Математический и физический маятники

Математический маятник

Математический маятник — это материальная точка массы m, подвешенная на нити длиной l. Пусть движение материальной точки происходит в плоскости xy. Заимствуя выражения для компонент ускорения из первой лекции

$$a_x = -\dot{\varphi}^2 l\cos\varphi - \ddot{\varphi} l\sin\varphi,$$
$$a_y = -\dot{\varphi}^2 l\sin\varphi + \ddot{\varphi} l\cos\varphi$$

(мы только заменили R на l), мы можем записать второй закон Ньютона для нашей материальной точки в виде

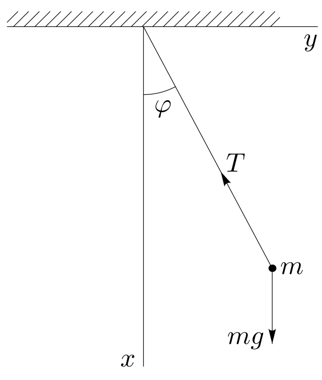
$$m(-\dot{\varphi}^2 l\cos\varphi - \ddot{\varphi} l\sin\varphi) = mg - T\cos\varphi,$$
$$m(-\dot{\varphi}^2 l\sin\varphi + \ddot{\varphi} l\cos\varphi) = -T\sin\varphi.$$

Умножая второе уравнение на $\cos\varphi$ и вычитая из него первое, умноженное на $\sin\varphi$ (на самом деле это просто преобразование к повернутым осям), получим

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi.$$

Это и есть уравнение движения математического маятника. Принято записывать его в виде

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$$



Математический маятник

До сих пор наше рассмотрение было точным. Если угол отклонения маятника от вертикали составляет не более 5–7° (около 0.1 радиана), то можно воспользоваться разложением синуса в ряд Тейлора

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$$

Относительная величина второго члена в правой части составляет $\varphi^2/6$, что для углов порядка 0.1 радиана дает погрешность менее 0.2%. При указанных амплитудах можно ограничиться первым членом в правой части и записать

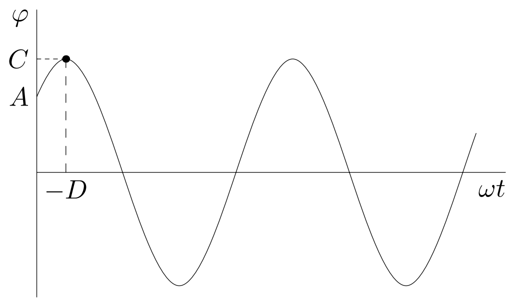
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Это уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*. Его решение имеет вид

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ — *частота колебаний*, A и B — произвольные постоянные.

Домашнее задание. Проверьте, что выписанная зависимость $\varphi(t)$ действительно удовлетворяет уравнению движения.



Колебания маятника

Поскольку синус и косинус — периодические функции с периодом 2π, то движение математического маятника также является периодическим с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Периодическое движение маятника называют еще *колебательным*, а T — *периодом колебаний математического маятника*. Колебания, происходящие по закону синуса и косинуса, называются *гармоническими*.

Замечание. Точное уравнение движения маятника также имеет периодические решения, то есть описывает колебания. Однако эти колебания происходят по более сложному закону, чем закон синуса и косинуса, то есть уже не являются гармоническими.

Постоянные A и B определяются из начальных условий. Имеем

$$\varphi(0) = A = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega B = \dot{\varphi}_0.$$

Вместо A и B часто используют *амплитуду колебаний* $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ и *начальную фазу* D, которая определяются из условий

$$\cos D = A/C, \quad \sin D = -B/C.$$

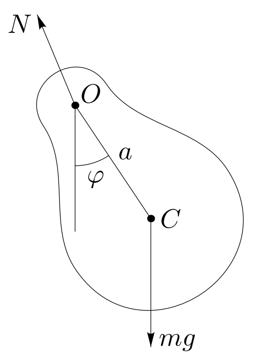
Зависимость $\varphi(t)$ переписывается в виде

$$\varphi(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\omega t\right) = \\ = C(\cos D\cos\omega t - \sin D\sin\omega t) = C\cos(\omega t + D).$$

Таким образом, C представляет собой максимальное значение φ во время движения, а D — начальное (при $t = 0$) значение аргумента косинуса.

Физический маятник

Физический маятник — это твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси.



Физический маятник

Пусть масса маятника равна m, момент инерции относительно оси вращения равен J_o, а центр масс отстоит от оси вращения на расстояние a. Тогда уравнение вращательного движения записывается в виде

$$J_o\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi$$

(мы учли, что $\omega = \dot{\varphi}$, поэтому $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$). Это уравнение полностью аналогично уравнению движения математического маятника. Для малых колебаний можно написать

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mga}{J_o}\varphi,$$

откуда получаем выражение для *периода колебаний физического маятника*

$$T = 2\pi\sqrt{J_o/mga}.$$

Тело на пружине

Еще один распространенный случай колебаний — колебания тела на пружине. Рассмотрим сперва горизонтальные колебания. Пусть материальная точка лежит на горизонтальном столе и прикреплена пружиной к вертикальной стене. Пусть трение об стол отсутствует. Записывая второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось (причем начало координат соответствует положению материальной точки при недеформированной пружине), находим

$$m\ddot{x} = -kx$$

(мы учли, что $a_x = \ddot{x}$). В отличие от маятников, мы сразу получили уравнение гармонических колебаний, которое в этом случае является “точным” (конечно, ровно настолько, насколько точен закон Гука).

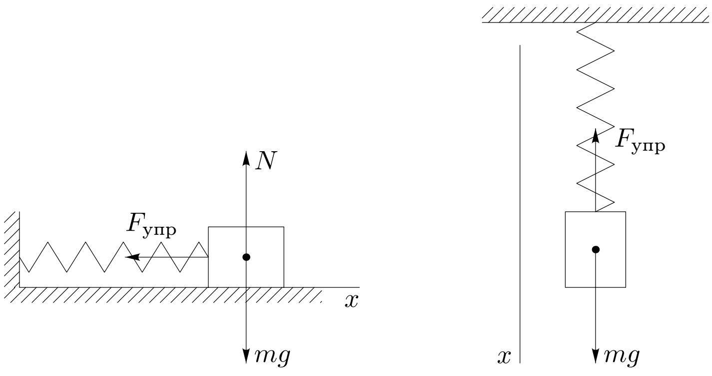
Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

Рассмотрим теперь материальную точку, которая подвешена за пружину к потолку. Вводя вертикальную ось и выбирая начало координат, как и ранее, найдем

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Положение равновесия (такое положение тела, когда сумма действующих на него сил равна нулю), определяется из уравнения $-kx_0 + mg = 0$ и



Тело на пружине (горизонтальный и вертикальный случаи)

имеет координату $x_0 = mg/k$. Отсчитывая координату y от положения равновесия $y = x - x_0$, имеем

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Это то же самое уравнение, которое мы получили в горизонтальном случае, поэтому и движение материальной точки точно такое же. Обычно сразу отсчитывают координату от положения равновесия, тогда сила тяжести в уравнение не входит.