

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Цель работы: ознакомление с методами измерения физических величин и расчетом погрешностей проводимых измерений на примере определения плотности твердого тела.

Задание: определить линейные размеры изучаемого тела, необходимые для расчета его объема, взвесить тело и рассчитать его плотность. Оценить погрешности отдельных измерений и точность полученного результата.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: изучить основные положения теории ошибок, ознакомиться с измерительным инструментом, используемым в работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. И. В. Савельев, *Курс общей физики*, М.: Наука, 1982, том I, гл. 5, § 39
2. *Физический практикум* (под редакцией В. И. Ивероновой), М: Физматгиз, 1962, введение
3. Н. Н. Евтихийев, А. Г. Черкашина, *Основы статистической теории измерений*, М.: МИРЭА, 1978.
4. А. Н. Зайдель, *Ошибки измерений физических величин*, Л.: Наука, 1974.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем причина возникновения ошибок при измерениях?
2. Что называют случайной погрешностью?
3. Что называют систематической погрешностью?
4. Как определить погрешность прибора?
5. Какова цель многократных измерений?
6. Как найти абсолютную погрешность отдельного измерения?
7. Что такое средняя квадратичная погрешность?
8. Как оценить погрешность прямого измерения?
9. Что такое относительная погрешность?
10. Как оценить погрешность косвенного измерения?
11. Какова погрешность величин, значения которых даются в виде готового результата?

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T_EX

12. Как округляют погрешности и окончательный результат?

ОПИСАНИЕ АППАРАТУРЫ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Для оценки плотности твердого тела необходимо знать его объем и массу. Массу тела можно определить взвешиванием его на рычажных весах. Объем тела правильной геометрической формы определяют, измеряя его линейные параметры.

Таким образом, чтобы узнать плотность тела, необходимо провести ряд *физических измерений*. Под *измерением* понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения делятся на прямые и косвенные. При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно с помощью измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах. Примерами прямых измерений могут служить измерения длин линейкой, промежутков времени секундомером и т. п.

При косвенных измерениях искомое значение величины не измеряется непосредственно, а находится по известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными при прямых измерениях. К косвенным относятся, например, измерения объема или плотности твердых тел, измерение скорости движения тела по измерениям отрезков пути и промежутков времени, измерение удельного сопротивления проволоки и т. д.

Никакая физическая величина не может быть, однако, определена с абсолютной точностью. Другими словами, любое измерение всегда производится с некоторой ошибкой — *погрешностью*. Поэтому полученное в результате измерений значение какой-либо величины должно быть записано в виде

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

где Δx — *абсолютная погрешность измерения*, характеризующая возможное отклонение измеренного значения данной величины от его истинного значения. При этом, поскольку истинное значение остается неизвестным, можно дать лишь приближенную оценку абсолютной погрешности.

Поскольку причины возникновения ошибок бывают самыми разными, необходимо классифицировать погрешности. Только тогда возможна их правильная оценка, так как от типа погрешностей зависит и способ их вычисления.

Погрешности подразделяются на *случайные* и *систематические*.

Систематической погрешностью называют составляющую погрешности измерения, остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины. Она может быть свя-

зана с неисправностями измерительных приборов, неточностью их регулировки, неправильной их установкой и т. п. Систематические погрешности в принципе могут быть исключены, поскольку причины, их вызывающие, в большинстве случаев известны.

Случайной погрешностью называют составляющую погрешности измерения, изменяющуюся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности зависят от условий, в которых производятся измерения, от специфики измеряемых объектов и т. д. Эти погрешности принципиально неустраняемы, однако их величина уменьшается при использовании многократных измерений.

Выделяют также *погрешности приборов*, которые могут иметь как систематический, так и случайный характер. Эти погрешности связаны с несовершенством любого (исправного) измерительного инструмента. Если значение измеряемой величины определяется по шкале инструмента, абсолютная погрешность прибора считается, как правило, равной половине цены деления шкалы (например, линейки) или цене деления шкалы, если стрелка прибора перемещается скачком (секундомер). Для приборов, снабженных нониусом, погрешность можно считать равной точности нониуса. Погрешности электроизмерительных приборов определяют по их классу точности.

Как уже указывалось, случайные погрешности можно уменьшить, многократно измеряя одну и ту же величину. Однако максимально возможная точность измерения определяется теми приборами, которые используются в эксперименте. Поэтому увеличение числа измерений имеет смысл лишь до тех пор, пока случайная погрешность не станет явно меньше погрешности прибора.

Предположим, что мы произвели n прямых измерений величины x . Обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$ результаты отдельных измерений, которые вследствие наличия случайных погрешностей будут неодинаковы. В теории вероятностей доказывается, что истинное значение измеряемой величины (при отсутствии систематических погрешностей) равно ее среднему значению, получаемому при бесконечно большом числе измерений, т. е.

$$x_{\text{ист}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

Поэтому наиболее близким к истинному будет для данной серии измерений среднее арифметическое значение, а именно

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3)$$

Отклонения измеренных значений x_i от $x_{\text{ср}}$ носят случайный характер и называются *абсолютными ошибками отдельных измерений*

$$\Delta x_i = |x_{\text{ср}} - x_i|. \quad (4)$$

При ограниченном числе измерений надо оценить абсолютную погрешность измеряемой величины, т. е. величину расхождения между $x_{\text{ср}}$ и $x_{\text{ист}}$, которое зависит от абсолютных ошибок отдельных измерений Δx_i . В качестве меры абсолютной случайной погрешности можно взять среднее квадратичное отклонение (среднюю квадратичную погрешность) данной величины, вычисляемое по формуле

$$\Delta x_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (5)$$

Это не означает, однако, что истинное значение измеряемой величины обязательно будет заключено в интервале от $x_{\text{ср}} - \Delta x_{\text{кв}}$ до $x_{\text{ср}} + \Delta x_{\text{кв}}$. Оказывается, что даже при очень большом числе измерений вероятность того, что истинное значение попадет в указанный интервал, не превышает 0.7. Другими словами, надежность полученного результата составит около 70 %. При малом числе измерений ($n < 10$) оно будет еще меньше. Вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадет в интервал, заданный величиной абсолютной погрешности, называется *доверительной вероятностью* или коэффициентом доверия p , а соответствующий интервал — *доверительным интервалом*. Достоверность результата при данном числе измерений можно увеличить, уменьшая его точность, т. е. расширяя доверительный интервал.

Обычно случайную погрешность рассчитывают по формуле

$$\Delta x_{\text{сл}} = \alpha_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (6)$$

где $\alpha_{n,p}$ — коэффициент, зависящий от числа измерений и выбранного значения вероятности p . Значения $\alpha_{n,p}$ для ряда случаев приведены в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

$p \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	100
0.5	0.82	0.76	0.74	0.73	0.72	0.71	0.71	0.70	0.68
0.7	1.39	1.25	1.19	1.16	1.13	1.12	1.11	1.10	1.04
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	1.98

Необходимая степень надежности результата определяется спецификой производимых измерений. В условиях учебной лаборатории достаточно брать $p = 0.7$.

Для окончательной оценки величины абсолютной погрешности Δx необходимо сравнить вычисленную по формуле (6) случайную погрешность с погрешностями других видов. Если путем многократных измерений удалось сделать случайную ошибку заметно меньше приборной (при незначительных систематических ошибках), то в качестве Δx можно взять погрешность использовавшегося прибора. В противном случае в качестве Δx берут значение $\Delta x_{\text{сл}}$.

Для сравнительной оценки точности измерения различных величин используют так называемую *относительную погрешность*, равную отношению абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины

$$E = \frac{\Delta x}{x_{\text{ср}}}. \quad (7)$$

Относительную погрешность иногда выражают в процентах. Тогда

$$E = \frac{\Delta x}{x_{\text{ср}}} 100 \, \%.$$

Как уже отмечалось, измерения плотности тел относятся к косвенным измерениям. При таких измерениях физическая величина A является функцией величин $x, y, z, \dots$, которые могут быть измерены непосредственно приборами. Результат косвенного измерения записывается в виде

$$A \pm \Delta A, \quad (8)$$

где $A = A(x, y, z, \dots)$ — величина, рассчитанная по средним значениям параметров $x, y, z, \dots$, ΔA — абсолютная погрешность, зависящая от погрешностей этих параметров.

Абсолютную погрешность косвенных измерений удобнее рассчитать уже после того, как найдена относительная погрешность. Эту погрешность можно записать в виде $E = dA/A$. С другой стороны $dA/A = d(\ln A)$. Таким образом, относительная погрешность величины A равна полному дифференциалу натурального логарифма функции, определяющей зависимость данной величины от измеряемых параметров, т. е.

$$E = d[\ln A(x, y, z, \dots)]. \quad (9)$$

Рассмотрим пример расчета E при определении плотности тела, имеющего форму цилиндра. Выражение для плотности будет тогда иметь следующий вид

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}, \quad (10)$$

где D — диаметр основания цилиндра, H — высота цилиндра.

Таким образом, ρ является функцией параметров m , D и H , определяемых прямыми измерениями.

Чтобы найти $E = \Delta\rho/\rho$, прологарифмируем выражение (10)

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln D - \ln H. \quad (11)$$

Теперь продифференцируем уравнение (11) слева и справа

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} + \frac{d\pi}{\pi} + 2\frac{dD}{D} + \frac{dH}{H}. \quad (12)$$

Так как погрешности отдельных измерений, как правило, не компенсируют друг друга, необходимо при этом заменить знаки “—” на “+”. Наконец, заменяя дифференциалы dm , dH и т. д. приращениями соответствующих величин Δm , ΔH и т. д., получим окончательное выражение для относительной ошибки

$$E = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H}. \quad (13)$$

Здесь Δm , ΔH , ... — абсолютные погрешности, определенные после прямых измерений данных параметров.

Табличные величины (π , g и т. п.), входящие в расчетные формулы могут быть взяты с большой точностью. Тогда связанными с ними погрешностями пренебрегают. При округлении их значений погрешности возрастают и должны быть учтены. Следует учитывать и погрешности параметров, которые в данном эксперименте не измеряются (например, масса гири и т. п.).

В указанных выше случаях абсолютная погрешность берется равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе. Если, например, дано, что $m = 1.6$ кг, следует взять $\Delta m = 0.05$ кг.

Рассчитав относительную погрешность по формуле (13), можно найти абсолютную погрешность измерения плотности

$$\Delta\rho = E\rho. \quad (14)$$

Для правильной записи конечного результата необходимо округлить рассчитанное значение абсолютной погрешности и сам результат измерения. Как правило, точность оценки погрешности бывает очень небольшой. Поэтому абсолютная погрешность округляется до одной значащей цифры. Если, однако, эта цифра оказалась единицей, следует оставить две значащие цифры.

Округление конечного результата производится с учетом его погрешности. При этом последняя значащая цифра результата должна быть того же порядка величины (находится в той же десятичной позиции), что и погрешность. Если, к примеру, получено, что $\rho = 8723.23 \text{ кг/м}^3$, а $\Delta\rho = 93.27 \text{ кг/м}^3$, то правильная запись результата будет выглядеть так

$$\rho = (8720 \pm 90) \text{ кг/м}^3.$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. С помощью штангенциркуля определить линейные размеры исследуемого тела, необходимые для вычисления его объема. Каждый параметр измерить не менее пяти раз.
2. С помощью весов и разновесов определить массу тела. Взвешивание производить не менее пяти раз.
3. Все экспериментальные результаты занести в таблицу 2.

ТАБЛИЦА 2

	1	2	3	4	5	Средн. знач.	Случ. погр.	Погрешн. прибора
D , мм								
ΔD , мм								
$(\Delta D)^2$, мм ²								
H , мм								
ΔH , мм								
$(\Delta H)^2$, мм ²								
m , г								
Δm , г								
$(\Delta m)^2$, г ²								

Рекомендуется следующий метод взвешивания (метод Менделеева). На одну чашку весов кладется гиря с массой заведомо большей, чем масса тела, а на другую — разновесы, добиваясь равновесия весов. Затем на чашку с разновесами помещают взвешиваемое тело, а разновесы снимают до тех пор, пока вновь не установится равновесие. Масса снятых гирь будет равна массе тела. Этот метод позволяет исключить систематические погрешности, связанные с неравноплечностью весов и зависимостью их чувствительности от величины нагрузки.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. По полученным экспериментальным данным находят средние значения линейных размеров и массы тела.
2. Определяют абсолютные погрешности отдельных измерений и случайные погрешности проведенных прямых измерений. Результаты расчетов заносят в таблицу.
3. Используя средние значения замеренных параметров, вычисляют плотность изучаемого тела.
4. Находят выражение для вычисления относительной погрешности измеренной плотности и рассчитывают ее значение.
5. Определяют абсолютную погрешность $\Delta\rho$. Записывают окончательный результат измерения плотности тела, используя правила округления погрешностей и самой измеряемой величины.