент, естественно попытаться выразить эти интегральные характеристики непосредственно через величины, описывающие положение твердого тела, то есть через координаты центра масс и углы Эйлера. В общем случае простых выражений такого типа нет, поскольку

$$\mathbf{F}_{\text{полн}} = \sum_i \mathbf{F}(\mathbf{r}_i, t),$$
$$\mathbf{M}_{\text{полн}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_i, t),$$

а эти суммы при произвольной зависимости $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ можно вычислить, только если известно детальное описание самого твердого тела. Однако в однородном поле, например в поле тяжести, когда $F(\mathbf{r}_i, t) = m_i\mathbf{g}$, суммы легко вычисляются

$$\mathbf{F}_{\text{полн}} = m\mathbf{g},$$
$$\mathbf{M}_{\text{полн}} = \left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_c \times (m\mathbf{g}).$$

Таким образом, эффект от суммы сил тяжести, действующих на все точки твердого тела, точно такой же, как от одной силы $m\mathbf{g}$, приложенной в центре масс тела.

Замечание. Подобный результат справедлив только для однородного поля. Действие других типов полей не удается свести к одной сосредоточенной силе, действующей на какую-либо точку твердого тела.

Законы сохранения

Нам осталось обсудить особенности применения законов сохранения при наличии твердых тел. Поскольку твердое тело представляет собой частный случай системы материальных точек, то для механических систем, в состав которых входят твердые тела, справедливо все то, что уже обсуждалось для системы материальных точек. В частности, силы реакции связей между отдельными точками твердого тела, а также их моменты компенсируются, что приводит к законам сохранения импульса и момента импульса. При этом импульс твердого тела вычисляется по формуле $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c$, а момент импульса — по формуле $L_z = J\omega$ для тела на оси и $L_z = m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) + J_c\omega$ для плоского движения тела.

Обсудим более подробно закон сохранения энергии. Во-первых, нам нужно выражение для кинетической энергии твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела — это сумма кинетических энергий всех его точек.

Для тела на оси $\mathbf{v}_i = (-\omega y_i, \omega x_i, 0)$, поэтому

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2)}{2} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Для плоского движения $\mathbf{v}_i = (v_{cx} - \omega(y_i - y_c), v_{cy} + \omega(x_i - x_c), 0)$, а потому

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (v_{cx}^2 + v_{cy}^2)}{2} + \sum_i m_i \omega[-v_{cx}(y_i - y_c) + v_{cy}(x_i - x_c)] + \\ + \sum_i \frac{m_i \omega^2 ((x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2)}{2} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

(последняя сумма в верхней строке равна нулю по определения центра масс).

Во-вторых, нам нужно выражение для потенциальной энергии. Пусть все внешние силы (о силах реакции связей между отдельными точками твердого тела поговорим позднее), действующие на все точки твердого тела являются потенциальными. Тогда потенциальная энергия твердого тела — это просто сумма потенциальных энергий отдельных точек. Поскольку потенциальная энергия отдельной точки зависит от ее координат, а они, в свою очередь, зависят от координат центра масс и углов Эйлера, то потенциальная энергия в общем случае зависит от координат центра масс и углов Эйлера, то есть не только от положения твердого тела, но и от его ориентации. Исключение составляет случай однородного поля, например поля тяжести плоской Земли. В этом случае $U_i = m_i g z_i$, поэтому

$$U = \sum_i U_i = m g z_c.$$

Замечания. Эта формула согласуется с выведенным ранее результатом, что действие однородного поля сводится к действию сосредоточенной силы, приложенной к центру масс тела.

Для неоднородного поля, например для сферической Земли, такая простая формула уже неверена.

В-третьих, работа-2 внешних сил, как и в случае материальной точки, связана с кинетической энергией.

$$A^{(2)} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \sum_i \mathbf{F}_i (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)) \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_i \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_c) \, dt.$$

Для плоского движения, используя уравнения движения твердого тела, получаем

$$A^{(2)} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x v_{cx} + F_y v_{cy} + \omega M_{cz})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{v}_{cx} v_{cx} + m\dot{v}_{cy} v_{cy} + J_c \dot{\omega}\omega)\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}\right) dt = \left(\frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}.$$

Замечание. Член $\int M_{cz}\omega\,dt$ записывают еще в виде $\int M_{cz}\,d\varphi$, где φ — угол поворота вокруг оси z.

Наконец, покажем, что мощность, развиваемая силами реакции связей между отдельными точками твердого тела, равна нулю. Выше мы уже нашли, что $\sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{F}\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega}\mathbf{M}_c$. Но сумма всех сил реакции связей и сумма их моментов равны нулю, а потому $\sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = 0$. Таким образом, силы реакции связей не портят закона сохранения энергии.