Элементы кинетики

Это совсем маленькая лекция, поскольку в программе курса вопросам кинетики отведено очень мало места. Следовало бы их вообще выкинуть, но на то требуется соизволение министерства.

До настоящей кинетики мы так и не доберемся. В программе предусмотрены всего два вопроса: вычисление средних по распределению Максвелла и понятия средней длины свободного пробега и среднего числа столкновений молекул.

Вычисление средних по распределению Максвелла

Напомним, что под распределением Максвелла понимают обычно одно из трех распределений:

1) распределение по проекции импульса

$$P(p_x) = (2\pi m\theta)^{-1/2} e^{-p_x^2/2m\theta},$$

2) трехмерное распределение

$$P(\mathbf{p}) = (2\pi m\theta)^{-3/2} e^{-\mathbf{p}^2/2m\theta},$$

3) распределение по модулю импульса

$$P(p) = 4\pi p^2 (2\pi m\theta)^{-3/2} e^{-p^2/2m\theta}.$$

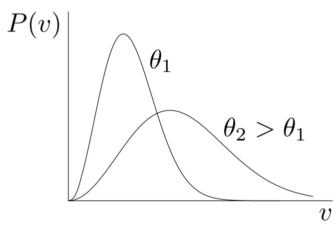
Эти распределения нормированы естественным для них образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(p_x)\, dp_x = 1, \quad \int d^3p\, P(\mathbf{p}) = 1, \quad \int_0^{\infty} P(p)\, dp = 1.$$

Чаще всего пользуются третьим из приведенных распределений. Делая замену $p = mv$, можно переписать его в виде распределения по скорости

$$P(v) = 4\pi v^2 (m/2\pi\theta)^{3/2} e^{-mv^2/2\theta}, \quad \int_0^{\infty} P(v)\, dv = 1.$$

С этим распределением связаны три важные величины.



Распределение $P(v)$ при двух разных значениях θ

Наиболее вероятной называется скорость, при которой распределение имеет максимум. Приравнивая нулю производную $P'(v)$, находим

$$v_{\text{н.в}} = \sqrt{2\theta/m}.$$

Средней скоростью называется величина (для нас это не новость)

$$\langle v\rangle = \int_0^\infty vP(v)\,dv =$$
$$= 4\pi(m/2\pi\theta)^{3/2}(-\theta/m)(v^2+2\theta/m)e^{-mv^2/2\theta}|_0^\infty = \sqrt{8\theta/\pi m}.$$

Средней квадратичной скоростью называется корень из среднего квадрата скорости

$$\langle v^2\rangle = \int_0^\infty v^2P(v)\,dv = 3\theta/m.$$

Замечания. Интеграл приводится к гауссовскому и вычисляется.
Отметим, что $m\langle v^2\rangle/2 = 3\theta/2$ — средняя внутренняя энергия газа, что конечно же, не случайно.

Итак

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{3\theta/m}.$$

Среднее число столкновений. Средняя длина свободного пробега

Подсчет среднего числа столкновений ν данной молекулы со всеми остальными за одну секунду исходит из представления о молекуле как о жестком шарике диаметра d. Такие шарики сталкиваются, если их центры сближаются на расстояние, меньшее d. Величину $\sigma = \pi d^2$ называют *эффективным сечением молекулы.* Если средняя скорость движения молекулы равна $\langle v\rangle$, то за одну секунду молекула “заметает” объем $\sigma\langle v\rangle$. Если концентрация газа равна n, то в таком объеме находится $\sigma\langle v\rangle n$ молекул, с которыми наша молекула должна неминуемо столкнуться. Разумеется, наш расчет лишь прикидочный. Более аккуратный расчет дает дополнительный множитель $\sqrt{2}$

$$\nu = \sqrt{2}\,\sigma\langle v\rangle n.$$

Если молекула испытывает ν столкновений в секунду, то без столкновений она движется в среднем в течение времени $1/\nu$. Умножая это время на среднюю скорость движения $\langle v\rangle$, получим длину свободного пробега

$$\lambda = \langle v\rangle/\nu = 1/\sqrt{2}\,\sigma n.$$