Понятие электромагнитного поля

В прошлом семестре мы изучали механические системы. Состояние механической системы описывается *конечным* числом координат и скоростей, зависящих от одного параметра — времени t. В этом семестре мы будем изучать принципиально новый физический объект — *электромагнитное поле* (ЭМ поле). Его состояние описывается двумя векторами $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (векторами *напряженности электорического поля* и *индукции магнитного поля*), которые зависят не только от времени t, но и от пространственных координат x, y, z, то есть от четырех переменных. Зависимость от координат можно наглядно представить следующим образом. Введем в рассматриваемой области пространства сетку с каким-либо шагом (скажем, 1 см). Тогда значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в узлах сетки (если рассматриваемая область пространства конечна, то их конечное число) дают некое огрубленное представление об ЭМ поле. Уменьшая шаг сетки (одновременно увеличивается число узлов), можно получать все более и более точное описание ЭМ поля. С этой точки зрения поле является системой *с бесконечным числом степеней свободы*, аналогично жидкости или твердому телу, когда их рассматривают как сплошную среду.

В механике основной закон движения — второй закон Ньютона — представлял из себя дифференциальное уравнение. Поскольку в механике независимая переменная всего одна (время t), то это было *обыкновенное* дифференциальное уравнение. Поскольку величины, описывающие ЭМ поле, зависят от четырех независимых переменных, то уравнения движения ЭМ поля (уравнения Максвелла) — это уравнения в *частных производных*, наряду с производными по времени в них входят и производные по координатам x, y, z.

С физической точки зрения ЭМ поле реализует концепцию *близкодействия*. В механике сила, действующая на частицу в данный момент времени, зависит от ее положения и скорости, а также от положений и скоростей остальных частиц системы в данный момент времени. Если какая-то из частиц системы сместилась, остальные “чувствуют” это мгновенно, как бы далеко они не находились. О таком положении вещей говорят как о *дальнодействии*.

Ниже мы увидим, что ЭМ поле создается электрическими зарядами и действует на электрические заряды, то есть в уравнения Максвелла входят координаты и скорости заряженных частиц, а в уравнения движения заряженных частиц — поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Уравнения в частных производных, которыми описывается ЭМ поле, обладают следующим важным свойством. Изменение состояния поля в какой-либо области пространства, вызванное движением зарядов, приводит к появлению возмущения (*ЭМ волны*), которое распространяется в другие области с конечной скоростью и действует на находящиеся в тех областях заряды. С этой точки зрения ЭМ поле является посредником при взаимодействии заряженных частиц.

Векторный анализ

Как мы уже сказали, уравнения ЭМ поля — это уравнения в частных производных, то есть в них входят конструкции типа $\partial E_x/\partial y$. Как и в векторном анализе, особое значение имеют инвариантные дифференциальные операции, то есть такие операции, вид которых не зависит от системы координат.

Градиент. С этой операцией мы уже встречались в механике. Пусть дано скалярное поле $\varphi(x,y,z)$. (Это означает, что при замене координат $(x,y,z) \to (x',y',z')$ само поле не меняется $\varphi(x,y,z) = \varphi(x',y',z')$.) Тогда производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ также образуют вектор

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi,$$

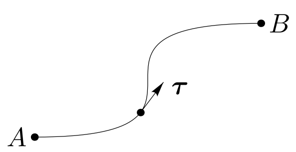
который называют еще *градиентом* скалярного поля φ (справа написаны два наиболее употребительных обозначения градиента).

Домашнее задание. Проверить, что частные производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ при повороте системы координат действительно преобразуются как компоненты вектора.

Обратная операция — восстановление поля по градиенту — выглядит так

$$\int_{AB} (\nabla\varphi)_\tau \, dl = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Интегрирование идет по любой кривой, соединяющей точки A и B, величина интеграла от этого не зависит. $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к кривой, направленный от A к B.



Восстановление функции по градиенту

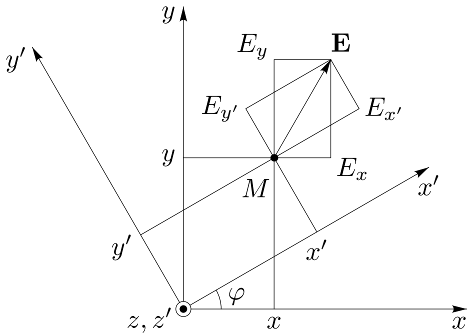
Дивергенция. Пусть задано векторное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. [Это означает, что при замене координат E_x, E_y, E_z преобразуются как компоненты вектора. Например, при преобразовании (вращение на угол φ вокруг оси z)

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' = z \end{cases}$$

компоненты $\mathbf{E}$ преобразуются по закону

$$\begin{cases} E_{x'}(x', y', z') = E_x(x, y, z)\cos\varphi + E_y(x, y, z)\sin\varphi, \\ E_{y'}(x', y', z') = -E_x(x, y, z)\sin\varphi + E_y(x, y, z)\cos\varphi, \\ E_{z'}(x', y', z') = E_z(x, y, z). \end{cases}$$

Обратите внимание, что преобразуются и компоненты вектора, и координаты, от которых они зависят.]



Преобразование векторного поля при повороте

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ называется скалярная величина

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

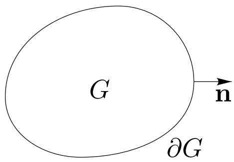
Домашнее задание. Проверить, что дивергенция действительно является скаляром, то есть при повороте системы координат

$$\left(\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}\right)(x', y', z') = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)(x, y, z).$$

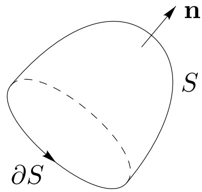
Восстановить поле по дивергенции, очевидно, нельзя, однако справедлива *теорема Гаусса*

$$\int_G \nabla \mathbf{E}\, d^3r = \int_{\partial G} E_n\, dS.$$

Здесь G — произвольная область, ∂G — граница этой области. Нормаль $\mathbf{n}$ должна быть внешней. Доказательство теоремы Гаусса стребуете у математиков.



К теореме Гаусса



К теореме Стокса

Оператор Лапласа (лапласиан). Если есть скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$, то можно вычислить сперва градиент, а затем дивергенцию. Результирующую операцию называют *оператором Лапласа* или *лапласианом*

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Чаще всего для лапласиана используют обозначение Δ.

Домашнее задание. Проверить, что при последовательном вычислении градиента и дивергенции действительно получается выражение $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$. Показать, что это выражения является скаляром.

Оператор Лапласа можно применять и к вектору. Запись $\Delta\mathbf{E}$ означает вектор с компонентами

$$\Delta\mathbf{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z).$$

Домашнее задание. Проверить, что это действительно вектор. Вообще, оператор Лапласа представляет собой “скаляр”: к какому объекту его ни примени, трансформационные свойства объекта не меняются.

Уравнение $\Delta\varphi = 0$ называют *уравнением Лапласа*, а уравнение $\Delta\varphi = \rho$ — *уравнением Пуассона*. При разумных дополнительных условиях (все-таки уравнение дифференциальное) уравнение Пуассона разрешимо, так что оператор Лапласа обратим.

Ротор. Для векторного поля существует еще одна инвариантная дифференциальная операция. *Ротором* векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right).$$

(Вы несомненно увидели аналогию с векторным произведением).

Домашнее задание. Показать, что это действительно вектор.

Восстановить поле по ротору нельзя, но справедлива *теорема Стокса*

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{E})_n\, dS = \int_{\partial S} E_\tau\, dl.$$

Здесь S — произвольная поверхность, ∂S — граница этой поверхности, а нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности связана с касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к границе правилом правого винта.

Оказывается, что по заданным дивергенции и ротору можно восстановить и само поле (с точностью до постоянной, конечно).

Четыре теоремы. Справедливы утверждения

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,\\
&\text{Если } \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \text{ то } \mathbf{E} = -\nabla\varphi,\\
&\text{Если } \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \text{ то } \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Первые два утверждения можно, используя теоремы Стокса и Гаусса, переписать в интегральной форме

$$\int_{\partial S} (\nabla\varphi)_\tau\, dl = 0, \quad \int_{\partial G} (\operatorname{rot}\mathbf{E})_n\, dS = 0.$$

Домашнее задание. Докажите первые два утверждения (это просто), а доказательства третьего и четвертого стребуйте с математиков.

Уравнения Максвелла. Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Уравнения движения ЭМ поля (*уравнения Максвелла*) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t,\\
&\nabla\mathbf{B} = 0, \qquad c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t.
\end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность зарядов, находящихся в поле (так что $\int_G \rho\, d^3 r = Q$ представляет собой заряд в области G), а $\mathbf{j}$ — плотность тока этих зарядов (так что $\int_S j_n\, dS = I$ представляет собой ток через поверхность S). Постоянные ε_0 и c называются диэлектрической постоянной и скоростью света. (В конце курса мы покажем, что c является скоростью распространения ЭМ волн, а пока это просто название.)

Интегральная форма уравнений Максвелла получится, если проинтегрировать уравнения первого столбца по некоторой области и воспользоваться теоремой Гаусса, а уравнения второго столбца проинтегрировать по некоторой поверхности и воспользоваться теоремой Стокса

$$\int_{\partial G} E_n\, dS = Q/\varepsilon_0, \qquad \int_{\partial S} E_\tau\, dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\, dS,$$

$$\int_{\partial G} B_n\, dS = 0, \qquad c^2\int_{\partial S} B_\tau\, dl = I/\varepsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t}\int_S E_n\, dS.$$

Стоящие здесь интегралы называются *потоками* векторных полей $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ *через поверхность* (в том числе и замкнутую)

$$\Phi_E = \int_S E_n\, dS, \qquad \Phi_B = \int_S B_n\, dS$$

и *циркуляциями* векторных полей *по замкнутому контуру*

$$\Gamma_E = \int_{\partial S} E_\tau\, dl, \qquad \Gamma_B = \int_{\partial S} B_\tau\, dl.$$

По отношению ко времени уравнения Максвелла являются дифференциальными уравнениями первого порядка, поэтому мы должны задать еще начальные условия $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Кроме того, должны быть заданы плотность заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Собственно уравнениями движения являются уравнения второго столбца (только они содержат производные по времени). Уравнения же первого столбца являются *уравнениями связей.* Во-первых, они накладывают ограничения на начальные условия

$$\nabla\mathbf{E}_0 = \rho(\mathbf{r}, 0)/\varepsilon_0, \qquad \nabla\mathbf{B}_0 = 0.$$

Во-вторых, они накладывают некоторое условие на функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Вычисляя дивергенцию от уравнения $c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t$, пользуясь одной из “четырех теорем” и уравнением $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, получим

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\mathbf{j} = 0. \tag{*}$$

В интегральной форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int_{\partial G} j_n \, dS = 0,$$

и мы видим, что это *закон сохранения электрического заряда*: электрический заряд в области может измениться только за счет втекания (вытекания) заряда через границу.

Замечание. Для теории поля, в отличие от механики, вообще характерны законы сохранения в форме (*). Поле — это распределенная система, и просто закон сохранения (сохраняется полная сумма зарядов во всем пространстве) мало о чем говорит. *Локальное* сохранение заряда говорит нам еще и о том, что заряд не может мгновенно переместиться из одной точки в другую, он должен непрерывно "перетечь".

Если же начальные распределения полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ удовлетворяют условиям связи и функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют закону сохранения заряда (*), то во все последующие моменты времени уравнения первого столбца удовлетворяются автоматически.

Домашнее задание. Проверьте это утверждение.

Отметим еще одно важное свойство уравнений Максвелла: они линейные. Обычно это свойство формулируют как *принцип суперпозиции.* Именно, если поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t)$, а поля $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\rho_2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)$, то поля $\alpha\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \beta\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) + \beta\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\alpha\rho_1(\mathbf{r}, t) + \beta\rho_2(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) + \beta\mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)$ при любых значениях постоянных α и β.

Выше мы сказали, что функции ρ и $\mathbf{j}$ должны быть заданы. На самом деле электрический заряд не существует самостоятельно, его несут на себе некоторые частицы. Когда эти частицы попадают в ЭМ поле, на них действует некоторая сила. Таким образом, для получения замкнутой картины мы должны добавить к уравнениям Максвелла еще и уравнения движения заряженных частиц в ЭМ поле. Эти уравнения имеют вид

$$m\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Здесь m — масса частицы, q — ее *электрический заряд.* Выражение

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

называют *силой Лоренца.* Если $v/c \ll 1$, то приближенно

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

В последнем уравнений трудно не узнать второй закон Ньютона. В конце курса мы разберемся, почему он справедлив только при малых (по сравнению со скоростью света!) скоростях, а при больших требует уточнения.

Уравнение движения частицы нужно, как и в механике, дополнить двумя начальными условиями $\mathbf{r}(t=0)=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0$.

Электростатика

В течение нашего курса мы будем в основном решать уравнения Максвелла в различных ситуациях, начиная с простых и переходя к более сложным. Самая простая ситуация: функции ρ и $\mathbf{j}$ не зависят от времени (конечно, нам придется "держать заряды руками"), и мы ищем решение в виде полей, также не зависящих от времени. Тогда уравнения Максвелла распадаются на две группы: отдельно для электрического и магнитного поля

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \nabla\times\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla\mathbf{B} &= 0, & c^2\nabla\times\mathbf{B} &= \mathbf{j}/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Уравнения первой строки называются *уравнениями электростатики*, их-то мы и будем сейчас решать.

Отметим сразу, что в силу одной из "четырех теорем" из уравнения $\nabla\times\mathbf{E}=0$ следует $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$. Величину φ называют *потенциалом* электростатического поля (а само поле является потенциальным в полном согласии с соответствующим понятием в механике). Разумеется, потенциал определен с точностью до постоянной. Уравнение $\nabla\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ становится уравнением для потенциала

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0.$$

Как мы уже отмечали, оно называется уравнением Пуассона.

Электростатика вакуума и "внешних" зарядов

Рассмотрим ситуацию, когда все безграничное пространство пусто, и лишь кое-где располагаются известные нам заряды. Они могут быть точечными или размазанными по линиям, поверхностям или областям (в этих случаях говорят о линейной, поверхностной и объемной плотностях заряда). Перепишем еще раз уравнения для поля $\mathbf{E}$

$$\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = 0,$$

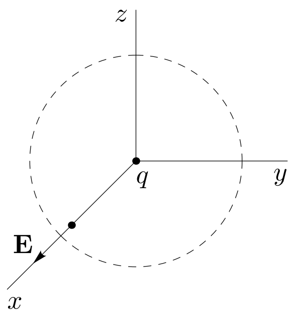
и эквивалентное уравнение для потенциала φ

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

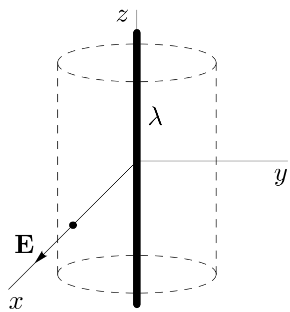
(зная который, можно вычислить поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$).

Использование симметрии. Поля точечного заряда, нити, плоскости. Рассмотрим три частных случая, когда решение можно получить малой кровью.

Пусть во всем пространстве имеется единственный точечный заряд q. Без ограничения общности поместим его в начало координат. Что можно сказать о поле в точке на оси x? Применим соображения симметрии. Распределение заряда не меняется при отражении в плоскости xz. Точка на оси x при этом отражении не смещается. Следовательно, поле в этой точке не должно меняться. Но при отражении в плоскости xz компонента E_y меняет знак. Единственная возможность удовлетворить требованию симметрии — положить $E_y = 0$. Аналогично (рассматривая отражение в плоскости xy) получаем $E_z = 0$. Итак, поле на оси x направлено вдоль оси x.



К расчету поля точечного заряда



К расчету поля заряженной нити

Распределение заряда не меняется при любых поворотах вокруг начала координат. При таких преобразованиях точка на оси x на расстоянии r от начала координат переходит в точку на сфере радиуса r. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от r (и один и тот же для всех точек сферы), а направлен $\mathbf{E}$ во всех точках сферы вдоль радиуса $\mathbf{E} = (\mathbf{r}/r)E(r)$.

Домашнее задание. Покажите, что поле вида $\mathbf{E} = (\mathbf{r}/r)E(r)$ (центральное поле) всегда удовлетворяет уравнению $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, то есть является потенциальным.

Неизвестную функцию $E(r)$ найдем, переписав уравнение $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ в интегральной форме

$$\int_{\partial G} E_n \, dS = Q/\varepsilon_0.$$

В качестве области G возьмем шар радиуса r с центром в начале координат. Тогда граница ∂G — сфера радиуса r. E_n постоянна на сфере и равна $E(r)$, а потому

$$\int_{\partial G} E_n \, dS = 4\pi r^2 E.$$

Заряд внутри G есть наш точечный заряд q, окончательно

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Эти формулы называют *полем точечного заряда.*

Замечание. Приведенные рассуждения основаны только на сферической симметрии. Они, стало быть, применимы не только к точечному заряду, но и к любому сферически симметричному распределению заряда. Например, точно так же можно найти поле равномерно заряженного шара.

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля точечного заряда равен $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 r$.

Обратимся теперь к случаю, когда заряд равномерно распределено по прямой бесконечной нити с линейной плотностью λ. Без ограничения общности будем считать, что нить совпадает с осью z. Применяя отражения в плоскостях xz и xy, убеждаемся, что поле на оси x направлено вдоль оси x.

Распределение заряда не меняется при вращениях вокруг оси z и сдвигах вдоль оси z. При этом точка на оси x на расстоянии r от начала координат переходит в точку на поверхности цилиндра радиуса r, ось которого совпадает с осью z. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от расстояния r до оси z, вектор лежит в плоскости xy и направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_r$ цилиндрической системы координат $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r)$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле вида $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r)$ является потенциальным. Указание: воспользуйтесь тем, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{e}_r = (x/r, y/r, 0)$.

Неизвестную функцию $E(r)$ найдем, выбрав в уравнении $\int_{\partial G} E_n \, dS = Q/\varepsilon_0$ область G в виде цилиндра радиуса r и длины L, ось которого совпадает с осью z. Интергалы по торцам дадут нуль, а интеграл по боковой поверхности даст $2\pi r L E$. Заряд внутри цилиндра равен λL. Окончательно

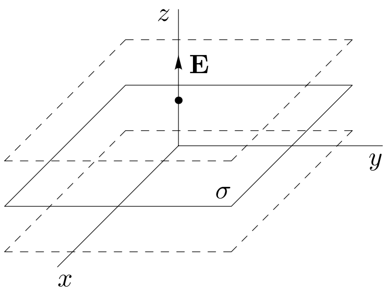
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}_r \lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Эти формулы называют *полем заряженной нити.*

Замечание. Как и в предыдущем случае, мы пользовались только цилиндрической симметрией. Следовательно, указанные рассуждения применимы и к другим задачам с цилиндрически симметричным распределением заряда.

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля заряженной нити равен $\varphi = -(\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln r$.

Наконец, рассмотрим равномерно заряженную с поверхностной плотностью σ плоскость. Без ограничения общности будем считать, что она совпадает с плоскостью xy. Применяя отражения в плоскостях xz и yz, убеждаемся, что поле на оси z направлено вдоль оси z.



К расчету поля заряженной плоскости

Распределение заряда не меняется при смещении параллельно плоскости xy и отражении в плоскости xy. При этом точка на оси z на расстоянии r от начала координат переходит в точку на одной из двух плоскостей, отстоящих на растояние r от плоскости xy. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от $|z|$, а направления по обе стороны от заряженной плоскости противоположны $\mathbf{E} = (0, 0, (z/|z|)E(|z|))$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$ потенциально.

В качестве области G в уравнении $\int_{\partial G} E_n\, dS = Q/\varepsilon_0$ берем цилиндр радиуса r и длины L, ось которого совпадает с осью z, а торцы отстоят от плоскости xy на равные расстояния. Интеграл по боковой поверхности дает нуль, а интегралы по торцам дают $2\pi r^2 E$. Заряд в области равен $\pi r^2\sigma$. Окончательно

$$E = \sigma/2\varepsilon_0.$$

Эту формулу называют *полем заряженной плоскости.*

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля заряженной плоскости равен $\varphi = -(\sigma/2\varepsilon_0)|z|$.

Замечания. При решении других задач с аналогичной симметрией (например, при расчете поля толстой пластины) может оказаться, что симметрии по отношению к отражению в плоскости xy нет. В таком случае можно лишь утверждать, что $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$, саму же $E(z)$ удается определить только с точностью до постоянной. Однако на больших расстояниях (например, на расстояниях, много больших толщины пластины) мы должны получить тот же ответ, что для заряженной плоскости. Этот принцип дает возможность довести решение до победного конца.

Принцип суперпозиции позволяет расширить класс задач, которые можно решить указанным выше способом. Именно, можно, очевидно, рассчитать поле произвольного количества точечных зарядов, нитей и плоскостей.

Соображения симметрии полезны и в других задачах. Хотя они не позволят решить задачу до конца, но могут существенно облегчить решение.

Общее решение. Оказывается, что существует общее решение уравнений электростатики вакуума и "внешних" зарядов. А именно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Формулы эти не должны казаться страшными. Фактически они следуют из формул для поля точечного заряда и принципа суперпозиции.

Замечание. Мы хотим подчеркнуть, что *все* задачи электростатики вакуума решаются этими формулами *раз и навсегда*. Вам не нужно решать никаких уравнений. Просто подставьте заданное распределение заряда и вычислите интеграл.

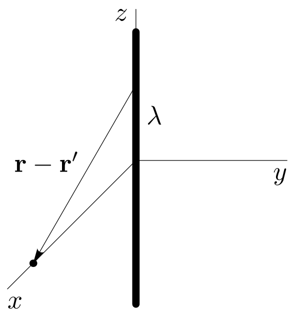
Строго говоря, эти формулы справедливы для зарядов, распределенных в конечной области пространства. Поскольку уравнения включают только производные от $\mathbf{E}$, то $\mathbf{E}$ определено с точностью до произвольного постоянного вектора. В приведенных решениях эта "произвольная постоянная" выбрана так, чтобы $\mathbf{E} \to 0$ и $\varphi \to 0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$.

В качестве примера получим выражения для полей нити и плоскости. Интегралы в этих случаях нужно слегка модифицировать, поскольку интегрирование идет не по объему, а по линии или поверхности.

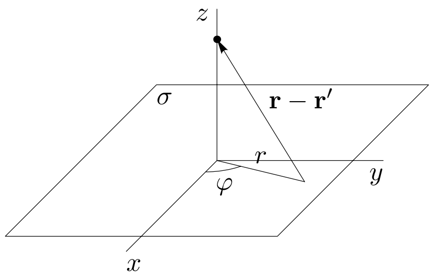
Поле нити достаточно вычислить на оси x, причем только E_x-компоненту. Имеем

$$E_x(x, 0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{3/2}} = \left.\frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2 + z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}.$$

Замечание. Первообразную для $(x^2 + a^2)^{-3/2}$ стоит запомнить, она нам еще встретится.



Расчет поля нити с помощью
страшной формулы для $\mathbf{E}$



Расчет поля плоскости с помощью
страшной формулы для $\mathbf{E}$

Для вычисления поля плоскости введем полярные координаты (r, φ) на плоскости. Достаточно вычислить E_z-компоненту на оси z.

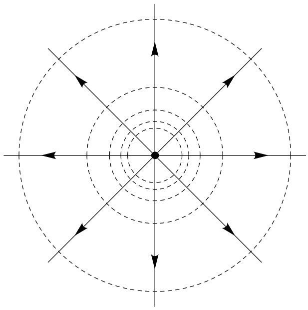
$$E_z(0,0,z) = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr = -\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}\Bigg|_0^\infty = (z/|z|)\sigma/2\varepsilon_0.$$

Наглядное изображение электростатического поля. Линии поля и эквипотенциальные поверхности. *Линией поля* или *силовой линией* называется кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля, то есть линия $\mathbf{r}(s)$, где $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. *Эквипотенциальной поверхностью* называется множество точек пространства, имеющих один и тот же потенциал, то есть поверхность $\varphi(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$. Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, то линии поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. На рисунке показаны линии поля и эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда.

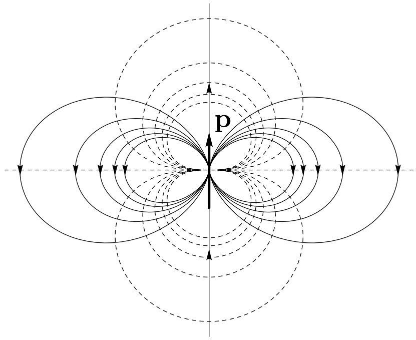
Домашнее задание. Нарисуйте линии поля и эквипотенциальные поверхности поля двух точечных зарядов q и $-q$ (эту картинку вы найдете в книжках).

Проделайте то же самое с зарядами q и q (а вот такую картинку эквипотенциальных поверхностей вы в книжках не найдете).

Замечание. Электростатическое поле является постоянным и потенциальным. Конечно, линиями поля можно изображать любые поля, в том числе переменные и непотенциальные. Эквипотенциальными же поверхностями можно изображать, очевидно, только потенциальные поля.



Сиовые линии (сплошные)
и эквипотенциальные
поверхности (пунктирные)
поля точечного заряда



Поле диполя

Электрический диполь. Рассмотрим два точечных заряда q и $-q$, которые располагаются в точках $(0,0,a/2)$ и $(0,0,-a/2)$. Потенциал поля равен

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a/2)^2}}\right).$$

Перейдем к пределу $a \to 0$, одновременно увеличивая q, так что $qa = p = \mathrm{const}$. Мы получим

$$\varphi(x,y,z) = \frac{zp}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Вводя вектор $\mathbf{p} = (0,0,p)$, можно написать

$$\varphi = \frac{\mathbf{rp}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Рассмотренную нами систему двух зарядов называют *электрическим диполем*, вектор $\mathbf{p}$ называется *дипольным моментом*, а выписанная выше формула для φ — потенциалом поля диполя.

Домашнее задание. Вычислите электрическое поле диполя.