

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВИКА

Цель работы: определение момента инерции маховика по периоду его совместных колебаний с телом, момент инерции которого известен.

Задание: по периоду малых колебаний маховика с небольшим магнитом вокруг неподвижной оси найти момент инерции маховика и убедиться в том, что значения моментов инерции, полученные в опытах с разными магнитами, в пределах ошибок измерений совпадают друг с другом.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: изучить понятия момента инерции точки, тела, момента силы, уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальное уравнение гармонических колебаний, изучить описание установки и вывод расчетной формулы для определения момента инерции маховика.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Савельев, *Курс общей физики, т. 1: Механика, молекулярная физика*, М.: Наука, 1987, гл. V, §§38, 39; гл. VII, §§53, 54

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела относительно некоторой оси.
2. Выведите уравнение колебаний, которому подчиняется система тел 1 и 2, используемых в лабораторной работе.
3. Получите выражение для частоты колебаний маховика с магнитом, рассматривая систему этих тел как физический маятник.
4. При каком условии маховик с магнитом совершают гармонические колебания?
5. Выведите расчетную формулу для определения момента инерции J_1 маховика.
6. Оцените погрешность приближения материальной точки для магнита.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

ОПИСАНИЕ АППАРАТУРЫ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси OO' (рис. 1). Разобьем его на элементарные массы Δm_k (масса тела $m = \sum_k \Delta m_k$), которые можно считать материальными точками. Расстояние каждой из них от оси вращения обозначим буквой R_k . Моментом инерции I_k материальной точки Δm_k относительно данной оси называется произведение ее массы на квадрат расстояния до оси вращения

$$I_k = \Delta m_k R_k^2. \quad (1)$$

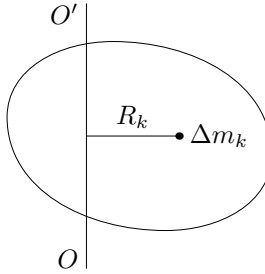


Рис. 1.

Величина I , равная сумме I_k произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси

$$I = \sum_k I_k = \sum_k \Delta m_k R_k^2. \quad (2)$$

Суммирование производится по всем элементарным массам Δm_k , на которые можно разбить тело. Из определения I видно, что момент инерции есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Элементарная масса равна произведению плотности тела в данной точке на соответствующий элементарный объем

$$\Delta m_k = \rho_k \Delta V_k.$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

$$I = \sum_k \rho_k R_k^2 \Delta V_k. \quad (3)$$

Если плотность тела постоянна, ее можно вынести за знак суммы

$$I = \rho \sum_k R_k^2 \Delta V_k. \quad (4)$$

Соотношения (2), (3), (4) являются приближенными, причем тем более точными, чем меньше сами элементарные объемы ΔV_k и соответствующие им элементарные массы Δm_k . Следовательно, задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV. \quad (5)$$

Интегралы в (5) берутся по всему объему тела. Величины ρ и R в этих интегралах являются функциями точки, то есть, например, декартовых координат x , y и z .

Таким образом, нахождение моментов инерции тел сложной формы по формулам (5) является непростой задачей. В таких случаях большую роль приобретают экспериментальные методы определения этой величины.

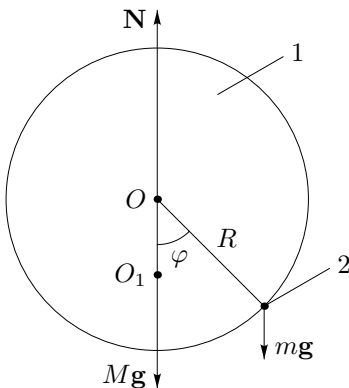


Рис. 2.

Схема установки, используемой в настоящей работе для определения момента инерции J_1 маховика 1, показана на рис. 2. Тело 1 массы M может вращаться вокруг неподвижной оси O , проходящей через его центр масс. Действующие на тело 1 сила тяжести $M\mathbf{g}$ и реакции оси $\mathbf{N}$ вращающего момента относительно оси O не создают, и тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Закрепим на расстоянии R от оси вращения небольшое тело 2 массы m . Тогда у системы тел 1 и 2 появится устойчивое положение равновесия ($\varphi = 0$, см. рис. 2), при выходе из которого система будет совершать малые колебания под действием момента силы тяжести $m\mathbf{g}$. Найдем частоту этих колебаний.

Пусть система отклонилась на небольшой угол φ от положения равновесия. Уравнение движения системы тел 1 и 2 относительно оси O в этом случае запишется в виде

$$-mgR \sin \varphi = (J_1 + J_2)\ddot{\varphi}, \quad (6)$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно тел 1 и 2 относительно оси O . Размеры тела 2 на порядок меньше расстояния R , поэтому его можно считать материальной точкой и вычислять его момент инерции J_2 по формуле (1)

$$J_2 = mR^2.$$

Знак $(-)$ в уравнении (6) перед вращательным моментом появился потому, что вектор момента направлен противоположно вектору φ^1 . Если угол φ достаточно мал, то справедливо приближенное равенство $\sin \varphi \approx \varphi$.

Тогда уравнение (6) перепишется в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR}{J_1 + J_2} \varphi = 0 \quad (7)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где введено обозначение

$$\omega^2 = \frac{mgR}{J_1 + J_2}. \quad (8)$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний (7), решением которого будет функция

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда колебаний (зависит от начальных условий), ω — частота колебаний, α — начальная фаза колебаний.

Итак, при малых φ угловое отклонение системы тел 1 и 2 изменяется со временем по гармоническому закону. Измерив на опыте период колебаний T ($T = 2\pi/\omega$) системы тел 1 и 2 и зная константы m , g , R , можно

¹При малых углах отклонения можно рассматривать φ как вектор, связанный с направлением поворота правилом “правого винта”

найти неизвестный момент инерции J_1 . Действительно, из формулы (8) получаем

$$J_1 = \frac{mgRT^2}{4\pi^2} - mR^2. \quad (9)$$

Можно убедиться в том, что рассматривая систему тел 1 и 2 как физический маятник, подвешенный на расстоянии $OO_1 = mR/(m + M)$ от его центра масс O_1 (см. рис. 2), мы получим формулу (8) для частоты колебаний и, соответственно, формулу (9) для вычисления момента инерции J_1 тела 1.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Укрепить небольшой магнит на ободе маховика и измерить расстояние от центра масс маховика до центра масс магнита.
2. Измерить не менее пяти раз время $n = 3—5$ полных колебаний маховика с магнитом. Результаты измерений занести в таблицу.
3. Повторить измерения пп. 1 и 2, прикрепив соосно к первому второй магнит.

ТАБЛИЦА ИЗМЕРЕНИЙ

Масса магнита, г	t , с					$t_{\text{ср}}$, с	$T_{\text{ср}}$, с	$J_{1\text{ср}}$, кг · м ²
	1	2	3	4	5			
$m_1 =$								
$m_2 =$								

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Найти средний период колебаний маховика с магнитом по формуле

$$T_{\text{ср}} = \frac{t_{\text{ср}}}{n},$$

где n — число колебаний.

2. Вычислить среднее значение момента инерции $J_{1\text{ср}}$ маховика по формуле (9). При расчетах считать, что масса магнита цилиндрической формы $m = (28.55 \pm 0.05)$ г; масса магнита в форме параллелепипеда $m = (61.55 \pm 0.05)$ г; ускорение свободного падения g принять равным $g = (9.81 \pm 0.05)$ м/с².

3. Рассчитать относительную погрешность E измерения момента инерции по формуле

$$E = \frac{\Delta J_1}{J_1} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta T}{T} + \left(1 - \frac{mR^2}{J_1}\right) \frac{\Delta R}{R}.$$

Учитывая, что $mR^2/J_1 \ll 1$, можно воспользоваться приближенной формулой

$$E = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta R}{R}.$$

4. Найти абсолютную погрешность измерения $\Delta J_1 = J_1 E$ и записать числовой результат в виде $(J_{1\text{ср}} \pm \Delta J_1)$ кг · м².
5. Сравнить значения моментов инерции, полученные в опытах с одним и двумя магнитами, и убедиться в том, что в пределах ошибок измерений они совпадают друг с другом.