

В. В. Батыгин
И. Н. Топтыгин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

R&C
Dynamics

В. В. БАТЫГИН, И. Н. ТОПТЫГИН

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Под редакцией М. М. Бредова

Издание третье, исправленное

R&C **РХО**
Dynamics Москва

2002

УДК 537.1
Б 28

Интернет-магазин
MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - техника
-

Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.

Сборник задач по электродинамике. — Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 640 стр.

В сборнике содержится около 900 задач, иллюстрирующие различные разделы классической электродинамики и специальной теории относительности. Задачи разнообразны как по содержанию, так и по трудности. Наряду с задачами, иллюстрирующими основные понятия и законы электродинамики и относящимися к основному обязательному курсу электродинамики, в сборник включено значительное количество более сложных задач, помогающих более фундаментальному изучению электродинамики.

Сборник рассчитан в основном на студентов-физиков, составлен с учетом существующих программ по электродинамике и может быть использован в качестве учебного пособия для любых высших учебных заведений.

ISBN 5-93972-155-9

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002

<http://rcd.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора ко второму изданию		4
Предисловие редактора к первому изданию		5
Предисловие к третьему изданию		7
Предисловие ко второму изданию		8
Из предисловия к первому изданию		9
	Задачи	Ответы и решения
ГЛАВА I. Векторное и тензорное исчисление	11	239
§ 1. Векторная и тензорная алгебра. Преобразования векторов и тензоров	11	239
§ 2. Векторный анализ	17	245
ГЛАВА II. Постоянное электрическое поле в вакууме	27	249
ГЛАВА III. Электростатика проводников и диэлектриков	39	263
§ 1. Основные понятия и методы электростатики	39	263
§ 2. Потенциальные и емкостные коэффициенты	51	280
§ 3. Специальные методы электростатики	54	282
ГЛАВА IV. Постоянный ток	62	299
ГЛАВА V. Постоянное магнитное поле	69	307
ГЛАВА VI. Электрические и магнитные свойства вещества	81	328
§ 1. Поляризация вещества в постоянном поле	81	328
§ 2. Поляризация вещества в переменном поле	85	335
§ 3. Ферромагнитный резонанс	91	343
§ 4. Сверхпроводимость	94	350

ГЛАВА VII. Квазистационарное электромагнитное поле	98	353
§ 1. Квазистационарные явления в линейных проводниках	98	353
§ 2. Вихревые токи и скин-эффект	104	366
ГЛАВА VIII. Распространение электромагнитных волн	109	381
§ 1. Плоские волны в однородной среде. Отражение и преломление волн. Волновые пакеты	109	381
§ 2. Плоские волны в анизотропных и гиротропных средах	118	399
§ 3. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Дифракция	122	410
§ 4. Когерентность и интерференция	129	429
§ 5. Дифракция рентгеновых лучей	139	437
ГЛАВА IX. Электромагнитные колебания в ограниченных телах	143	442
ГЛАВА X. Специальная теория относительности	154	469
§ 1. Преобразования Лоренца	154	469
§ 2. Четырехмерные векторы и тензоры	165	484
§ 3. Релятивистская электродинамика	168	487
ГЛАВА XI. Релятивистская механика	174	495
§ 1. Энергия и импульс	174	495
§ 2. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле	187	517
ГЛАВА XII. Излучение электромагнитных волн	197	539
§ 1. Вектор Герца и разложение по мультиполям	197	539
§ 2. Электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольным образом	205	550
§ 3. Взаимодействие заряженных частиц с излучением	213	566
§ 4. Разложение электромагнитного поля на плоские волны	218	575
ГЛАВА XIII. Излучение при взаимодействии заряженных частиц с веществом	223	586
ГЛАВА XIV. Физика плазмы	228	604
§ 1. Движение отдельных частиц в плазме	228	604
§ 2. Коллективные движения в плазме	234	612
Приложения		621
Литература		631

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание настоящего задачника встретило положительный прием; думается, что это прежде всего свидетельствует о потребности в книге такого профиля не только как в собственно задачнике для учебных целей, но и как в пособии для лиц, которым по роду работы приходится сталкиваться с электродинамическими расчетами.

Второе издание книги пытается в какой-то мере отзывать на изменения, произошедшие за последнее время именно в области приложений электродинамики к некоторым конкретным вопросам физики и техники сегодняшнего дня. К таким вопросам относятся, в частности, сверхпроводимость, голография, физика плазмы.

Конечно, заданный объем книги и необходимость достаточно полно охватить основные разделы учебных курсов электродинамики ограничивают возможность рассмотрения многих новых задач и заставляют делать между ними выбор, который в значительной степени определяется вкусами и интересами авторов.

Тем не менее обновление материалов в этом смысле во втором издании (помимо очевидных редакционных правок первого издания) представляется нам целесообразным.

Было бы крайне желательно узнать мнения читателей по этому поводу, и мы будем весьма благодарны за критические замечания по этому изданию.

1969 г.

М. Бредов

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Интенсивное внедрение электротехники, радиотехники и электроники в самые различные отрасли народного хозяйства поставило перед широким кругом специалистов (радиоинженеры, инженеры по ускорительным установкам, по ядерной технике, электронике, автоматике и т. д.) задачу активного освоения методов расчетов электродинамических задач. Поэтому в настоящее время курсы электродинамики читаются не только в университетах, но, в той или иной форме, и в ряде высших технических учебных заведений. Вместе с тем, к сожалению, как в отечественной, так и в иностранной литературе отсутствует соответствующий курс, написанный на современном уровне и с охватом достаточно большого круга вопросов, который мог бы не только помочь студентам освоить технику практических расчетов по электродинамике, но и послужить руководством для лиц уже работающих в промышленности и сталкивающихся по роду своей деятельности с этими расчетами. Написание такого курса «Практической электродинамики» является весьма важной и сложной задачей, которую следовало бы решить в самом недалеком будущем.

Естественно, что предлагаемая книга никак не может претендовать на восполнение указанного пробела, однако представлялось крайне желательным осуществить шаг в данном направлении и создать сборник задач, который послужил бы не только чисто академическим пособием для студентов, но оказался бы полезным и для упомянутого широкого круга специалистов в плане демонстрации методов решений интересующих их задач.

В соответствии с поставленной целью мы стремились проводить хотя бы конспективные обсуждения методов решений задач и получаемых результатов с точки зрения возможных применений их к другим смежным проблемам. Кроме того, каждому параграфу предпосланы краткие теоретические введения, позволяющие вспомнить необходимый материал, не прибегая к литературе.

Для возможно более полного охвата всех разделов электродинамики в сборник включены хорошо известные «классические» задачи, разобранные и в других руководствах; вместе с тем, где это было возможно, максимально привлечен современный материал.

В пределах, допускаемых объемом книги, уделено внимание математическому вычислительному аппарату как непосредственно в задачах, так и в специальных приложениях (за исключением применений теории функции комплексного переменного, поскольку этот метод весьма хорошо освещен в литературе).

Учитывая, что предлагаемый сборник является первым опытом создания такого пособия, он, естественно, не свободен от недостатков. Ввиду этого мы будем особенно благодарны читателям за критические замечания.

1961 г.

М. Бредов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Последнее русское издание этой книги вышло в свет в 1970 году. В настоящем издании произведено только исправление замеченных авторами и читателями ошибок, опечаток и неточностей. Электродинамика и специальная теория относительности являются классическими разделами современной физики, и их основы не претерпели изменений за истекшие 30 лет. Поэтому включенный в книгу материал, безусловно, полезен и сегодняшнему студенту.

Однако области приложения теории расширяются с каждым годом, и сегодня существует немало быстро развивающихся ответвлений электродинамики, которые отсутствовали или существовали лишь в зачаточном состоянии 30 лет назад. Поэтому модернизацию и пополнение книги в части, касающейся научных и технических приложений общей теории, а также учет выявившихся в последнее время тенденций в методике преподавания, оставшийся автор считает своей актуальной задачей. Он надеется реализовать ее в следующей книге, которая будет называться «Современная электродинамика» и готовится сейчас к изданию в Научно-издательском центре «Регулярная и хаотическая динамика».

2001 г.

И. Топтыгин

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Общий характер сборника остался таким же, как и при первом издании. Во втором издании мы исправили замеченные ошибки, опечатки и неточности, а также дополнили книгу новым материалом. Введены новые разделы: сверхпроводимость, когерентность и интерференция (включая вопросы голографии), дифракция рентгеновых лучей, элементы физики плазмы. Существенно дополнены гл. IX — новыми задачами о резонаторах, в том числе открытых, гл. X — новыми задачами на преобразования Лоренца, гл. XI — рассмотрением кинематики трехчастичных распадов и двухчастичных реакций. Кроме того, мы перешли в этом издании на неэвклидову четырехмерную метрику, получающую все большее распространение в физической литературе.

Мы благодарны всем товарищам, чья помощь и поддержка способствовали выходу в свет второго издания книги, чьи замечания помогли улучшить ее содержание. Особенно мы признательны проф. И. М. Шмушкевичу за ценные советы, касающиеся содержания гл. X, XI, и просмотр рукописи этих глав, проф. Я. А. Смородинскому за поддержку и советы по содержанию книги в целом и проф. А. З. Долгинову за просмотр материалов гл. XIV.

1969 г.

В. Батыгин, И. Топтыгин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник задач рассчитан в основном на студентов-физиков и составлен с учетом существующих программ по электродинамике. Он может быть использован в качестве учебного пособия на инженерно-физических факультетах вузов, на физических факультетах университетов и педвузов, а также на радиотехнических и других факультетах, на которых изучается теория электромагнитного поля. Часть задач, включенных в сборник, может быть полезной и для лиц, занимающихся более углубленным изучением вопросов электродинамики.

Кроме задач, иллюстрирующих основные понятия и законы электродинамики, которые решаются простыми математическими методами, в сборник включено значительное количество более сложных задач (эти задачи отмечены звездочкой). Некоторые из них требуют трудоемких вычислений, в других рассматриваются вопросы теоретического характера, обычно выпадающие из лекционного курса (распространение волн в анизотропных и гиротропных средах, движение заряженных частиц в электромагнитном поле, представление электромагнитного поля в виде набора осцилляторов и др.). Наконец, имеются задачи, в которых разбирается материал, мало отраженный в существующей учебной литературе: взаимодействие заряженных частиц с веществом (гл. XIII), применение законов сохранения к анализу процессов столкновений и распада частиц (§ 1 гл. XI), ферромагнитный резонанс (§ 3 гл. VI) и др. В разделе «Ответы и решения» приведены ответы на большинство задач; многие задачи снабжены решениями.

В начале каждого параграфа дается краткое теоретическое введение и приводятся необходимые формулы. Излагаемые сведения не претендуют на полноту; более полное освещение соответствующих вопросов читатель найдет в литературе, указанной в конце каждой главы.

В книге всюду используется гауссова абсолютная система единиц, так как она наиболее часто употребляется в физической литературе. Обозначения применяются общепринятые. К сожалению, не всегда удавалось избежать применения для разных величин одинаковых символов, и наоборот. Однако это не может привести к недоразумениям, так как в теоретических введениях указываются обозначения, используемые в соответствующих главах или параграфах.

В математических приложениях к сборнику приведены основные данные о дельта-функции, цилиндрических и сферических функциях, необходимые для решения задач.

При подготовке книги использовался опыт преподавания электродинамики на физико-механическом и радиотехническом факультетах Ленинградского Политехнического института. Значительная часть приведенных задач решалась студентами третьего и четвертого курсов на практических занятиях, при выполнении контрольных работ, в качестве заданий повышенной трудности, на зачетах и экзаменах.

При составлении сборника были использованы курсы Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, И. Е. Тамма, Я. И. Френкеля, Абрагама и Беккера, В. Смайта, Дж. А. Стрэттона и др., а также многие монографии, обзорные и оригинальные статьи. Ряд полезных задач, содержащихся в этих руководствах, включен в сборник.

1961 г.

В. Батыгин, И. Топтыгин

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Векторная и тензорная алгебра. Преобразования векторов и тензоров

Скаляром (инвариантом) в трехмерном пространстве называется величина, которая не изменяет своего значения при поворотах координатной системы.

Вектором в трехмерном пространстве называется совокупность трех величин, преобразующихся при поворотах системы координат по формулам

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} A_k. \quad (I.1)$$

Здесь A_k — проекции вектора на оси исходной, а A'_i — на оси повернутой системы координат; α_{ik} — коэффициенты преобразования, представляющие собою косинусы углов между k -й осью исходной и i -й осью повернутой системы координат.

В дальнейшем мы воспользуемся следующим правилом суммирования, принятым в тензорном анализе: будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование во всех тех случаях, когда в данном выражении встречаются два одинаковых индекса. В соответствии с этим правилом, равенства (I.1) запишутся так:

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k.$$

Тензором II ранга в трехмерном пространстве называется девятикомпонентная величина T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), преобразующаяся при поворотах координатной системы следующим образом:

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm} \quad (I.2)$$

(сумма по l, m). Аналогично тензор s -го ранга в пространстве трех измерений определяется законом преобразования:

$$T'_{i_1 k_1 l_1 \dots r_1} = \alpha_{i_1 i'_1} \alpha_{k_1 k'_1} \dots \alpha_{r_1 r'_1} T_{i'_1 k'_1 l'_1 \dots r'_1}. \quad (I.3)$$

В этом равенстве величины T имеют по s индексов.

Величины, преобразующиеся как вектор при поворотах координатной системы, могут двояко вести себя при инверсии системы координат (преобразование $x' = -x, y' = -y, z' = -z$). Те векторы, компоненты¹ которых при инверсии координат меняют знак, называются полярными векторами, или просто векторами. Векторы, компоненты которых не меняют знака при инверсии системы координат, называются псевдовекторами, или аксиальными векторами. Примером аксиального вектора может служить векторное произведение двух полярных векторов. Аналогично тензор s -го ранга называется просто тензором, если его компоненты преобразуются при инверсии как произведения s координат, т. е. умножаются на $(-1)^s$, и псевдотензором, если его компоненты умножаются на $(-1)^{s+1}$.

Таблица коэффициентов преобразования

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

называется матрицей преобразования. Определитель, элементы которого совпадают с элементами некоторой матрицы, называется определителем этой матрицы:

$$|\hat{\alpha}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{I.5})$$

Суммой двух матриц $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ называется такая матрица $\hat{\gamma}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}. \quad (\text{I.6})$$

Произведением двух матриц $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ называется такая матрица $\hat{\gamma}$, элементы которой получаются из элементов перемножаемых матриц α_{ik} и β_{ik} по правилу:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{il}\beta_{lk} \quad (\text{I.7})$$

(суммирование по l). Матрица $\hat{\gamma}$ описывает такое преобразование, которое получается при последовательном выполнении преобразования сначала с матрицей $\hat{\beta}$, а затем с матрицей $\hat{\alpha}$.

Единичной матрицей называется матрица вида

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.8})$$

¹Мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров (см., например, [107]), так как оно несущественно для вопросов, рассматриваемых в этой книге.

Она описывает тождественное преобразование ($A'_i = A_i$). Элементы единичной матрицы обозначаются символом δ_{ik} :

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Матрица вида

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

называется диагональной матрицей.

Если элементы матрицы удовлетворяют условиям

$$\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta_{kl}, \quad (\text{I.11})$$

то она называется ортогональной.

Матрица $\hat{\alpha}^{-1}$, удовлетворяющая условиям

$$\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha} = \hat{1}, \quad (\text{I.12})$$

называется обратной матрице $\hat{\alpha}$. Она описывает обратное преобразование, т. е. если $A'_i = \alpha_{ik}A_k$, то $A_k = \alpha_{ki}^{-1}A'_i$.

Матрица $\hat{\alpha}$, которая получается из $\hat{\alpha}$ заменой строк на столбцы, называется транспонированной:

$$\tilde{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (\text{I.13})$$

1. Два направления \mathbf{n} и \mathbf{n}' определяются в сферической системе координат углами ϑ, α и ϑ', α' . Найти косинус угла θ между ними.

2. Доказать тождества:

а) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C});$

б) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} =$
 $= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{A}.$

3. Во всех декартовых системах координат задана совокупность трех величин a_i ($i = 1, 2, 3$) и известно, что $a_i b_i = \text{inv}$ относительно поворотов и отражений. Доказать, что если b_i — произвольный вектор (псевдовектор), то a_i — также вектор (псевдовектор).

4. Доказать, что если $a_i = T_{ik}b_k$ в каждой системе координат и T_{ik} — тензор II ранга, а b_k — вектор, то a_i — тоже вектор.

5. Доказать, что $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ есть тензор II ранга.

6. Доказать, что если T_{ik} — тензор II ранга и P_{ik} — псевдотензор II ранга, то $T_{ik}P_{ik}$ — псевдоскаляр.

7. Показать, что симметрия тензора есть свойство, инвариантное относительно вращения, т. е. тензор, симметричный (антисимметричный) в некоторой системе отсчета, остается симметричным (антисимметричным) и во всех системах, повернутых относительно исходной.

8. Показать, что если тензор S_{ik} — симметричный, а тензор A_{ik} — антисимметричный, то $A_{ik}S_{ik} = 0$.

9. Доказать, что сумма диагональных компонент тензора II ранга является инвариантом.

10*. В некоторых случаях бывает удобно вместо декартовых компонент вектора a_x, a_y, a_z рассматривать его циклические компоненты, определяемые формулами $a_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y)$, $a_0 = a_z$. Выразить скалярное и векторное произведения двух векторов через их циклические компоненты. Выразить также циклические компоненты радиуса-вектора через шаровые функции¹ Лежандра.

11*. Найти компоненты тензора ε_{ik}^{-1} , обратного тензору ε_{ik} . Рассмотреть, в частности, случай, когда ε_{ik} является симметричным тензором, заданным в главных осях.

12. Пусть во всех координатных системах компоненты вектора \mathbf{a} линейно выражаются через компоненты вектора \mathbf{b} : $a_i = \varepsilon_{ik}b_k$. Доказать, что совокупность величин ε_{ik} является тензором II ранга. (Точнее, ε_{ik} является тензором, если \mathbf{a} и \mathbf{b} — оба полярные векторы или псевдовекторы, и псевдотензором, если один из векторов — полярный, а другой — аксиальный.)

13. Показать, что совокупность величин $A_{ikl}B_{ik}$, где A_{ikl} — тензор III ранга, а B_{ik} — тензор II ранга, является вектором.

14. Найти закон преобразования совокупности объемных интегралов $T_{ik} = \int x_i x_k dV$ при пространственных поворотах и отражениях (x_i и x_k — декартовы координаты).

¹Определение шаровых функции приведено в приложении 2.

15. Составить матрицы преобразования базисных ортов: при переходе от декартовых координат к сферическим и обратно; при переходе от декартовых координат к цилиндрическим и обратно.

16. Записать матрицу преобразования компонент вектора: при отражении трех координатных осей; при повороте декартовой системы координат вокруг оси z на угол α .

17. Найти матрицу преобразования компонент вектора при повороте координатных осей, определяемом углами Эйлера $\alpha_1, \theta, \alpha_2$ (рис. 1), путем перемножения матриц, соответствующих поворотам вокруг оси z на угол α_1 , вокруг линии узлов ON на угол θ и вокруг оси z' на угол α_2 .

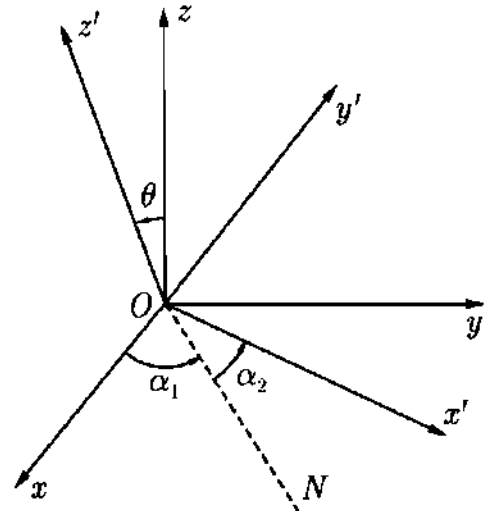


Рис. 1

18. Найти матрицу $\hat{D}(\alpha_1 \theta \alpha_2)$, с помощью которой преобразуются циклические компоненты вектора (см. задачу 10*) при повороте координатной системы, определяемом углами Эйлера $\alpha_1, \theta, \alpha_2$ (рис. 1).

19*. Показать, что матрица бесконечно малого поворота системы координат $\hat{\alpha}$ может быть записана в виде $\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{\varepsilon}$, где $\hat{\varepsilon}$ — антисимметричная матрица ($\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$). Выяснить геометрический смысл ε_{ik} .

20. Доказать, что если $\hat{\alpha}$ — ортогональная матрица преобразования, то при ее транспонировании получается матрица обратного преобразования.

21. Показать, что матрица преобразования базиса координатной системы при отражении или повороте и матрица преобразования компонент вектора совпадают.

22*. Доказать, что при поворотах или отражениях четного числа координатных осей определитель преобразования равен $+1$, а при отражениях нечетного числа координатных осей этот определитель равен -1 .¹

23. Показать, что если в некоторой системе координат соответствующие компоненты двух векторов пропорциональны, то они пропорциональны в любой другой системе координат. (Такие векторы называются параллельными.)

¹Преобразования, определитель которых равен $+1$, называются собственными; преобразования с определителем -1 — несобственными.

24*. Во всех декартовых системах координат задана совокупность величин e_{ikl} , обладающих следующими свойствами: при перестановке любых двух индексов e_{ikl} меняет знак; $e_{123} = 1$.

Показать, что эта совокупность e_{ikl} образует псевдотензор III ранга (совершенно антисимметричный единичный псевдотензор III ранга).

25. Доказать, что компоненты антисимметричного тензора II ранга при вращениях преобразуются как компоненты вектора.

26. Записать выражения для компонент векторного произведения двух векторов и вихря вектора с помощью тензора e_{ikl} . Указать, как преобразуются эти величины при вращениях и отражениях.

27. Доказать равенства:

а) $e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$;

б) $e_{ikl}e_{klm} = 2\delta_{im}$.

28. Записать в инвариантной векторной форме:

а) $e_{inl}e_{irs}e_{lmp}e_{stp}a_n a_r b_m c_t$;

б) $e_{inl}e_{krs}e_{lmp}e_{stp}a_r a'_n b_k b'_i c_t c'_m$.

29. Показать, что $T_{ik}a_i b_k - T_{ik}a_k b_i = 2\omega \cdot (a \times b)$, где T_{ik} — произвольный тензор II ранга, a и b — векторы, ω — вектор, эквивалентный антисимметричной части T_{ik} .

30. Представить произведение $[a \cdot (b \times c)][a' \cdot (b' \times c')]$ в виде суммы членов, содержащих только скалярные произведения векторов.

УКАЗАНИЕ. Применить теорему об умножении определителей или воспользоваться псевдотензором III ранга e_{ikl} (см. задачу 24*).

31*. Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нулевой вектор; что всякий тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ik} ; тензор III ранга — e_{ikl} ; тензор IV ранга — $(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{km})$.

32*. Пусть n — единичный вектор, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти средние значения его компонент и их произведений: n_i , $n_i n_k$, $n_i n_k n_l$, $n_i n_k n_l n_m$, пользуясь трансформационным свойством искомых величин, а не прямым вычислением соответствующих интегралов.

33. Найти усредненные по всем направлениям значения следующих выражений: $(a \cdot n)^2$, $(a \cdot n)(b \cdot n)$, $(a \cdot n)n$, $(a \times n)^2$, $(a \times n) \cdot (b \times n)$, $(a \cdot n)(b \cdot n)(c \cdot n)(d \cdot n)$, если n — единичный вектор, все направления которого равновероятны, a , b , c и d — постоянные векторы.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

34. Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}' и псевдовектора \mathbf{l} .

35. Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}' и одного псевдовектора \mathbf{l} ? Из трех полярных векторов \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 ?

§ 2. Векторный анализ

В произвольной ортогональной системе координат q_1 , q_2 , q_3 квадрат элемента длины выражается формулой

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad (\text{I.14})$$

а элемент объема — формулой

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (\text{I.15})$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (\text{I.16})$$

— функции координат (коэффициенты Ламэ). Различные дифференциальные операции записываются так:

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \varphi)_i &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}; \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]; \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}; \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.17})$$

В формуле для $\text{rot } \mathbf{A}$ дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial q_i}$, действуют на элементы нижней строки определителя.

В сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= r \sin \vartheta \cos \alpha, & y &= r \sin \vartheta \sin \alpha, & z &= r \cos \vartheta; \\
 h_r &= 1, & h_\vartheta &= r, & h_\alpha &= r \sin \vartheta; \\
 \text{grad } \varphi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\
 \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right]; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.18})$$

В цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= r \cos \alpha, & y &= r \sin \alpha, & z &= z; \\
 h_r &= 1, & h_\alpha &= r, & h_z &= 1; \\
 \text{grad } \varphi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
 \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; & (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.19})$$

При любых \mathbf{A} и φ имеют место тождества:

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0, \quad \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0, \quad \text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi. \quad (\text{I.20})$$

Следующие основные интегральные теоремы позволяют преобразовывать объемные, поверхностные и контурные интегралы друг в друга.

Теорема Остроградского – Гаусса.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{I.21})$$

где V – некоторый объем, S – замкнутая поверхность, ограничивающая этот объем.

Теорема Стокса.

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{I.22})$$

где l – замкнутый контур, S – произвольная поверхность, опирающаяся на этот контур.

В формулах (I.21) и (I.22) вектор \mathbf{A} должен быть дифференцируемой функцией координат.

36. Записать циклические компоненты¹ градиента в сферических координатах.

37. Воспользовавшись декартовыми, сферическими и цилиндрическими координатами, вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, где \mathbf{r} – радиус-вектор, \mathbf{l} – постоянный вектор.

38. Выполняя все вычисления в сферических (или цилиндрических) координатах, найти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ – постоянный вектор, направленный по оси z .

39. Доказать тождества:

а) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi$;

г) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$;

д) $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$.

УКАЗАНИЕ. Доказательство этих тождеств следует производить с помощью оператора ∇ , пользуясь правилами дифференцирования и перемножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат.

¹См. задачу 10*.

40. Доказать тождества:

а) $\mathbf{C} \cdot \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A}$;

б) $(\mathbf{C} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A}$;

в) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A}$;

г) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot } \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{C}$;

д) $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B}$;

е) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$.

41. Вычислить $\text{grad } \varphi(r)$; $\text{div } \varphi(r)\mathbf{r}$; $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{r}$; $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{r}$.

42. Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\text{div } \varphi(r)\mathbf{r} = 0$.

43. Найти дивергенции и вихри следующих векторов: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, $\varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы.

44. Вычислить $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{r}$, $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$, $\text{div } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r)$.

45. Вычислить $\text{grad } \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ и $\text{rot } \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3}$ (\mathbf{p} — постоянный вектор), воспользовавшись выражениями градиента и вихря в сферических координатах. Найти векторные линии для этих векторов (дать рисунок).

46. Доказать, что

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{при} \quad \mathbf{A}^2 = \text{const.}$$

47. Записать проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси сферической системы координат.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться тождеством $\Delta \mathbf{A} = -\text{rot rot } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A}$.

48. Записать проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси цилиндрической системы координат.

49. Интеграл по объему $\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV$ преобразовать в интеграл по поверхности.

50. Вычислить интегралы $\oint \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS$, $\oint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} dS$, где \mathbf{a} — постоянный вектор, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

51. Интегралы по замкнутой поверхности $\oint \mathbf{n}\varphi dS$, $\oint (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dS$, $\oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} dS$ (\mathbf{b} — постоянный вектор, \mathbf{n} — орт нормали) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности.

УКАЗАНИЕ. Решение выполнить по образцу предыдущей задачи.

52. Воспользовавшись одним из тождеств, доказанных в предыдущей задаче, вывести закон Архимеда путем суммирования сил давления, приложенных к элементам поверхности погруженного в жидкость тела.

53*. Пусть $f(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ удовлетворяет условию

$$f(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{r}) = c_1 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{r}) + c_2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{r}),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, и является дифференцируемой функцией \mathbf{r} . Доказать, что если V — произвольный объем, S — ограничивающая его поверхность и \mathbf{n} — орт внешней нормали к этой поверхности, то имеет место обобщенная теорема Остроградского — Гаусса:

$$\oint f(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dS = \int f(\nabla, \mathbf{r}) dV.$$

Оператор ∇ в подынтегральной функции $f(\nabla, \mathbf{r})$ действует на \mathbf{r} и стоит левее всех переменных.

УКАЗАНИЕ. Разложить \mathbf{n} по ортам декартовой системы координат и воспользоваться теоремой Остроградского — Гаусса:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = \oint \varphi n_x dS.$$

54. Решить задачи 50 и 51 с помощью обобщенной теоремы Остроградского — Гаусса, доказанной в предыдущей задаче.

55. Интеграл по замкнутому контуру $\oint \varphi d\mathbf{l}$ преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

56. Интеграл $\oint u df$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур (u, f — скалярные функции координат).

57. Доказать тождество:

$$\int (\mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A}) dA = \oint [(\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S}.$$

58. Внутри объема V вектор \mathbf{A} удовлетворяет условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$, а на границе объема (поверхность S) — условию $A_n = 0$. Доказать, что $\int_V \mathbf{A} dV = 0$.

59*. Доказать, что $\operatorname{div}_{\mathbf{R}} \int \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}) dV}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = 0$, где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор, определенный в предыдущей задаче.

60. Для трехмерного тензора II ранга доказать теорему Остроградского–Гаусса:

$$\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint T_{ik} dS_i.$$

УКАЗАНИЕ. Исходить из теоремы Остроградского–Гаусса для вектора $A_i = T_{ik} a_k$, где \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор.

61. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от r ; б) от ϑ ; в) от α (сферические координаты).

62. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от r ; б) от α ; в) от z (цилиндрические координаты).

63. Показать, что если скалярная функция ψ является решением уравнения $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ и \mathbf{a} — некоторый постоянный вектор, то векторные функции $\mathbf{L} = \operatorname{grad} \psi$, $\mathbf{M} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}\psi)$, $\mathbf{N} = \operatorname{rot} \mathbf{M}$ удовлетворяют уравнению $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$.

64*. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c$) изображает эллипсоид с полуосями a, b, c . Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq -c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2$$

изображают соответственно эллипсоид, однополостной и двухполостной гиперболоиды, софокусные с первым эллипсоидом. Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности, характеризуемой значениями ξ, η, ζ . Числа ξ, η, ζ называются эллипсоидальными координатами точки x, y, z . Найти формулы преобразования от ξ, η, ζ к x, y, z . Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в эллипсоидальных координатах.

65*. При $a = b > c$ эллипсоидальная система координат (см. предыдущую задачу) вырождается в так называемую сплюснутую сфероидальную систему координат. Координата ζ при этом переходит в постоянную, равную $-a^2$, и должна быть заменена другой координатой. В качестве последней выбирают азимутальный угол α в плоскости xy .

Координаты ξ, η определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} &= 1, \\ \frac{r^2}{a^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} &= 1, \\ r^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

где $\xi \geq -c^2, -c^2 \geq \eta \geq -a^2$.

Поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения вокруг оси z , поверхности $\eta = \text{const}$ — софокусные с ними однополостные гиперboloиды вращения (рис. 2).

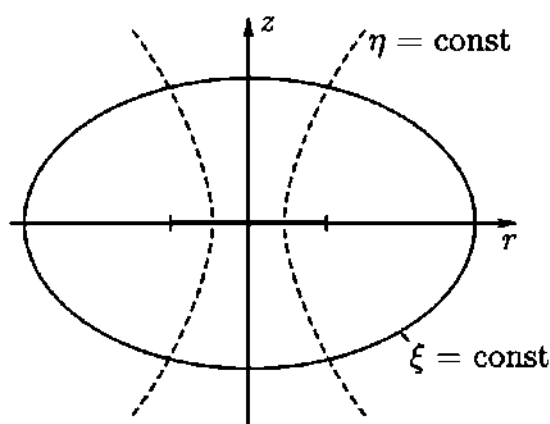


Рис. 2

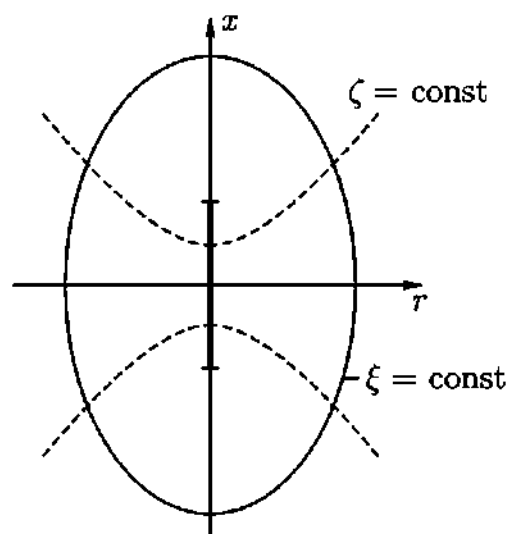


Рис. 3

Найти выражения r, z в сплюснутых сфероидальных координатах, коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в этих координатах.

66*. Вытянутая сфероидальная система координат получается из эллипсоидальной (см. задачу 64*) при $a > b = c$. Координата η при этом вырождается в постоянную и должна быть заменена азимутальным углом α , отсчитываемым в плоскости yz от оси y .

Координаты ξ , ζ определяются из уравнений

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{r^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{r^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad r^2 = y^2 + z^2,$$

где $\xi \geq -b^2$, $-b^2 \geq \zeta \geq -a^2$.

Поверхности постоянных ξ и ζ представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперboloиды вращения (рис. 3). Выразить величины x , r через ξ , ζ ; найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в переменных ξ , ζ , α .

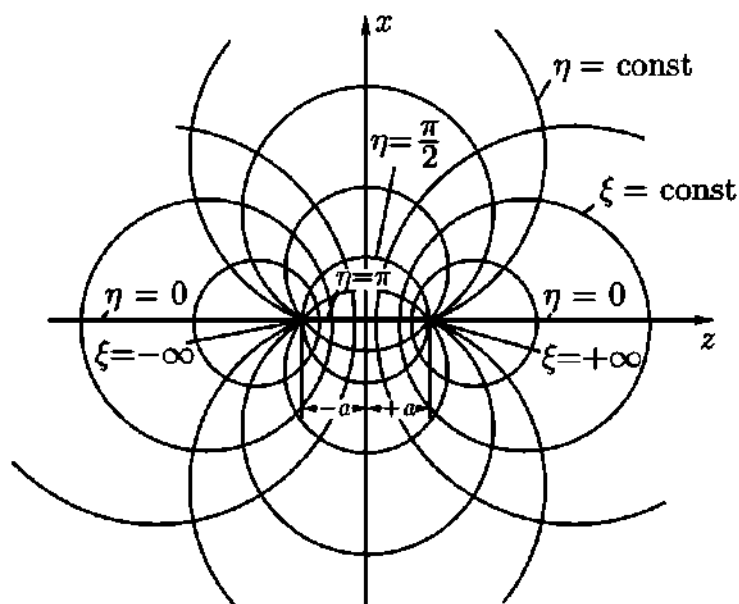


Рис. 4

67. Бисферические координаты ξ , η , α а связаны с декартовыми соотношениями:

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$y = \frac{a \sin \eta \sin \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где a — постоянный параметр, $-\infty < \xi < \infty$, $0 < \eta < \pi$, $0 < \alpha < 2\pi$.

Показать, что координатные поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сферы $x^2 + y^2 + (z - a \text{cth } \xi)^2 = \left(\frac{a}{\text{sh } \xi}\right)^2$, поверхности $\eta = \text{const}$ — веретенообразные поверхности вращения вокруг оси z , уравнение которых

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \text{ctg } \eta)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sin \eta}\right)^2$$

поверхности $\alpha = \text{const}$ — полуплоскости, расходящиеся от оси z (рис. 4). Убедиться в том, что эти координатные поверхности ортогональны между собой. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа.

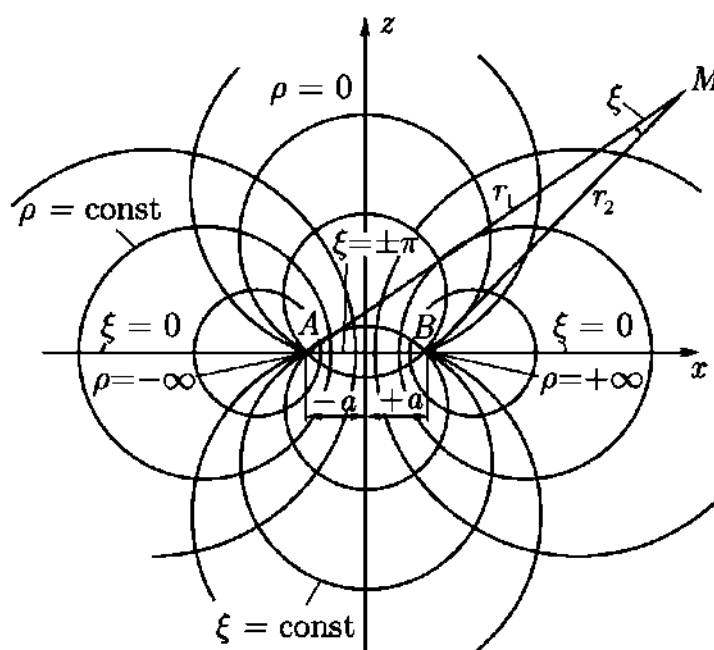


Рис. 5

68. Тороидальные координаты ρ, ξ, α образуют ортогональную систему и связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \text{sh } \rho \cos \alpha}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

$$y = \frac{a \text{sh } \rho \sin \alpha}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

$$z = \frac{a \sin \xi}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

где a — постоянный параметр, $-\infty < \rho < \infty$, $-\pi < \xi \leq \pi$, α — азимутальный угол, изменяющийся в пределах от 0 до π .

Показать, что $\rho = \ln \frac{r_1}{r_2}$ (см. рис. 5, на котором изображены плоскости $\alpha = \text{const}$, $\alpha + \pi = \text{const}$), а величины ξ представляют собой угол между r_1 и r_2 ($\xi > 0$ при $z > 0$ и $\xi < 0$ при $z < 0$). Какой вид имеют координатные поверхности ρ и ξ ? Найти коэффициенты Ламэ.

ЛИТЕРАТУРА

Смирнов В. И. [94, 95], Кочин Н. Е. [62], Тамм И. Е. [101], Стрэттон Дж. А. [100], Гельфанд И. М. [30], Гельфанд И. М., Минлос. Р. А., Шапиро З. Я. [31], Морс Ф. М., Фешбах Г. [81], Лебедев В. П., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. [69].

ГЛАВА II

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В этой главе содержатся задачи на определение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ по заданному распределению зарядов, характеризуемому объемной $\rho(\mathbf{r})$, поверхностной $\sigma(\mathbf{r})$ или линейной $\kappa(\mathbf{r})$ плотностью. Распределение точечных зарядов может быть описано объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, где q_i — величина i -го заряда, \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -го заряда, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ — δ -функция (см. приложение 1). Напряженность электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Бывает полезна интегральная форма первого из этих уравнений (электростатическая теорема Гаусса):

$$\oint_S E_n dS = 4\pi q, \quad (\text{II.2})$$

где S — некоторая замкнутая поверхность, q — полный заряд внутри этой поверхности. Потенциал и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad \varphi(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (\text{II.3})$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (\text{II.4})$$

Потенциал непрерывен и конечен во всех точках пространства, где нет точечных зарядов, в частности, на заряженной поверхности, разделяющей

области 1 и 2, $\varphi_1 = \varphi_2$ (рис. 6). Нормальные производные φ терпят разрыв на заряженной поверхности:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (\text{II.5})$$

Нормаль \mathbf{n} направлена из области 1 в область 2.

На поверхности двойного электрического слоя с мощностью τ (см., например, [101])

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau \quad (\text{II.6})$$

(нормаль \mathbf{n} имеет направление от отрицательной стороны слоя к положительной).

Если распределения зарядов ρ_1 и ρ_2 соответствуют потенциалы φ_1 и φ_2 , то потенциалом распределения $\rho = \rho_1 + \rho_2$ является $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (принцип суперпозиции). То же справедливо для электрического поля \mathbf{E} . В частности, принцип суперпозиции позволяет из потенциалов элементарных зарядов q/r получать путем суммирования потенциалы сложных систем зарядов:

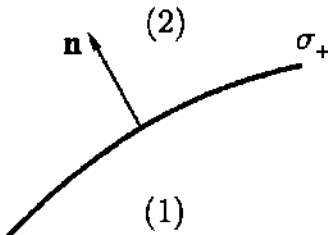


Рис. 6

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{II.7})$$

В случае поверхностного или линейного распределения зарядов объемный интеграл в (II.7) заменяется соответствующим поверхностным или линейным интегралом, а в случае системы точечных зарядов — суммой по зарядам. Это замечание относится также ко всем нижеследующим формулам, в которых содержатся объемные интегралы по распределению зарядов.

В большинстве случаев прямое вычисление интеграла (II.7) затруднительно. В связи с этим часто применяется представление потенциала в виде ряда, который получается в результате разложения подынтегрального выражения по степеням x/r или x'/r и почленного интегрирования. Такое разложение можно получить как в декартовых, так и в сферических координатах.

Декартовы координаты (рис. 7). При $r > a$ (a — наибольшее расстояние зарядов системы от полюса O):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = \frac{q}{r} - p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{1}{r} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{1}{r} - \\ - \frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \cdot \frac{1}{r} \dots \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

Мультипольные моменты $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta} \dots$ выражаются объемными интегралами:

$$\left. \begin{aligned} q &= \int \rho(\mathbf{r}') dV' && \text{— полный заряд системы,} \\ p_\alpha &= \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha dV' && \text{— компоненты дипольного момента,} \\ Q_{\alpha\beta} &= \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha x'_\beta dV' && \text{— компоненты квадрупольного момента.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8}')$$

Величины $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta} \dots$ при повороте системы координат преобразуются соответственно как скаляр, вектор, тензор II ранга и т. д. Второй и третий члены потенциала (II.8) могут быть записаны в форме

$$\varphi^{(p)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{II.9})$$

где $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ — вектор дипольного момента системы;

$$\begin{aligned} \varphi^{(Q)} &= \frac{1}{2r^5} [(3x^2 - r^2)Q_{xx} + \\ &+ (3y^2 - r^2)Q_{yy} + (3z^2 - r^2)Q_{zz} + \\ &+ 6xyQ_{xy} + 6xzQ_{xz} + 6yzQ_{yz}]. \quad (\text{II.9}') \end{aligned}$$

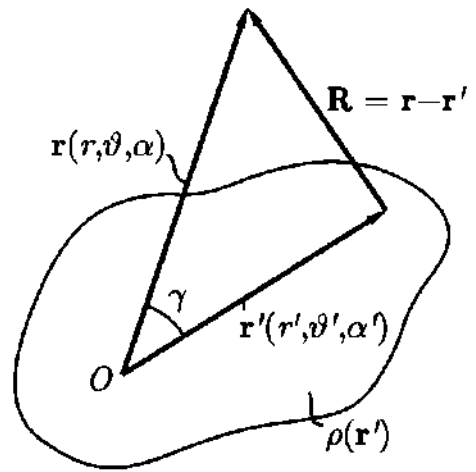


Рис. 7

Сферические координаты. Используем разложение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, приведенное в приложении 2 (II.2.15). Подставляя это разложение в (II.7), получим при $r > r'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \cdot \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}} \quad (r > r'), \quad (\text{II.10})$$

где Q_{lm} — мультипольный момент порядка l, m ;

$$Q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'. \quad (\text{II.11})$$

Если $r' > r$, то в (II.11, 15) r и r' меняются местами и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Q'_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad (r < r'), \quad (\text{II.12})$$

где

$$Q'_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'. \quad (\text{II.13})$$

Если точка наблюдения \mathbf{r} находится внутри распределения зарядов (см. рис. 7), то нужно разбить область интегрирования в (II.7) на две части сферой радиуса r с центром в полюсе O . При интегрировании по области внутри сферы нужно пользоваться разложением (II.15), при интегрировании по внешней области — формулой (II.15) с заменой $r \rightleftharpoons r'$.

Реальные системы зарядов всегда ограничены, и их потенциал убывает на больших расстояниях не медленнее, чем $1/r$. Но при рассмотрении поля вблизи средней части длинного цилиндра или ограниченного плоского тела целесообразно идеализировать задачу, считая тело бесконечным. При этом потенциал не убывает на бесконечности, но он правильно описывает поле на расстояниях, малых по сравнению с размером тела.

Наглядное представление о структуре поля дают силовые линии и эквипотенциальные поверхности. Силовые линии определяются из системы дифференциальных уравнений, которая в произвольных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 имеет вид

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}, \quad (\text{II.14})$$

где h_i — коэффициенты Ламэ; эквипотенциальные поверхности описываются уравнением $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$.

Точками равновесия поля называются такие точки, находящиеся на конечном расстоянии от системы зарядов, в которых $E = 0$.

Энергия электростатического поля может быть вычислена по одной из формул:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV \quad (\text{II.15})$$

(эти формулы эквивалентны, если заряды сосредоточены в конечной области пространства, а интегрирование распространяется на все пространство).

Энергия взаимодействия двух систем зарядов 1 и 2 определяется выражениями:

$$U = \int \rho_1(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) dV = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (\text{II.16})$$

Обобщенные ponderomotorные силы могут быть получены дифференцированием U или W по соответствующим обобщенным координатам a_i :

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i} \quad \text{или} \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial a_i}. \quad (\text{II.17})$$

Обобщенная сила положительна, если она стремится увеличить соответствующую координату.

69. Бесконечная плоская плита толщиной a равномерно заряжена по объему с плотностью ρ . Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля.

70. Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти потенциал φ электрического поля.

71. Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью, меняющейся по периодическому закону $\sigma = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y$, где σ_0 , α , β — постоянные. Найти потенциал φ этой системы зарядов.

72. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R равномерно заряжен по объему или по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд κ . Найти потенциал φ и напряженность электрического поля E .

73. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити.

74. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной $2a$, занимающего часть оси z от $-a$ до $+a$; заряд отрезка q .

75. Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка, рассмотренного в предыдущей задаче.

76. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара R , заряд q .

77. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля сферы радиуса R , равномерно заряженной по поверхности. Заряд сферы q .

78. Внутри шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с плотностью ρ , имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1 , а центр отстоит от центра шара на расстоянии a ($a + R_1 < R$). Найти электрическое поле E в полости.

79. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряжено с объемной плотностью $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$. Найти полный заряд q , потенциал φ и напряженность E электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \rightarrow R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.

80. Найти энергию электростатического поля W для распределений заряда, указанных в задачах 76, 77, 79. Провести вычисления двумя способами (см. (II.15)).

81. Заряд распределен сферически симметричным образом: $\rho = \rho(r)$. Разбив распределение заряда на сферические слои, выразить через $\rho(r)$ потенциал φ и напряженность \mathbf{E} поля (записать φ и \mathbf{E} в виде однократного интеграла по r).

82. Используя результаты задачи 81, решить задачи 76 и 79.

83. Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, $a = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус атома, $e_0 = 4,80 \cdot 10^{-10}$ CGSE — элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность E_{er} электрического поля электронного заряда, а также полный потенциал φ и напряженность поля \mathbf{E} в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить приблизительный ход величин φ и E .

УКАЗАНИЕ. Полезно воспользоваться методом решения задачи 81.

84. Рассматривая атомное ядро как равномерно заряженный шар, найти максимальное значение напряженности его электрического поля E_{\max} .

Радиус ядра $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ см, заряд Ze_0 (A — атомный вес, Z — порядковый номер, e_0 — элементарный заряд).

85. Используя результат задачи 81, решить задачу 77.

86. Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса R находятся на расстоянии a друг от друга. Работа, которую надо совершить, чтобы перенести точечный заряд q из бесконечности в центр каждого из колец, равна соответственно A_1 и A_2 . Найти заряды на кольцах q_1 и q_2 .

87. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля на оси равномерно заряженного круглого тонкого диска радиуса R ; заряд диска q . Убедиться в том, что на поверхности диска нормальная составляющая \mathbf{E} испытывает скачок $4\pi\sigma$. Рассмотреть поле на больших расстояниях от диска.

88. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля на оси кольца и вблизи нее. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца?

89. Выразить потенциал φ равномерно заряженного круглого тонкого кольца с зарядом q и радиусом R через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}.$$

УКАЗАНИЕ. При выполнении интегрирования по азимуту сделать замену $\alpha' = \pi - 2\beta$.

90. Получить из общей формулы, описывающей потенциал тонкого круглого кольца (см. задачу 89), потенциал φ электрического поля: а) на оси кольца; б) на больших расстояниях от кольца; в) вблизи нити кольца.

УКАЗАНИЕ. Для случая в) воспользоваться формулами 8.113 в справочнике [90].

91. Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$. Найти потенциал φ электрического поля, используя разложение по мультиполям в сферических координатах.

92. Источники электрического поля расположены аксиально симметричным образом. Вблизи оси симметрии системы источники поля отсутствуют. Выразить потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля вблизи оси симметрии через значения потенциала φ и его производных на этой оси.

93. Найти потенциал φ электрического поля равномерно заряженного круглого тонкого кольца, используя разложение по мультиполям в сферических координатах. Заряд кольца q , радиуса R .

94. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) заряды $q, -2q, q$ расположены по оси z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь); б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разные знаки, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям x и y (плоский квадруполь).

95. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) линейный октуполь (рис. 8а), б) пространственный октуполь (рис. 8б).

96. Точечный заряд q находится в точке со сферическими координатами $(r_0, \vartheta_0, \alpha_0)$. Разложить по мультиполям потенциал φ этого заряда.

97. Эллипсоид с полуосями a, b, c равномерно заряжен по объему; полный заряд эллипсоида q . Найти потенциал φ на больших расстояниях от эллипсоида с точностью до квадрупольного члена. Рассмотреть частные случаи эллипсоида вращения с полуосями¹ $a = b$ и c и шара ($a = b = c$).

УКАЗАНИЕ. При интегрировании по объему эллипсоида воспользоваться обобщенными сферическими координатами $x = ar \sin \vartheta \cos \alpha$, $y = br \sin \vartheta \sin \alpha$, $z = cr \cos \vartheta$.

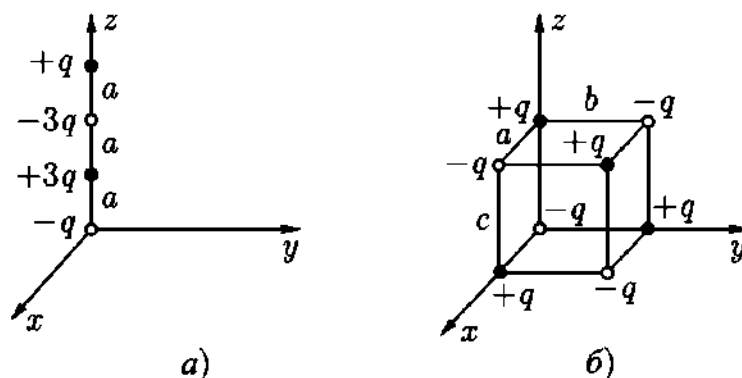


Рис. 8

98. Два коаксиальных равномерно заряженных тонких круглых кольца с радиусами a и b ($a > b$) и зарядами q и $-q$ соответственно, расположены в одной плоскости. Найти потенциал φ на большом расстоянии от этой системы зарядов. Сравнить его с потенциалом линейного квадруполь (см. задачу 94).

99*. Показать, что распределение заряда $\rho = -(\mathbf{p}' \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r})$ описывает элементарный диполь с моментом \mathbf{p}' , помещенный в начало координат. Пояснить результат, воспользовавшись наглядным представлением δ -функции (приложение 1).

УКАЗАНИЕ. Исходить из разложения по мультиполям в декартовых координатах.

100. Доказать, что распределение зарядов

$$\rho = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})$$

¹Атомные ядра, обладающие квадрупольным моментом, можно в некотором приближении рассматривать как эллипсоиды вращения

создает потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

101. Используя результаты задачи 94 и учитывая, что квадрупольный момент является тензором II ранга, найти поле φ на большом расстоянии от линейного квадруполя, направление оси которого определяется полярными углами γ, β . Каким еще способом можно решить задачу?

102. Пространственный октуполь (рис. 86) повернут вокруг оси z на угол β . Найти поле φ на больших от него расстояниях путем преобразования компонент октупольного момента. Сравнить с другими методами решения.

103. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от плоского квадруполя, расположенного в плоскости, проходящей через ось z (рис. 9). Компоненты квадрупольного момента получить непосредственно, а также путем поворота плоского квадруполя, рассмотренного в задаче 946).

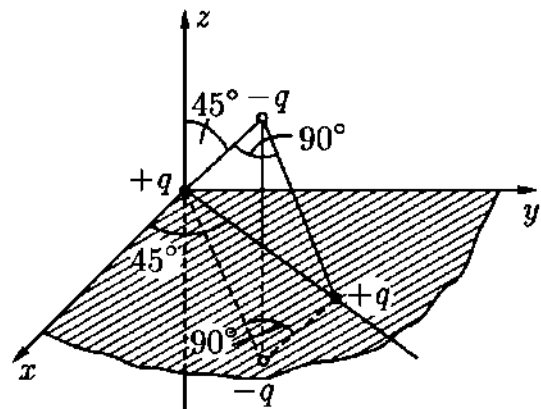


Рис. 9

104. Шар радиуса R равномерно поляризован, дипольный момент единицы объема \mathbf{P} . Найти электрическое поле φ .

105. Двумерное распределение заряда характеризуется плотностью $\rho(\mathbf{r})$, не зависящей от координаты z . Если $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ в ограниченной области S плоскости xy , то можно разложить потенциал φ вне распределения зарядов по мультиполям (двумерные мультиполи). Найти это разложение.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат задачи 73 и принцип суперпозиции, а также разложение $\ln(1 + u^2 - 2u \cos \varphi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} u^k, |u| < 1$ (см. [90], 1.514).

106. Разложить по двумерным мультиполям потенциал φ электрического поля линейного заряда κ . Заряженная линия параллельна оси z и проходит через точку (r_0, α_0) плоскости xy .

107. Найти потенциал φ электрического поля на большом расстоянии от двух близких параллельных линейных зарядов κ и $-\kappa$, расположенных на расстоянии a друг от друга (двумерный диполь).

108. На диске радиуса R имеется двойной электрический слой мощностью $\tau = \text{const}$. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля на оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска.

109. Найти напряженность E электрического поля двойного электрического слоя мощностью $\tau = \text{const}$, занимающего полуплоскость $y = 0$, $x > 0$. Сравнить с магнитным полем бесконечного прямолинейного тока, текущего вдоль оси z . Решить задачу двумя способами: а) прямым суммированием напряженностей, создаваемых малыми элементами двойного слоя; б) определив сначала электростатический потенциал φ .

110. Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов: заряда $+q$, находящегося в точке $z = a$, и заряда $\pm q$, находящегося в точке $z = -a$; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?

УКАЗАНИЕ. Вследствие симметрии силовые линии располагаются в плоскостях $\alpha = \text{const}$, а E_z и E_r не зависят от α (цилиндрические координаты). Переменные в дифференциальном уравнении силовых линий (II.14) разделяются после замены:

$$u = \frac{z + a}{r}, \quad v = \frac{z - a}{r}.$$

111. Используя результаты предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий точечного диполя в начале координат.

112. Найти уравнение силовых линий линейного квадруполь (см. задачу 94а) и нарисовать примерную картину силовых линий.

113. Доказать, что поток напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S равен $q\Omega$. Здесь Ω — телесный угол, под которым виден контур поверхности S из точки, где находится заряд q ($\Omega > 0$, если из этой точки видна отрицательная сторона поверхности).

114. Заряд q_1 находится на оси симметрии круглого диска радиуса a на расстоянии a от плоскости диска. Какой величины q_2 заряд нужно поместить в симметричную относительно диска точку, чтобы поток электрического поля через диск в сторону заряда q_1 был равен Φ ?

115*. Найти уравнение силовых линий системы n коллинеарных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n расположенных в точках z_1, z_2, \dots, z_n оси z , не интегрируя дифференциальных уравнений силовых линий. Применить теорему, доказанную в задаче 113 к силовой трубке, образованной вращением силовой линии вокруг оси симметрии.

116. Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий системы двух точечных зарядов (ср. с задачей 110) и линейного квадруполь (ср. с задачей 112).

117. Равномерно заряженные нити, несущие заряды κ_1 и $-\kappa_2$ на единицу длины, параллельны между собой и отстоят друг от друга на расстояние h . Найти, при каком соотношении между κ_1 и κ_2 в числе поверхностей равного потенциала этой системы будут круговые цилиндры конечного радиуса. Определить радиусы и положение осей цилиндров.

118. Точечные заряды q_1 и $-q_2$ находятся на расстоянии h друг от друга. Показать, что в числе поверхностей равного потенциала этой системы имеется сфера конечного радиуса. Определить координаты ее центра и радиус. Найти значение потенциала φ на поверхности этой сферы, если $\varphi(\infty) = 0$.

119. Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид: $\varphi(r) = qe^{-\alpha r}/r$, где α, q — постоянные.

120. Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный им потенциал имел в сферических координатах вид $\varphi(r) = \frac{e_0}{a} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right)$, где e_0, a — постоянные.

121. Найти энергию взаимодействия U электронного облака с ядром в атоме водорода. Заряд электрона распределен в атоме с объемной плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, где e_0 — элементарный заряд (ср. с задачей 83), a — постоянная (боровский радиус атома).

122. В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью $\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3} e^{-4r/a}$, где a — боровский радиус атома, e_0 — элементарный заряд. Найти энергию взаимодействия U электронов в атоме гелия в этом приближении (нулевое приближение теории возмущений).

123. Центры двух шаров с зарядами q_1 и q_2 находятся на расстоянии a друг от друга ($a > R_1 + R_2$, где R_1, R_2 — радиусы шаров). Заряды распределены сферически симметричным образом. Найти энергию взаимодействия U шаров и действующую между ними силу F .

124. Мыльный пузырь, висящий на открытой трубке, стягивается под действием поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения α). Считая, что диэлектрическая прочность воздуха (напряженность поля, при которой происходит пробой) равна E_0 , выяснить, можно ли сильно заряжая пузырь предотвратить его сжатие. Каков минимальный равновесный радиус R пузыря?

125*. Два параллельных коаксиальных тонких кольца с радиусами a и b несут на себе равномерно распределенные заряды q_1 и q_2 . Расстояние между плоскостями колец c . Найти энергию взаимодействия U колец и действующую между ними силу F .

126. Найти силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к электрическому диполю с моментом \mathbf{p} в поле точечного заряда q .

127. Диполь с моментом \mathbf{p}_1 находится в начале координат, а другой диполь с моментом \mathbf{p}_2 — в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} . Найти энергию взаимодействия U этих диполей и действующую между ними силу \mathbf{F} . При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

128. Система зарядов характеризуется объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$ и занимает ограниченную область в окрестности некоторой точки O . Система помещена во внешнее электрическое поле, которое в окрестности этой точки может быть представлено в виде

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Найти энергию взаимодействия системы U с внешним полем φ_1 , выразив ее через a_{lm} и мультипольные моменты Q_{lm} системы (ср. с задачей 166*).

ЛИТЕРАТУРА

Тамм И. Е. [101], Абрагам-Беккер [1], Джексон Дж. [52], Френкель Я. И. [111], Стрэттон Дж. А. [100], Смайт В. [93], Гуревич Л. Э. [49], Пановский В., Филипс М. [86].

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 1. Основные понятия и методы электростатики

Электростатическое поле в диэлектрике характеризуется вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектором электрической индукции \mathbf{D} , которые удовлетворяют уравнениям:

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \oint_l E_t dl = 0, \\ \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \oint_S D_n dS = 4\pi q, \end{array} \right\} \quad (\text{III.1})$$

где ρ — плотность свободных зарядов в диэлектрике, q — полный свободный заряд, заключенный внутри поверхности S . Плотность связанных зарядов в диэлектрике можно выразить через вектор поляризации \mathbf{P} (электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, создаваемый связанными зарядами):

$$\rho_{\text{св}} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (\text{III.2})$$

Вектор поляризации \mathbf{P} выражается через \mathbf{E} и \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (\text{III.3})$$

Для изотропных диэлектриков в достаточно слабых полях

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (\text{III.4})$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды. В анизотропных диэлектриках ε — тензор II ранга, т. е.

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k, \quad (\text{III.5})$$

(суммирование по k). Для описания поля удобно пользоваться скалярной величиной — потенциалом φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{III.6})$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$.

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\text{div}(\varepsilon \text{grad } \varphi) = -4\pi\rho, \quad (\text{III.7})$$

которое в тех областях, где диэлектрик однороден, сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (\text{III.8})$$

На поверхностях раздела сред с разными диэлектрическими проницаемостями должны выполняться граничные условия¹

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (\text{III.9})$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (\text{III.10})$$

Орт нормали \mathbf{n} проведен из первой среды во вторую; τ — орт, касательный к поверхности, σ — поверхностная плотность свободных зарядов. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ на границах раздела определяется формулой

$$\sigma_{\text{св}} = P_{1n} - P_{2n}. \quad (\text{III.11})$$

Основная задача электростатики — нахождение потенциала φ электрического поля. Она может быть решена разными методами. Основным методом является решение дифференциальных уравнений (III.7) или (III.8) с граничными условиями (III.9) или (III.10). Иногда удается подобрать такую систему фиктивных точечных зарядов, поле которой в рассматриваемой области удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям (метод изображений). В ряде случаев удается найти систему изображений простым подбором (см., например, далее, задачи 142, 146, 153*, 155).

¹Граничные условия в форме (III.9) имеют место как в изотропных, так и в анизотропных средах.

Внутри проводников, находящихся в постоянном электрическом поле, $E = 0$. Поэтому граничные условия на поверхности проводника имеют вид:

$$E_{\tau} = 0, \quad \varphi = \text{const.} \quad (\text{III.12})$$

Если некоторая область пространства занята диэлектриком с проницаемостью ϵ , и известно электростатическое поле во всем пространстве, то при $\epsilon \rightarrow \infty$ это поле принимает такой же вид, какой оно имело бы, если бы данная область была занята проводником.

Задача об определении электрического поля, создаваемого заданной ограниченной системой заряженных проводников, находящихся в диэлектрике, имеет единственное решение, если известен либо полный заряд каждого проводника, либо его потенциал. В первом из этих случаев, наряду с условиями (III.12) нужно использовать граничное условие

$$q = \oint_S \sigma dS = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (\text{III.13})$$

где q — заряд проводника, а интеграл берется по поверхности проводника.

Емкостью C конденсатора называется отношение заряда на одной из его обкладок (первой) к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (\text{III.14})$$

Емкостью уединенного проводника называется отношение заряда проводника к его потенциалу (при этом нужно считать, что потенциал $\varphi = 0$ на бесконечности).

Энергия электростатического поля, локализованная в объеме V , выражается интегралом по этому объему:

$$W = \int \omega dV, \quad (\text{III.15})$$

где $\omega = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}/8\pi$ — плотность энергии поля.

Энергия W электростатического поля зависит от обобщенных координат α , характеризующих взаимное расположение заряженных тел. Соответствующие обобщенныеponderomotorные силы могут быть получены как производные по координатам α от энергии W :

$$F_{\alpha} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_q = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_V. \quad (\text{III.15}')$$

При постоянных зарядах q проводников следует пользоваться первым из этих выражений, при постоянных потенциалах V — вторым.

Если в изотропной диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 имелось сначала электрическое поле \mathbf{E}_1 , в которое затем было внесено диэлектрическое тело (объем тела V , диэлектрическая проницаемость ε_2), то энергия электростатического поля меняется на величину

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV, \quad (\text{III.16})$$

где \mathbf{E}_2 — электрическое поле после внесения диэлектрического тела (источники поля \mathbf{E}_1 при этом поддерживаются неизменными). Величину U можно рассматривать как энергию взаимодействия диэлектрического тела с внешним полем \mathbf{E}_1 (см. [76], стр. 108).

Если диэлектрик изотропен и его диэлектрическая проницаемость зависит только от плотности массы τ , то электрическое поле действует на диэлектрик с силой, объемная плотность которой выражается формулой

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \tau \right). \quad (\text{III.17})$$

Объемные силы, действующие на свободные и связанные заряды в некотором объеме V , могут быть заменены эквивалентной системой поверхностных натяжений, приложенных к поверхности S этого объема:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \oint_S \mathbf{T}_n dS, \quad (\text{III.18})$$

где \mathbf{T}_n — поверхностная сила, приложенная к единичной площадке с внешней нормалью \mathbf{n} .

Поверхностные натяжения описываются тензором натяжений T_{ik} . Величина \mathbf{T}_n в (III.18) представляет собой проекцию T_{ik} на направление внешней нормали \mathbf{n} к элементу dS :

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_n)_i &= T_{ik} n_k, \\ T_{ik} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} E_i E_k - \frac{1}{8\pi} E^2 \left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Член в (III.17) и (III.19), содержащий $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau$ (стрикционный член), вообще говоря, не мал. Однако при вычислении равнодействующей сил, приложенных к диэлектрическому телу, этот член не дает вклада и может быть

отброшен (см., например, [77], § 34 и задачи 140, 141). В этом случае можно вместо тензора натяжений (III.19) использовать более простой (максвелловский) тензор

$$\mathbf{T}'_{\mathbf{n}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_n \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{n} E^2 \right). \quad (\text{III.20})$$

К единице поверхности проводника в электростатическом поле приложена сила

$$\mathbf{f}_{\text{пов}} = \mathbf{T}'_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{2}. \quad (\text{III.21})$$

В диэлектрической жидкости, находящейся в равновесии в электрическом поле, электрические натяжения уравниваются гидростатическим давлением. Обозначив через $p(\tau)$ давление в жидкости — оно определяется значением ее плотности τ — получим условие равновесия:

$$p\mathbf{n} + \mathbf{T}_{\mathbf{n}} = \text{const}. \quad (\text{III.22})$$

В частности, вблизи границы жидкости с атмосферой ($\varepsilon = 1$) давление в жидкости $p(\tau)$ больше, чем атмосферное давление, на величину

$$p(\tau) - p_{\text{атм}} = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} (\varepsilon E_n^2 + E_t^2), \quad (\text{III.23})$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля в жидкости (E_n — нормальная, E_t — касательная составляющие \mathbf{E}). Уравнением (III.23) определяется зависимость плотности жидкости вблизи ее поверхности от напряженности электрического поля. Давление внутри жидкости (газа) выражается формулой

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\tau(p) \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p}} = \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{III.24})$$

(p_0 — давление при $E = 0$).

Если жидкость несжимаема, то

$$p - p_0 = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}. \quad (\text{III.25})$$

129. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Найти потенциал φ напряженность \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} электрического поля.

130. От некоторой прямой, на которой находится точечный заряд q , расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$). Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Определить потенциал φ , напряженность \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} электрического поля.

131. Центр проводящего шара радиуса a , заряд которого q , находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Найти потенциал φ электрического поля, а также распределение заряда σ на шаре.

132. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок a и b , проницаемость диэлектрика σ . Найти емкость C конденсатора.

133. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1 = \text{const} & \text{при } a \leq r < c, \\ \epsilon_2 = \text{const} & \text{при } c \leq r \leq b, \end{cases}$$

где $a < c < b$.

Найти емкость C конденсатора, распределение связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

134. Сферический конденсатор с радиусами обкладок a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния до центра r по закону $\epsilon(r) = \epsilon_0 a^2 / r^2$. Показать, что емкость такого конденсатора равна емкости плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ_0 , у которого площадь обкладки $4\pi a^2$, расстояние между обкладками $b - a$ (краевым эффектом пренебречь).

135. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\epsilon = \epsilon_0(x + a)/a$, где a — расстояние между обкладками, ось x направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S . Пренебрегая краевым эффектом, найти емкость C такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов V .

136. а) С какой силой f_0 на единицу площади притягиваются друг к другу в вакууме обкладки плоского конденсатора, если расстояние между ними a , разность потенциалов V ; б) какое новое значение f примет эта сила, если заряженный конденсатор отделить от батареи, а потом либо наполнить

его жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ , либо вставить в него плитку из твердого диэлектрика с тем же ϵ , толщина которой чуть-чуть меньше a , так что она не касается обкладок; в) какова будет сила f притяжения обкладок, если сначала либо залить конденсатор жидким диэлектриком, либо вставить в него плитку из диэлектрика, а потом зарядить?

137. Обкладки плоского конденсатора находятся на расстоянии h_1 друг от друга и имеют форму прямоугольников со сторонами a и b . Между пластинами параллельно им помещена плитка из диэлектрика ϵ , имеющая форму параллелепипеда с толщиной h_2 и основанием $a \times b$. Плитка не полностью вставлена в конденсатор — внутри него находится часть x стороны a . Найти силу F , с которой плитка втягивается в конденсатор, в двух случаях: а) на обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов V ; б) постоянен заряд q обкладок. Краевые эффекты не учитывать.

138*. Плоский конденсатор погружен в несжимаемую жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью τ так, что его обкладки расположены вертикально. Расстояние между ними d , разность потенциалов V . Определить высоту h поднятия жидкости в конденсаторе.

УКАЗАНИЕ. Применить формулы (III.23) и (III.25).

139. Как направлено максвеллово натяжение \mathbf{T}'_n , действующее на площадку dS , нормаль \mathbf{n} к которой составляет угол ϑ с направлением поля \mathbf{E} ? Какова величина \mathbf{T}'_n ? Как направлено стрикционное натяжение \mathbf{T}''_n ?

140. Два одинаковых точечных заряда q находятся в однородном жидком диэлектрике ϵ на расстоянии a друг от друга. Вычислить помощью максвеллова или полного тензора натяжений силу \mathbf{F} , действующую на каждый из зарядов. Выяснить, из каких составляющих складывается сила электрического взаимодействия зарядов $\frac{q^2}{a^2\epsilon}$. Для сравнения вычислить силы, приложенные: а) к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды; б) к поверхности малой сферы, в центре которой находится один из зарядов.

141. Незаряженная проводящая сфера радиуса R с массой m плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью τ , погружившись в нее на четверть своего объема. До какого потенциала φ_0 нужно зарядить сферу, чтобы она погрузилась наполовину? Решить задачу: а) с использованием тензора натяжений Максвелла; б) с использованием полного тензора натяжений, включающего стрикционный член.

142. Точечный заряд q находится в точке A на расстоянии a от плоской границы раздела двух бесконечно протяженных однородных диэлектриков

с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 10). Найти потенциал φ электрического поля методом изображений.

УКАЗАНИЕ. Решение искать в виде

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} - \frac{q'}{\varepsilon_1 r_2} \quad \text{при } z \geq 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r_1} \quad \text{при } z < 0,$$

где $-q'$ и q'' — искомые эффективные заряды, расположенные соответственно в точках B и A , r_1 и r_2 указаны на рисунке.

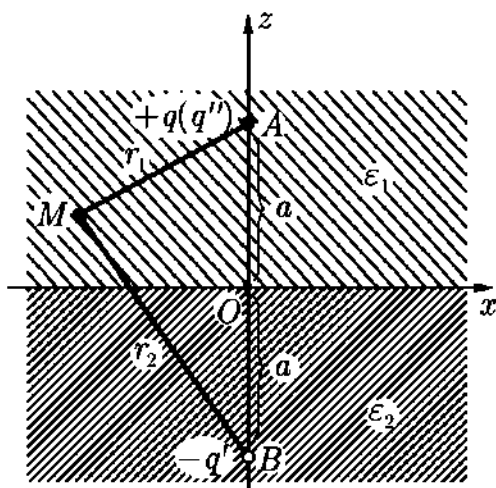


Рис. 10

143. Найти плотность $\sigma_{св}$ связанных поверхностных зарядов, наведенных на плоской границе раздела двух однородных диэлектриков ε_1 и ε_2 точечным зарядом q (см. задачу 142). Какой результат получится при $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, каков его физический смысл?

144. Найти силу F , приложенную к точечному заряду в задаче 142 (сила электрического изображения). Решить задачу несколькими способами, в частности с помощью тензора натяжений Максвелла. Если заряд способен двигаться через диэлектрики, описать качественно характер этого движения.

145*. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 заполняют все пространство, соприкасаясь вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 находятся на прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на равных расстояниях a по разные стороны от нее. Найти силы F_1 и F_2 , действующие на каждый из зарядов. Чем объясняется неравенство этих сил?

146. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти электрическое поле φ в диэлектрике, распределение σ индуцированных зарядов на металле и силу F , действующую на заряд q .

147. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α_0 . Внутри угла находится точечный заряд q . Найти методом электрических изображений электрическое поле. Рассмотреть случаи $\alpha_0 = 90^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$ и $\alpha_0 = 45^\circ$.

148. Электрический диполь с моментом \mathbf{p} находится в однородном диэлектрике вблизи плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциальную энергию взаимодействия U диполя с индуцированными зарядами, силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к диполю.

149*. Однородная сфера радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_1 , погружена в однородный неограниченный диэлектрик ε_2 . На большом расстоянии от сферы в диэлектрике имеется однородное электрическое поле, напряженность которого \mathbf{E}_0 . Найти поле φ во всем пространстве. Построить картину силовых линий для двух случаев: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$; найти распределение связанных зарядов.

150. Неограниченный диэлектрик был сначала однороден и равномерно поляризован (вектор поляризации $\mathbf{P} = \text{const}$). Затем в нем вырезали сферическую полость. Определить электрическое поле \mathbf{E} в полости в двух случаях: а) если при образовании полости поляризация в окружающем диэлектрике не изменилась¹; б) если вследствие изменения поля поляризация изменяется ($\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$).

151. Незаряженный металлический шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным \mathbf{E}_0 . Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\varepsilon_0 = \text{const}$. Определить результирующее поле φ и плотность поверхностных зарядов σ на шаре.

152*. Два одинаковых точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии a друг от друга в твердом диэлектрике с проницаемостью ε_1 . Заряды расположены в центрах малых сферических полостей радиуса R . Найти силы, действующие на заряды. Сравнить с электрическими натяжениями, приложенными к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды.

153*. Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q , отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью ε . Найти потенциал поля φ и распределение σ индуцированных зарядов на шаре, если задан а) потенциал шара V (на бесконечности $\varphi = 0$); б) заряд шара Q . Представить потенциал в виде суммы потенциалов нескольких точечных зарядов-изображений.

¹Это имеет место, если диэлектрик («электрет») состоит из полярных молекул, ориентация которых фиксирована.

УКАЗАНИЕ. Использовать решение уравнения Лапласа в виде ряда по шаровым гармоникам (приложение 2) и разложение поля точечного заряда, полученное в задаче 96.

154. В проводнике с потенциалом V имеется сферическая полость радиуса R , заполненная диэлектриком с проницаемостью ϵ . На расстоянии a от центра полости ($a < R$) находится точечный заряд q . Определить поле в полости. Найти эквивалентную систему зарядов-изображений.

155. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a . Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы, на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q . Используя метод изображений, найти поле φ , а также заряд q' , индуцированный на выступе.

156. Проводящий шар радиуса R_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 . Внутри шара имеется сферическая полость радиуса R_2 , заполненная однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . В полости на расстоянии a от ее центра ($a < R_2$) расположен точечный заряд q . Найти поле φ во всем пространстве.

157*. Диэлектрический шар радиуса R с проницаемостью ϵ_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_2 . На расстоянии $a > R$ от центра шара расположен точечный заряд q . Найти поле φ во всем пространстве и получить соответствующим предельным переходом поле проводящего шара; найти также силу, действующую на заряд q вследствие созданной им поляризации шара. Как изменится эта сила, если поместить симметрично относительно центра диэлектрического шара другой такой же точечный заряд?

158. Точечный заряд q находится внутри диэлектрического шара радиуса R с проницаемостью ϵ_1 на расстоянии a от центра шара. Диэлектрическая проницаемость среды вне шара равна ϵ_2 . Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, случай $a = 0$ (заряд в центре шара).

159*. Изолированная металлическая сфера радиуса a находится внутри полый металлической сферы радиуса b . Расстояние между центрами сфер равно c , причем $c \ll a$, $c \ll b$. Полный заряд внутренней сферы равен q . Определить распределение заряда σ на внутренней сфере и действующую на нее силу F с точностью до членов, линейных по c .

160. Сферический конденсатор образован двумя неконцентрическими сферами (см. предыдущую задачу). Вычислить поправку к емкости ΔC , вызванную отклонением от концентричности, в первом исчезающем приближении.

161. Найти энергию U и силу F взаимодействия точечного заряда q с заземленным проводящим шаром радиуса R . Заряд находится на расстоянии a от центра шара. Система помещена в однородной диэлектрической среде с проницаемостью ϵ .

162. Точечный заряд q находится в диэлектрике на расстоянии a от центра проводящей изолированной сферы радиуса R . Заряд сферы Q . Найти энергию U и силу F взаимодействия заряда со сферой.

163. Каким условиям должен удовлетворять пробный заряд q (в смысле его величины и положения в пространстве), чтобы можно было с его помощью исследовать поле системы зарядов, находящихся на проводящих и диэлектрических телах, в частности, поле заряженного шара в однородном диэлектрике?

164*. Электрический диполь p находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R . Найти систему изображений, эквивалентную индуцированным зарядам, энергию взаимодействия U диполя с шаром, силу F и вращательный момент N , приложенные к диполью. Рассмотреть предельный случай $r \rightarrow R$ ($r > R$).

165. В проводнике вырезана сферическая полость радиуса R . В центре полости находится электрический диполь с моментом p . Найти распределение σ зарядов, индуцированных на поверхности полости. Какое поле E' создается в полости этими зарядами?

166*. В однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ имеется электрическое поле, потенциал которого в окрестности некоторой точки O может быть представлен в виде

$$\varphi_1 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Пусть затем в окрестности точки O нарушена однородность и нейтральность диэлектрика (например, туда помещен проводник, вообще говоря, заряженный, или диэлектрик с проницаемостью $\epsilon_1 \neq \epsilon$). Вследствие этого, потенциал электрического поля вне области неоднородности примет теперь вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где

$$\varphi_2 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \epsilon^{-1} r^{-(l+1)} Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

— потенциал поля, вызванного свободными и связанными зарядами в области неоднородности (множитель ϵ введен для удобства). Найти потен-

циальную энергию U взаимодействия области неоднородности с внешним полем φ_1 .

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть электрические натяжения, действующие на замкнутую поверхность, охватывающую область неоднородности. Использовать результат задачи 128.

167. Найти энергию взаимодействия со слабо меняющимся внешним полем U_0 малой области неоднородности в диэлектрике (см. предыдущую задачу). Вследствие быстрой сходимости достаточно ограничиться членами с $l = 0$ и 1. Результат представить в векторной форме. Найти в этом приближении силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к области неоднородности.

168. Показать, что незаряженное диэлектрическое тело с проницаемостью ε_0 , находящееся в диэлектрике с проницаемостью ε , втягивается в область с большей напряженностью электрического поля, если $\varepsilon_0 > \varepsilon$, и выталкивается из этой области, если $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулу (III.16).

169. В общем случае компоненты дипольного момента \mathbf{p} , приобретенного диэлектрическим телом во внешнем однородном поле \mathbf{E} , можно представить в виде $p_i = \beta_{ik} E_k$, где β_{ik} — симметричный тензор поляризуемости тела. Какую ориентацию стремится занять это тело во внешнем однородном поле? Тело незаряжено, $\beta_{ik} x_i x_k > 0$, x_i , ($i = 1, 2, 3$) — произвольный вектор.

170. Стержень из диэлектрика с проницаемостью ε_1 погружен в однородную жидкую диэлектрическую среду с проницаемостью ε_2 . Какую он займет ориентацию, если систему поместить в однородное внешнее поле? Какую ориентацию займет тонкий диск, находящийся в жидком диэлектрике?

171. Найти силу F , действующую на диэлектрический шар со стороны точечного заряда q (см. условие задачи 157*).

Рассмотреть предельный случай проводящего шара. Решить задачу двумя способами: методом задачи 166* и с помощью формулы (III.16).

172. Электростатическое поле образовано двумя проводящими цилиндрами с параллельными осями, радиусами R_1 , R_2 и зарядами на единицу длины $\pm \kappa$. Расстояние между осями цилиндров $a > R_1 + R_2$. Найти взаимную емкость $C_{вз}$ цилиндров на единицу длины. ($C_{вз} = \kappa / (\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы цилиндров).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 117.

173. Оси двух одинаковых проводящих цилиндров с радиусами R находятся на расстоянии a друг от друга. Цилиндры несут заряды $\pm \kappa$ на единицу длины. Найти распределение зарядов σ на поверхностях цилиндров.

174. Конденсатор образован двумя цилиндрическими проводящими поверхностями с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Расстояние между осями цилиндров $a < R_2 - R_1$. Найти емкость C конденсатора.

175. Определить поле φ точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik} .

176. В пустоте находится плоскопараллельная пластинка из анизотропного однородного диэлектрика с тензором проницаемости ε_{ik} . Вне пластинки однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 . Используя граничные условия для вектора поля, определить поле \mathbf{E} внутри пластинки.

177. Найти емкость C плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между ними a , если пространство между обкладками заполнено анизотропным диэлектриком с проницаемостью ε_{ik} . Краевым эффектом пренебречь.

178. Найти изменение направления линий вектора \mathbf{E} при переходе пустоты в анизотропный диэлектрик. Воспользоваться результатом задачи 176.

§ 2. Потенциальные и емкостные коэффициенты

Потенциалы V_i , системы n проводников являются линейными однородными функциями зарядов q_k на проводниках:

$$V_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (\text{III.26})$$

Величины s_{ik} называются потенциальными коэффициентами. Они зависят от взаимного расположения, формы и геометрических размеров проводников, а также от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Матрица \hat{s} симметрична:

$$s_{ik} = s_{ki}. \quad (\text{III.27})$$

Величина s_{ik} представляет собой потенциал, приобретаемый i -м проводником, если сообщить k -му проводнику заряд $q_k = 1$, а остальные проводники оставить незаряженными. Все $s_{ik} > 0$.

Очевидно, что и заряды проводников являются линейными однородными функциями их потенциалов:

$$q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} V_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (\text{III.28})$$

Величины c_{ik} называются емкостными коэффициентами. При этом $c_{ii} > 0$ (собственные емкости); $c_{ik} = c_{ki} > 0$ при $i \neq k$ (коэффициенты взаимной емкости, или просто взаимные емкости).

Величина c_{ik} представляет собой заряд, приобретаемый i -м проводником, когда все проводники кроме k -го заземлены, а k -й проводник имеет потенциал $V_k = 1$. Матрицы s_{ik} и c_{ik} являются взаимно обратными.

В случае одиночного проводника имеется единственный емкостный коэффициент c_{11} , называемый при этом просто емкостью. Емкость конденсатора (III.14) может быть выражена через емкостные коэффициенты его обкладок (см. задачу 180).

Энергия системы проводников имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} V_i V_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} s_{ik} q_i q_k. \quad (\text{III.29})$$

Обобщенная сила F_a соответствующая обобщенной координате a , определяется формулами:

$$F_a = -\frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial s_{ik}}{\partial a} q_i q_k = +\frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial c_{ik}}{\partial a} V_i V_k. \quad (\text{III.30})$$

При решении электростатических задач бывает полезна теорема взаимности Грина: если потенциалы n проводников равны $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$, когда их заряды $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ и равны $V'_1, V'_2, V'_3, \dots, V'_n$, когда их заряды $q'_1, q'_2, q'_3, \dots, q'_n$, то имеет место соотношение:

$$\sum_{i=1}^n q_i V'_i = \sum_{i=1}^n q'_i V_i. \quad (\text{III.31})$$

179. Доказать теорему взаимности Грина (III.31). Доказать с помощью теоремы Грина, что $s_{ik} = s_{ki}$.

180. Система состоит из двух проводников, удаленных от всех других проводников. Проводник 1 заключен внутри полого проводника 2. Выразить емкости C и C' конденсатора и уединенного проводника, образующих эту систему, через ее емкостные коэффициенты. Доказать, что взаимные емкости проводника 1 и любого проводника, находящегося вне проводника 2, равны нулю.

181. Выразить потенциальные коэффициенты s_{ik} через емкостные c_{ik} в случае системы двух проводников.

182. Емкости двух уединенных проводников равны c_1 и c_2 . Эти проводники находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью ε в вакууме на расстоянии r , большом по сравнению с их собственными размерами. Показать, что емкостные коэффициенты системы равны

$$c_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right), \quad c_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad c_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right),$$

УКАЗАНИЕ. Определить сначала потенциальные коэффициенты с точностью до величины $1/r$.

183. Емкостные коэффициенты системы двух проводников равны c_{11} , c_{22} , $c_{12} = c_{21}$. Найти емкость C конденсатора, обкладками которого служат эти два проводника.

184. Четыре одинаковые проводящие сферы расположены по углам квадрата. Сфера 1 несет заряд q . Затем она соединяется тонкой проволочкой поочередно на время, достаточное для установления равновесия, со сферами 2, 3, 4 (нумерация проводников циклическая). Найти распределение заряда между проводниками по окончании всех операций. Потенциальные коэффициенты системы заданы.

185. Три одинаковые проводящие сферы с радиусами a находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $b \geq a$. Вначале все сферы имели одинаковые заряды q . Затем они по очереди заземлялись на время, достаточное для установления равновесия. Какой заряд остается на каждой сфере по окончании всех операций?

186. Собственные емкости двух проводников, находящихся в однородном диэлектрике, C_1 и C_2 , их потенциалы V_1 и V_2 , расстояние между проводниками r много больше их размеров. Найти действующую между ними силу F .

187. Замкнутая проводящая поверхность с потенциалом V_1 содержит внутри себя проводник с потенциалом V_0 . При этом потенциал в некоторой точке P между проводящими поверхностями равен V_P . Пусть теперь проводники заземлены, а в точку P помещен заряд q . Какие заряды будут при этом индуцированы на проводниках?

188. Показать, что в отсутствие точечного заряда геометрическое место точек, из которых единичный заряд индуцирует на некотором заземленном проводнике заряд одной и той же величины, совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля этого проводника.

189. Два проводника с собственными емкостями c_{11} и c_{22} и взаимной емкостью c_{12} , составляющие часть некоторой системы изолированных проводников, соединены тонкой проволокой. Какова собственная емкость объединенного проводника, коэффициенты взаимной емкости его и остальных проводников системы?

190. Два одинаковых сферических конденсатора с радиусами внутренних и внешних обкладок, соответственно a и b , изолированы и находятся на большом расстоянии r друг от друга. Внутренним сферам сообщены заряды q и q_1 , после чего внешние сферы соединяются проволокой. Найти (приближенно) изменение ΔW энергии системы.

191. Заземленная внешняя обкладка сферического конденсатора имеет малую толщину. В ней проделано небольшое отверстие, через которое проходит изолированный провод, соединяющий внутреннюю обкладку конденсатора с третьим проводником, находящимся на большом расстоянии r от конденсатора. Собственная емкость этого проводника C и вместе с внутренней обкладкой конденсатора он несет заряд q . Радиус внешней обкладки конденсатора b , радиус внутренней обкладки a . Найти силу F , действующую на третий проводник.

192*. Проводник заряжается путем последовательных подсоединений к разрядному шарика электрофора. Шарик электрофора после каждого подсоединения вновь заряжается, приобретая при этом заряд Q . При первом подсоединении на проводник с шарика переходит заряд q . Какой заряд получит проводник после очень большого числа подсоединений?

§ 3. Специальные методы электростатики

В этом параграфе содержатся задачи, относящиеся к различным разделам электростатики, более трудные в математическом отношении. Многочисленные методы решения задач электростатики изложены в ряде книг ([46], [66], [69], [93], [100]) в настоящем сборнике иллюстрируются лишь некоторые из этих методов: метод криволинейных координат (для случаев эллиптических поверхностей и поверхностей двух сфер), методы изображений, интегральных преобразований и инверсии. Схема их применения разъясняется непосредственно в решениях задач (более подробно, например, в задачах 193*, 195*, 205*, 209*, 211*, 215*). Изложим здесь кратко только метод инверсии.

Преобразованием инверсии называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка его переходит в точку, сопряженную относительно некоторой, надлежащим образом выбранной сферы инверсии радиуса R . Если сферическими координатами (с началом в центре сферы

инверсии) первоначальной точки являются r, ϑ, α , то сферическими координатами инвертированной точки будут $r' = R^2/r, \vartheta, \alpha$. В векторной форме

$$\mathbf{r}' = \frac{R^2 \mathbf{r}}{r^2} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \frac{R^2 \mathbf{r}'}{r'^2}. \quad (\text{III.32})$$

Преобразование инверсии обладает свойством конформности. При инверсии сфера преобразуется в сферу. Если, в частности, центр инверсии лежит на преобразуемой сфере, то последняя преобразуется в плоскость (и наоборот).

Уравнение Лапласа инвариантно относительно преобразования инверсии: если функция $\varphi(\mathbf{r})$ является решением уравнения Лапласа в исходном пространстве, то

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \frac{r}{R} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{R}{r'} \varphi\left(\frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'\right) \quad (\text{III.33})$$

представляет собой решение уравнения Лапласа в инвертированном пространстве.

Основная задача, решаемая методом инверсии, формулируется так. Нужно найти поле системы заземленных проводников и точечных зарядов q_i , находящихся в точках \mathbf{r}_i . Потенциал на бесконечности $V = \text{const}$. Для решения задачи произведем инверсию с таким расчетом, чтобы поверхности проводников приобрели более простую форму.

При этом точечные заряды q_i заменяются зарядами

$$q'_i = \frac{R}{r_i} q_i, \quad (\text{III.34})$$

находящимися в точках

$$\mathbf{r}'_i = R^2 \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2}.$$

Кроме того, в точке $r' = 0$ появляется точечный заряд

$$q_0 = -RV. \quad (\text{III.35})$$

В инвертированной системе решаем электростатическую задачу — находим потенциал $\varphi'(\mathbf{r}')$. Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ можно затем получить с помощью обратного преобразования. Разумеется, можно и наоборот — по известному φ находить φ' .

193*. Проводящий эллипсоид с зарядом q и полуосями a, b, c помещен в однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Найти потенциал φ , а также емкость эллипсоида C и поверхностную плотность заряда σ на его поверхности.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться эллипсоидальными координатами (см. задачу 64*). Искать потенциал в виде $\varphi(\xi)$.

194. Исходя из результатов предыдущей задачи найти потенциалы и емкости вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. Рассмотреть частные случаи тонкого длинного стержня и тонкого диска. Емкость C и потенциал φ вытянутого эллипсоида вращения найти также, используя результат задачи 75.

195*. Проводящий эллипсоид с зарядом q находится в пустоте в однородном внешнем поле, напряженность E_0 которого параллельна одной из осей эллипсоида. Найти потенциал φ полного электрического поля.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться эллипсоидальными координатами задачи 64*. Граничные условия на поверхности эллипсоида ($\xi = 0$) могут выполняться только, если зависимость потенциала φ' , вызванного наведенными зарядами, от η, ζ , будет такая же, как у внешнего поля:

$$\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) \cdot F(\xi).$$

196. Напряженность поля в плоском конденсаторе равна E_0 . На заземленной обкладке имеется проводящий выступ в форме половины вытянутого эллипсоида вращения, ось симметрии которого перпендикулярна к плоскостям обкладок. Расстояние между обкладками велико по сравнению с размерами выступа. Найти электрическое поле φ в конденсаторе. Определить, во сколько раз максимальное значение напряженности поля E_{\max} и превосходит E_0 .¹

197. Проводящий незаряженный эллипсоид находится во внешнем однородном поле E_0 , ориентированном произвольно по отношению к его осям. Найти полное электрическое поле φ . Рассмотреть поле на больших расстояниях от эллипсоида, выразив его через коэффициенты деполяризации:

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s},$$

$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s} \quad (R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}).$$

¹Результат задачи поясняет принцип работы громоотвода.

198. Найти выражения коэффициентов деполяризации, введенных в предыдущей задаче, в случае вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$). Рассмотреть частные случаи очень вытянутого эллипсоида (стержня) и эллипсоида, близкого к шару.

199. Найти коэффициенты деполяризации для сплюснутого проводящего эллипсоида ($a = b > c$). Рассмотреть, в частности, случай диска.

200*. Диэлектрический эллипсоид с полуосями a, b, c находится в однородном внешнем поле с напряженностью E_0 . Диэлектрическая проницаемость эллипсоида ε_1 , а окружающего его однородного диэлектрика ε_2 . Найти потенциал φ результирующего электрического поля (воспользоваться указанием к задаче 195*). Найти напряженность E электрического поля внутри эллипсоида, а также потенциал φ_2 вне эллипсоида на больших от него расстояниях, выразив его через составляющие поляризуемости эллипсоида по главным осям.

201. Эллипсоид вращения с диэлектрической проницаемостью ε_1 находится во внешнем однородном поле E_0 в однородной диэлектрической среде ε_2 . Найти энергию U эллипсоида в этом поле и приложенный к нему вращательный момент N . Рассмотреть также случай проводящего эллипсоида вращения.

202*. Показать, что при сообщении проводящей жидкой сферической капле достаточно большого заряда капля теряет устойчивость. Найти это критическое значение заряда $q_{кр}$. Радиус капли R , коэффициент поверхностного натяжения α .

УКАЗАНИЕ. Сравнить энергию сферической капли с энергией деформированной капли, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. Площадь поверхности такого эллипсоида

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \quad (a > b = c).$$

203*. Однородное электрическое поле $E_0 \parallel z$ в полупространстве $z < 0$ ограничено заземленной проводящей плоскостью $z = 0$ с круговым отверстием радиуса a . Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, поле на больших расстояниях за отверстием (в полупространстве $z > 0$).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться сплюснутыми сфероидальными координатами (см. задачу 65*) с $c = 0$. Искать решение во всем пространстве в виде $\varphi = -E_0 z F(\xi)$.

204. Найти распределение зарядов σ на проводящей плоскости в предыдущей задаче.

205*. Внутри клиновидной области пространства, ограниченной двумя пересекающимися под углом β заземленными проводящими полуплоскостями OA и OB , в точке $N(r_0)$ находится точечный заряд q (рис. 11).

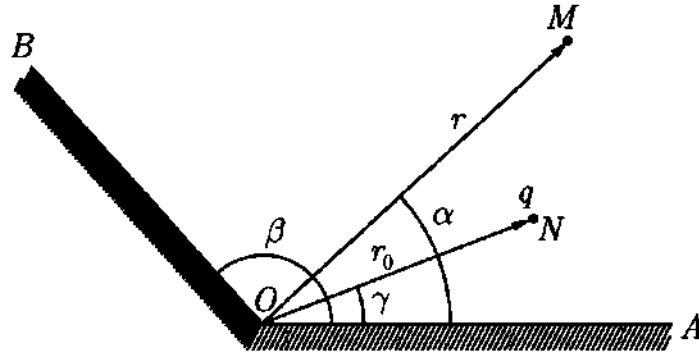


Рис. 11

Цилиндрические координаты заряда $(r_0, \gamma, 0)$; ось z направлена вдоль ребра клина, азимутальный угол α отсчитывается от грани OA . Доказать, что потенциал $\varphi(r, \alpha, z)$ может быть записан в виде

$$\varphi(r, \alpha, z) = \int_0^{\infty} \varphi_k(r, \alpha) \cos kz \, dk,$$

где

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{8q}{\beta} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\gamma}{\beta} \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\gamma}{\beta} \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r > r_0, \end{cases}$$

$I_{\frac{n\pi}{\beta}}$ и $K_{\frac{n\pi}{\beta}}$ — цилиндрические функции.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (П 1.11) и приложением 3.

206. Доказать, что потенциал поля точечного заряда в клиновидной области, найденный в предыдущей задаче, можно представить в виде

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{q}{\beta\sqrt{2rr_0}} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\alpha - \gamma)}{\beta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\alpha + \gamma)}{\beta}} \right] \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \eta}},$$

где

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{2rr_0}, \quad \eta > 0.$$

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулами:

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(kr) I_{\nu}(kr_0) \cos kz \, dk = \frac{1}{2\sqrt{2rr_0}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\nu} d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2} - 1 \right).$$

207. Найти поле φ заряда q , находящегося вблизи проводящей полуплоскости $\alpha = 0$ в точке r_0 с цилиндрическими координатами $(r_0, \gamma, z = 0)$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 206. Для вычисления интеграла сделать подстановку $\operatorname{ch} \frac{\zeta}{2} = \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \operatorname{ch} u$, где $0 < u < \infty$.

208. Найти распределение σ поверхностного заряда вблизи ребра клина с двугранным углом β (угол отсчитывается вне проводника). Клино находится в поле произвольным образом распределенного заряда.

УКАЗАНИЕ. Сначала рассмотреть, случай, когда вблизи клина находится один точечный заряд, воспользовавшись результатом задачи 205*, разложениями (П 3.6) и формулой

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(k\rho) k^{\nu} \cos kz \, dk = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\rho^{\nu}}{(\rho^2 + z^2)^{\nu+1/2}}.$$

Решение Блоха (5.6) представляет собой произведение обычной плоской волны $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ на периодическую функцию $u_k(\mathbf{r})$ с периодом решетки. В целом эту функцию можно считать модулирующим множителем плоской волны.

Учитывая, что $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, перепишем уравнение Шредингера (5.5) в виде

$$\nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\mathbf{r})) \varphi_k(\mathbf{r}) = 0,$$

или

$$\nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, исходное уравнение Шредингера представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическим коэффициентом при искомой функции. Общее решение уравнения типа (5.7) было получено еще в 1883 г. математиком Флоке. Он получил решение в виде (5.6), т. е. в форме функций, которые сейчас называются одномерными функциями Блоха.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим доказательство теоремы в одномерном случае. Предположим, что имеется бесконечная кристаллическая цепочка, содержащая N ионов. Реально ее можно представить в виде кольца, причем первый ион и N -й ион совпадают. Тогда должны выполняться циклические граничные условия:

$$\varphi_k(r + Na) = \varphi_k(r). \quad (5.8)$$

Пусть T_n — трансляционный оператор, действующий только на координату r . Определим его так:

$$T_n(r) = (r + na), \quad (5.9)$$

где $n = 0, \dots, N$. Тогда действие этого оператора на волновую функцию, являющуюся решением уравнения (5.5), можно записать в виде

$$T_n \varphi_k(r) = \varphi_k(r + na). \quad (5.10)$$

Будем искать только такие собственные значения оператора T_n , для которых справедливо равенство

$$T_n \varphi_k(r) = c_n \varphi_k(r) \quad (5.11)$$

C_n — собственное значение оператора T_n . Запишем (5.11), полагая $n = 1$ и $n = N$:

$$T_1\varphi_k(r) = c_1\varphi_k(r) = \varphi_k(r + a), \quad (5.12)$$

$$T_N\varphi_k(r) = (c_1)^N\varphi_k(r) = \varphi_k(r + Na). \quad (5.13)$$

Используя циклические условия (5.8), находим из (5.13)

$$(c_1)^N = 1,$$

или

$$c_1 = (1)^{\frac{1}{N}} = \exp\left(\frac{2\pi iz}{N}\right), \quad z = 1, 2, \dots, N.$$

Согласно определению (3.8) волнового числа k имеем

$$\frac{2\pi z}{Na} = k, \quad (5.14)$$

отсюда

$$c_1 = e^{ika}. \quad (5.15)$$

Таким образом, для произвольной трансляции na , используя (5.10), (5.11) и (5.15), находим

$$\varphi_k(r + na) = e^{ikna}\varphi_k(r). \quad (5.16)$$

Здесь $\exp(ikna)$ является собственным значением оператора T_n , а $\varphi_k(r)$ — его собственная волновая функция. Условию (5.16) удовлетворяет функция Блоха (5.6). Покажем это:

$$\begin{aligned} \varphi_k(r + na) &= e^{ik(r+na)}u_k(r + na) = \\ &= e^{ikr}e^{ikna}u_k(r + na) = e^{ikna}e^{ikr}u_k(r + na). \end{aligned}$$

Так как согласно условиям теоремы функция $u_k(r)$ периодическая с периодом решетки, то

$$u_k(r) = u_k(r + na). \quad (5.17)$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_k(r + na) = e^{ikna}e^{ikr}u_k(r) = e^{ikna}\varphi_k(r).$$

Это и доказывает теорему Блоха.

Отметим, что функция $\varphi_k(r)$, описывающая электрон в состоянии k , является собственной функцией оператора Блоха H_s и оператора трансляций T . Из теоремы Блоха следует ряд важных следствий. Так, каждая волновая функция электрона в периодическом потенциальном поле характеризуется волновым вектором k . Блоховская волновая функция

$$\varphi_k(r) = e^{i k \cdot r} u_k(r)$$

имеет сходство с волновой функцией свободного электрона, т. е. с плоской волной:

$$\varphi_k(r) = A e^{i k \cdot r}.$$

Отличие, как хорошо видно, заключается только в модулирующем множителе. В связи с этим многие свойства электрона в периодическом поле аналогичны свойствам свободного электрона. Волновой вектор k вводится с точностью до вектора обратной решетки и потому состояния электрона с волновыми векторами k и $k + G$ эквивалентны.

5.1.2. Точечная и трансляционная симметрия идеальной кристаллической структуры

Кристаллическая решетка представляет собой систему определенным образом расположенных в трехмерном пространстве точек, занимаемых ионами металла. Характерным элементом кристаллической решетки является элементарная ячейка, которая геометрически задается совокупностью трех некопланарных векторов (в простейшем случае) a_i ($i = 1, 2, 3$). Если выбрать точку отсчета, то из нее можно построить любой узел решетки, используя элементы трансляций:

$$l = l_i a_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad l_i — \text{целые числа.}$$

Таким образом, весь кристалл строится путем бесконечного повторения элементарных ячеек. Элементы трансляционной симметрии будут в основе многих последующих рассуждений.

5.1.3. Элементарная ячейка кристаллической структуры. Ячейка Вигнера – Зейтца

Для каждой кристаллической структуры существует некоторый произвол в определении формы элементарной ячейки. В связи с этим очень удобно использовать центрированные элементарные ячейки — ячейки Вигнера –

Зейтца, которые, как будет видно далее, играют важную роль в электронной теории металлов. Такую ячейку можно построить согласно следующему правилу: из выбранного центрального узла проводим векторы к ближайшим узлам решетки и строим плоскости через середины этих векторов и перпендикулярно к ним. Возникающая область с центральным узлом есть элементарная ячейка Вигнера–Зейтца. Если элементарная ячейка содержит один атом, то структуру называют решеткой Бравэ, в противном случае имеем решетку с базисом. Базисом определяется совокупность векторов, характеризующих положение атомов ячейки относительно одного из них. Ячейка Вигнера–Зейтца обладает тем свойством, что все точки решетки, принадлежащие ячейке, находятся ближе к центру ячейки, чем к какому-нибудь другому узлу решетки. Удобство этой ячейки еще и в том, что она лучше всего аппроксимирует сферу, которую всегда приписывают атому в формальных моделях упаковки его в кристалле.

5.1.4. Обратная решетка

Элементарная ячейка считается заданной, если задана минимальная совокупность векторов, определяющих узлы ячейки относительно данного узла. В таком случае элементарную ячейку можно задать матрицей

$$a_{ij} = (A)_{ij}, \quad (5.18)$$

где элементы матрицы являются прямоугольными проекциями составляющих ячейку векторов. Такой ячейке можно сопоставить другую ячейку, задаваемую обратной матрицей

$$(B)_{ij} = (A)_{ij}^{-1}. \quad (5.19)$$

Поскольку $(A)_{ij}(B)_{ij} = 1$, то необходимо, чтобы

$$a_{ij}b_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.20)$$

или

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}. \quad (5.21)$$

Таким образом, векторы \mathbf{b}_j обратны векторам базиса \mathbf{a}_j и представляют собой базис обратной решетки. Так, если вектора \mathbf{X} и \mathbf{Y} определены как $\mathbf{X} = x_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{Y} = y_i \mathbf{b}_i$, то $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = x_i y_i$.

Определим вектор обратной решетки из набора:

$$\mathbf{G} = n_1 2\pi \mathbf{b}_1 + n_2 2\pi \mathbf{b}_2 + n_3 2\pi \mathbf{b}_3, \quad (5.22)$$

где n_j — целые числа, в том числе отрицательные и нуль. Концы векторов \mathbf{G} образуют обратную решетку. Множитель 2π сразу введен в определение вектора обратной решетки для того, чтобы при разложении функции по векторам обратной решетки запись совпадала с принятым определением волновой функции свободного электрона

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Если вектор \mathbf{R} есть вектор трансляции прямой решетки

$$\mathbf{R} = z_1 \mathbf{a}_1 + z_2 \mathbf{a}_2 + z_3 \mathbf{a}_3,$$

то скалярное произведение $\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}$ равно

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{R} = 2\pi n_i z_i = 2\pi m_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.23)$$

Введенная таким образом обратная решетка является инвариантным геометрическим объектом, свойства которого играют важную роль в теории металлов. Рассмотрим плоскую волну с вектором обратной решетки \mathbf{G} :

$$\exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) = f(\mathbf{G}, \mathbf{r}). \quad (5.24)$$

Подействуем на эту функцию трансляционным оператором $T_{\mathbf{R}}$:

$$T_{\mathbf{R}} f(\mathbf{G}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{G}, \mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp(i \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{R})) = \exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}) \exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}).$$

Используя здесь выражение (5.23), находим

$$T_{\mathbf{R}} f(\mathbf{G}, \mathbf{r}) = e^{i 2\pi m_j} e^{i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.25)$$

Таким образом, функции вида (5.24) обладают полной трансляционной периодичностью решеточного потенциала. Такой же периодичностью обладают и функции $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, согласно (5.17). Поэтому их можно разложить в ряд Фурье по функциям (5.24):

$$u_{\mathbf{k}} = \sum_n c_{\mathbf{k}n} \exp(i \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{r}). \quad (5.26)$$

Тогда блоховская функция (5.6) может быть записана в форме

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_n c_{kn} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}). \quad (5.27)$$

Это представление волновой функции электрона в периодическом поле является особенно важным при расчете электронных состояний. Отметим кратко некоторые свойства обратной решетки:

1. Каждый вектор обратной решетки \mathbf{G} ортогонален некоторой плоскости, образованной атомами прямой решетки.

2. Длина вектора $|\mathbf{G}|$ обратно пропорциональна расстоянию между соответствующими атомными плоскостями.

3. Объем $v_{об}$ обратной ячейки обратно пропорционален объему v_n ячейки прямой решетки:

$$v_{об} = \frac{8\pi^3}{v_n}. \quad (5.28)$$

5.1.5. Зоны Бриллюэна

В обратном пространстве удобно выбрать элементарную ячейку аналогично ячейке Вигнера–Зейтца в прямой решетке. Эта ячейка называется первой зоной Бриллюэна и содержит те точки обратного пространства, которые находятся ближе к центру ячейки, чем к любой другой точке. Обратными векторами \mathbf{G} здесь будут являться вектора, соединяющие два любых узла обратной решетки. Отсюда хорошо видно, что если состояние электрона определяется волновым вектором \mathbf{k} , то другое состояние электрона $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$ будет ему эквивалентно. Действительно, так как

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}},$$

что справедливо для любого вектора \mathbf{R} прямой решетки. Следовательно, волновые функции, описывающие состояния \mathbf{k} и \mathbf{k}' должны быть тождественны. Итак, для всех точек, лежащих вне зоны Бриллюэна всегда найдутся эквивалентные им точки внутри зоны Бриллюэна, а каждой точке на поверхности зоны Бриллюэна найдется эквивалентная точка, лежащая также на поверхности зоны. Иначе говоря, любую точку \mathbf{k} в обратном пространстве можно привести к соответствующей точке в первой зоне Бриллюэна. Это значит, что любую волновую функцию можно описать в схеме приведенных зон, так же как и в схеме расширенных зон. Важным выводом

этих рассуждений является утверждение, что все состояния электронов в периодическом поле решетки характеризуются значениями волнового вектора k , лежащими внутри или на поверхности первой зоны Бриллюэна. Отсюда следует, что энергия электронных состояний будет многозначной функцией волнового вектора k . Непосредственно мы убедимся в этом, рассматривая энергетический спектр электрона, движущегося в периодическом поле решетки.

5.1.6. Число электронных состояний в зоне Бриллюэна

Подсчет разрешенных электронных состояний, т. е. значений волнового вектора k , в кристалле можно осуществить, присоединяя циклические граничные условия Борна–Кармана. Мы уже дважды использовали эти условия при подсчете электронных состояний в модели свободных электронов и при доказательстве теоремы Блоха. Сейчас мы обсудим этот вопрос несколько подробнее. Дело в том, что рассмотрение бесконечных кристаллических структур требует бесконечного ряда волновых функций. Однако, можно избежать этой трудности, используя трансляционную симметрию кристаллической решетки. Суть процедуры заключается в следующем: Формально кристалл можно разбить на ряд микрокристаллов, содержащих конечное число элементарных ячеек, например N ячеек, в каждом из трех пространственных направлений. Потребуем, чтобы при этом удовлетворялись граничные условия:

$$\varphi_k(r + Na) = \varphi_k(r). \quad (5.29)$$

Принятое деление, естественно, носит произвольный характер. Однако, отметим, что оно и необходимо нам как математический прием с тем, чтобы получить обозримый объект, впоследствии же можно перейти к пределу, устремляя число N к бесконечности. Сами граничные условия Борна–Кармана (5.29) наглядно можно осуществить в одномерном случае, беря замкнутую кристаллическую цепочку. Трехмерный вариант этих условий реально представить уже невозможно, но это не должно вызывать каких-либо сомнений, поскольку эти граничные условия не вносят никаких изменений в рассматриваемую физическую картину.

Используя эти граничные условия (5.29) в одномерном случае при доказательстве теоремы Блоха, мы получили для разрешенных значений волнового числа выражение (5.14):

$$k = \frac{2\pi z}{Na}, \quad (5.30)$$

где $z = 1, 2, \dots, N$. Однако, выбирая обратную ячейку в виде зоны Бриллюэна, т. е. в одномерном случае в виде централизованного отрезка, необходимо взять для изменения величины z интервал

$$-\frac{1}{2}N < z < \frac{1}{2}N. \quad (5.31)$$

Это значит, что мы из многих возможных эквивалентных вариантов выбора обратной ячейки выбрали централизованную ячейку, т. е. первую зону Бриллюэна. Таким образом, все возможные значения волнового числа k в приведенной схеме зон Бриллюэна заключены в интервале

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}. \quad (5.32)$$

Придавая величине z значения на отрезке (5.31), можно получить набор всех возможных величин k , лежащих в интервале (5.32). Значения k распределены в этом интервале с постоянной плотностью и, поскольку величина N очень велика, то можно сказать, что непрерывно. Эти результаты можно непосредственно перенести на трехмерный случай, считая, что выбранный макрокристалл имеет размеры $N_1 a_1, N_2 a_2, N_3 a_3$ и для каждого из пространственных направлений выполняются, подобно (5.8), циклические условия. Выполнение их требует справедливости для трех составляющих k_1, k_2, k_3 по осям обратного пространства вектора k необходимых условий:

$$k_1 = \frac{2\pi z_1}{N_1} b_1, \quad k_2 = \frac{2\pi z_2}{N_2} b_2, \quad k_3 = \frac{2\pi z_3}{N_3} b_3,$$

здесь $b_i = \frac{1}{a_i}$ есть, согласно представлению (5.22), базис обратного пространства. Таким образом, получаем, что значения вектора k определяются выражением

$$k = \frac{2\pi z_1}{N_1} b_1 + \frac{2\pi z_2}{N_2} b_2 + \frac{2\pi z_3}{N_3} b_3. \quad (5.33)$$

Набор всех возможных значений волнового вектора k можно найти, беря величины z_i из области

$$-\frac{N_1}{2} < z_1 < \frac{N_1}{2}, \quad -\frac{N_2}{2} < z_2 < \frac{N_2}{2}, \quad -\frac{N_3}{2} < z_3 < \frac{N_3}{2}. \quad (5.34)$$

Эта область представляет собой параллелепипед с центром в начале координат. Поскольку эта область эквивалентна объему первой зоны Бриллюэна, которую мы выбрали за основную ячейку обратной решетки, то и в

зоне Бриллюэна находится $N_1 \times N_2 \times N_3$ разрешенных значений волнового вектора k . Итак, зона Бриллюэна содержит столько допустимых значений вектора k , сколько элементарных ячеек содержит макрокристалл. Увеличение размеров макрокристалла просто увеличивает плотность состояний в k -пространстве.

Пусть объем макрокристалла, содержащего $N^3 = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ ячеек, равен v , тогда на одну ячейку приходится объем $v_n = (v/N^3)$ прямого пространства. Этот объем связан с объемом ячейки обратного пространства соотношением (5.28):

$$v_{об} = \frac{8\pi^3}{v} N^3.$$

Отсюда можно легко найти объем обратного пространства, непосредственно связанный с данным волновым вектором k

$$\frac{v_{об}}{N^3} = \frac{8\pi^3}{v}. \quad (5.35)$$

Обратная этому значению величина очевидно представляет число разрешенных значений вектора k в единице объема k -пространства:

$$\frac{N^3}{v_{об}} = \frac{v}{8\pi^3} \quad (5.36)$$

и служит весовым множителем при переходе от суммирования к интегрированию в обратном пространстве (3.10).

Лекция 6

6.1. Энергетический спектр электрона в поле с периодическим потенциалом

Как и раньше, нас будет интересовать в рассматриваемой модели, главным образом, основная характеристика электронного газа — закон дисперсии, т. е. связь энергии с квазиимпульсом. Сейчас у нас имеются все необходимые сведения, позволяющие найти явный вид этого закона. До сих пор нам приходилось иметь дело с квадратичным по квазиимпульсу дисперсионным соотношением, вытекающим из приближения свободных электронов. Оно утверждало, что энергия является непрерывной функцией волнового вектора при всех его значениях.

Итак, рассмотрим энергетический спектр электронного газа, слабо возмущенного периодическим полем решетки. Такое приближение для одноэлектронной модели известно как приближение почти свободных электронов. Обратимся непосредственно к одномерной модели и разберем математическую сторону вопроса, а затем остановимся на физических предпосылках приближения.

Прежде всего используем свойство периодичности потенциала решетки $U(\mathbf{r})$ и разложим его в ряд Фурье по векторам обратной решетки, так же, как мы ранее разлагали в ряд функцию $u_k(\mathbf{r})$:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_n U_n \exp(i \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{r}), \quad (6.1)$$

здесь U_n — Фурье-образ потенциала $U(\mathbf{r})$. Выражение (6.1) показывает, что потенциал $U(\mathbf{r})$ представляет собой функцию, определенную на дискретном пространстве узлов решетки. Предположим, что $U(\mathbf{r})$ есть слабое возмущение и воспользуемся обычной теорией возмущений, беря за основное состояние свободный электронный газ, т. е. плоские волны и энергию

$E_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Для энергии возмущенного состояния получаем:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r + \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\left| \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r \right|^2}{E_k^0 - E_{\mathbf{k}'}^0} + \dots, \quad (6.2)$$

здесь $E_k^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ — энергия невозмущенного состояния.

Рассмотрим матричный элемент

$$M_{kk'} = \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r = \int \sum_n U_n e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r,$$

здесь использовано соотношение (6.1). Согласно правилу отбора $M_{kk'} = \sum_n U_n$, если $\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n = 0$, и $M_{kk'} = 0$, если $\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n \neq 0$. Следовательно, периодичность потенциала $U(\mathbf{r})$ накладывает на матричные элементы перехода жесткое требование, являющееся центральным моментом приближения:

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{G}_n. \quad (6.3)$$

Таким образом, можно переписать разложение (6.2) с учетом периодичности потенциала $U(\mathbf{r})$:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \sum_n U_n + \sum_n \frac{|U_n|^2}{E_k^0 - E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_n}^0} + \dots \quad (6.4)$$

Очевидно, чтобы разложение (6.4) имело смысл, необходимо потребовать, чтобы основное состояние было невырожденным, т. е. $E_k^0 \neq E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_n}^0$, иначе $E_k \rightarrow \infty$. Это значит, что объем обратного пространства, занятый невозбужденными состояниями, не должен достигать зоны Бриллюэна. Однако, это не так. Поэтому, вероятно, нужно попробовать определить энергию возмущенного состояния из уравнения Шредингера, используя функцию Блоха в форме (5.27), когда периодическая часть функции разложена в ряд Фурье по векторам \mathbf{G}_n :

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_n c_{kn} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}). \quad (6.5)$$

Запишем уравнение Шредингера (5.5), подставляя выражение функции (5.27):

$$\left(\frac{p_k^2}{2m} + U(r) \right) \sum_n c_{kn} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} = E_k \sum_n c_{kn} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.6)$$

Для полного решения задачи необходимо определить значение коэффициентов c_{kn} . Для этого выберем из разложения (5.27) функцию

$$c_{kn'} \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}),$$

соответствующую определенному значению вектора обратной решетки и умножим ее на уравнение (6.6), интегрируя по всему объему кристалла:

$$\begin{aligned} \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}} \frac{p_k^2}{2m} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r + \\ + \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int U(r) e^{-i(\mathbf{G}_{n'} - \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r = \\ = E_k \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r. \end{aligned}$$

Поскольку функции Блоха образуют ортонормированную систему, то можно предыдущее выражение переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_n c_{kn} c_{kn'} \delta_{nn'} E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_n}^0 + \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int U(r) e^{-i(\mathbf{G}_{n'} - \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r = \\ = E_k \sum_n c_{kn} c_{kn'} \delta_{nn'}, \end{aligned}$$

или

$$c_{kn'} c_{kn'} E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}}^0 - c_{kn'} c_{kn'} E_k + c_{kn'} \sum_n c_{kn} U_{n' - n} = 0.$$

Знак суммы в первых двух членах этого выражения пропадает. U_n — фурье-образ потенциала $U(r)$.

Итак, имеем:

$$c_{kn'} (E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}}^0 - E_k) = - \sum_n c_{kn} U_{n' - n}. \quad (6.7)$$

Придавая векторам \mathbf{G}_n и $\mathbf{G}_{n'}$ конкретные значения, получаем систему уравнений относительно коэффициентов c_{kn} разложения функции Блоха. Когда коэффициенты найдены, то все электронные состояния определены. Нам будут интересовать только те значения вектора обратной решетки, которые лежат в первой зоне Бриллюэна, т. е. всего два значения для случая одномерной решетки:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n'} &= -\mathbf{g}, \\ \mathbf{G}_{n'} &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Это соответствует центру и границе зоны Бриллюэна. Итак, подставляя (6.8) в систему уравнений (6.7), находим

$$\begin{aligned} c_{k,0} (E_k^0 - E_k) + c_{k,-g} U_g &= 0, \\ c_{k,-g} (E_{k-g}^0 - E_k) + c_{k,0} U_{-g} &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Эта запись означает, что среди совокупности коэффициентов $c_{k,n}$ мы выделили только два коэффициента, соответствующие волновым функциям, описывающим электронные состояния вблизи центра зоны Бриллюэна и ее границы. Смесь этих волновых функций и будет соответствовать состояниям электрона в периодическом поле. Рассмотрим явно систему (6.9). Условием разрешимости ее является равенство нулю детерминанта

$$\det = \begin{vmatrix} E_k^0 - E_k & U_g \\ U_{-g} & E_{k-g}^0 - E_k \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$E_k^2 - E_k (E_k^0 + E_{k-g}^0) + E_k^0 E_{k-g}^0 - U_g U_{-g} = 0.$$

Таким образом, для энергии возмущенного периодическим полем электронного состояния имеем:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\{ E_k^0 + E_{k-g}^0 \} \pm \left\{ (E_k^0 + E_{k-g}^0)^2 - 4E_k^0 E_{k-g}^0 + 4U_g U_{-g} \right\}^{\frac{1}{2}} \right],$$

преобразуем это выражение:

$$E_k = \frac{1}{2} (E_k^0 + E_{k-g}^0) \pm \left[(E_k^0 - E_{k-g}^0)^2 + 4U_g U_{-g} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.10)$$

Здесь очень хорошо видно, что в результате возмущения, обусловленного периодическим потенциалом, исчезают, как самостоятельные, электронные состояния с энергиями E_k^0 , E_{k-g}^0

$$E_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad E_{k-g}^0 = \frac{\hbar}{2m}(\mathbf{k} - \mathbf{g})^2, \quad (6.11)$$

а вместо них возникает смешанное состояние с энергией E_k (6.10), которому соответствуют смешанные волновые функции. Еще раз подчеркнем, что возникшее состояние с энергией E_k явилось результатом смешивания из-за возмущения двух ранее вырожденных по энергии невозмущенных состояний. Рассмотрим подробнее выражение для энергетического спектра (6.10) электрона. Определим обратную решетку для одномерной ионной цепочки и зависимость энергии от волнового вектора невозмущенного состояния E_k^0 (6.11) в схеме приведенных зон (рис. 2). Далее, рассмотрим два случая: Пусть волновой вектор k принимает значения близкие к центру зоны Бриллюэна $k \approx 0$, тогда оказывается, что разность невозмущенных энергий $E_k^0 - E_{k-g}^0$ велика в сравнении с возмущающим потенциалом U_g (по условию задачи он мал) и, согласно выражению (6.10), имеем:

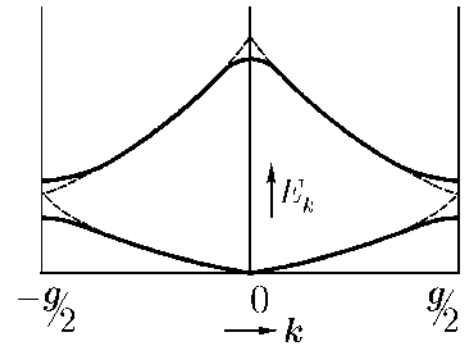


Рис. 2

$$E_k \simeq \frac{1}{2} [E_k^0 + E_{k-g}^0 \pm (E_k^0 - E_{k-g}^0)].$$

Здесь необходимо выбрать знак (+), иначе мы не будем в центре зоны Бриллюэна:

$$E_k \simeq E_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (6.12)$$

Это значит, что в центре зоны Бриллюэна электроны в периодическом поле тождественны свободным электронам и им отвечает квадратичное дисперсионное соотношение. Далее, рассмотрим состояние с волновым вектором k , лежащим на границе зоны Бриллюэна, т. е. $k = g/2$. Подставим значение k в (6.10):

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ E_{g/2}^0 + E_{-g/2}^0 \pm 2(U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}} \right\},$$

или

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 \pm (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}. \quad (6.13)$$

Итак, на границе зоны Бриллюэна энергия электрона в периодическом поле решетки имеет два значения:

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 - (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}, \quad (6.14)$$

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 + (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}, \quad (6.15)$$

т. е. меньше и больше соответствующего значения энергии свободного электрона $E_{g/2}^0$. Эти значения энергии разделены энергетической «щелью», шириной $2(U_g U_{-g})^{1/2}$. Можно сказать, что при значениях волнового вектора, близких к границе зоны Бриллюэна, происходит отклонение закона дисперсии от квадратичного, причем это происходит за счет смешивания электронных состояний, различающихся на вектор обратной решетки. Это смешивание приводит к понижению энергии одного состояния и повышению энергии другого состояния и на границе зоны возникает разрыв энергетической кривой. Значения энергии, попадающие в этот разрыв, не могут быть собственными энергиями электронных состояний в кристалле и составляют запрещенную энергетическую зону. Это и есть основной результат, характерный для электронов в периодическом поле. Он утверждает, что в металле энергетический спектр (закон дисперсии) носит зонную структуру, т. е. обратное пространство состоит из отдельных полос разрешенных и неразрешенных энергий, чередующихся между собой. Для всех значений волнового вектора k , лежащих внутри зоны Бриллюэна, энергия является непрерывной функцией вектора k . Эта непрерывная совокупность значений энергии и представляет энергетическую полосу. В схеме приведенных зон (рис. 2) энергия становится многозначной функцией волнового вектора. Отметим еще раз, что разрывность энергетического спектра электрона в периодическом поле является фундаментальным свойством, обуславливающим многие свойства металлов. Наличие запрещенной энергетической зоны означает, что в кристалле не может возникнуть электронных волн с энергией, лежащей в этой зоне. Если пучек электронов с энергией, соответствующей запрещенному значению, падает на кристалл, то он весь должен быть отражен, поскольку электроны с такой энергией не могут двигаться в кристалле. Таким образом, любая попытка возбудить электронные волны

с энергией, лежащей внутри запрещенной зоны, не приводит к возникновению стационарного состояния, а введенное возмущение быстро затухает. Природа возникающей особенности в энергетическом спектре электронов заключается в осуществлении условия (6.3):

$$k' - k = G_n, \quad (6.16)$$

которое соответствует плоскости в обратном пространстве, где образуется энергетический разрыв. Это условие по-существу является одной из форм записи известного закона отражения Брегга – Вульфа

$$n\lambda = 2d \sin \theta. \quad (6.17)$$

Следовательно, можно сказать, что зонная структура энергетического спектра является следствием брэгговского отражения электронов от решетки. В трехмерном случае качественная картина одномерной задачи сохраняется полностью, однако, ширина запрещенной зоны не всегда соответствует таковой в одномерной модели. В зависимости от характера периодического потенциала может возникать наложение соседних разрешенных зон. Рассмотрим для примера двумерную квадратную решетку в обратном пространстве (рис. 3). Пока волновой вектор k электрона близок к центру зоны Бриллюэна мы имеем концентрическую окружность для изоэнергетической линии; затем по мере увеличения энергии изолиния энергии коснется границы зоны Бриллюэна и потеряет окружную форму. Дальнейшее увеличение энергии соответствует появлению линий равной энергии в других зонах Бриллюэна, причем на границе зоны происходит разрыв непрерывности изолиний энергии, т. е. эти изолинии как бы отражаются от границы зоны.

Сформулируем теперь кратко основные результаты рассмотренной задачи о состояниях электронного газа в периодическом поле:

1. Энергетический спектр электрона в периодическом поле дискретен, и, следовательно, для электронных состояний в металле характерна зонная энергетическая структура.

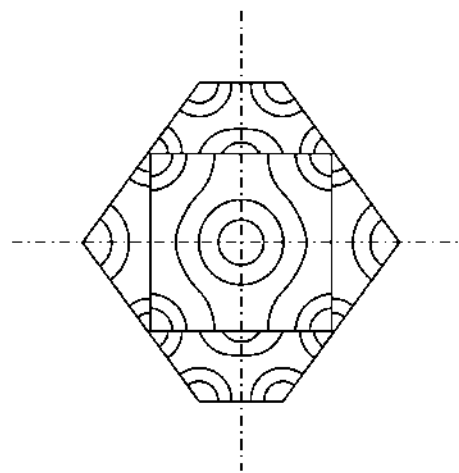


Рис. 3

2. Внутри каждой энергетической зоны зависимость энергии от волнового вектора является непрерывной функцией, причем отклонение от квадратичного закона существенно только для состояний вблизи границы зоны Бриллюэна.

3. Ширина запрещенной энергетической зоны связана с Фурье-образом периодического потенциала и в одномерном случае равна $2(U_g U_{-g})^{1/2}$.

4. Природа возникающей особенности в энергетическом спектре заключается в осуществлении брэгговского отражения электронов от решетки.

5. Собственные волновые функции оператора Блоха представляют собой смещение плоских волн, отличающихся на вектора обратной решетки с различным весомым множителем.

6. Качественные результаты одномерной модели справедливы и в многомерном случае.

6.1.1. Оператор Блоха в представлении операторов вторичного квантования

Представляет интерес некоторые предыдущие рассуждения о состояниях электрона в периодическом поле перевести на язык операторов вторичного квантования. Этот переход очень привлекателен в связи со своей компактностью записи.

Прежде всего получим многочастичный оператор Блоха, суммируя одноэлектронные операторы (5.4):

$$H = \sum_s \left\{ \frac{p_s^2}{2m} + U(r_s) \right\}. \quad (6.18)$$

Каждому одноэлектронному оператору Блоха соответствует собственная волновая функция Блоха

$$\varphi_k(r) = \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) u_k(r). \quad (6.19)$$

Построив соответствующие полевые операторы $\psi^+(r)$ и $\psi(r)$, согласно (3.27) и (3.28), можно записать в представлении чисел заполнения опе-

ратор (6.18):

$$\begin{aligned}
 H &= \int \psi^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}) d^3r = \\
 &= \sum_{k k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int \varphi_{k'\sigma}^* \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \varphi_{k\sigma} d^3r = \\
 &= \sum_{k k'} \sum_{\sigma} \delta_{kk'} E_k C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} = \sum_{k \sigma} E_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}, \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

т. е.

$$H = \sum_{k, \sigma} E_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}. \quad (6.21)$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что функции Блоха (6.19) образуют ортонормированную систему и каждая из них описывает состояние с энергией E_k .

Таким образом, многочастичный оператор Блоха в представлении операторов вторичного квантования по функциям Блоха имеет вид (6.21). Однако, иногда удобно представить оператор Блоха (6.18), используя формализм вторичного квантования по плоским волнам. Прделаем соответствующие выкладки без пояснений:

$$\begin{aligned}
 H &= \int \psi^+(\mathbf{r}) \frac{p^2}{2m} \psi(\mathbf{r}) d^3r + \int \psi^+(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r = \\
 &= \sum_{k, k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot\mathbf{r}} \frac{p^2}{2m} e^{ik\cdot\mathbf{r}} d^3r + \\
 &\quad + \sum_{k k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{ik\cdot\mathbf{r}} d^3r = \\
 &= \sum_{k k'} \sum_{\sigma} \varepsilon_k \delta_{kk'} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{k k'} \sum_{\sigma G} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot\mathbf{r}} U_G e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} d^3r = \\
 &= \sum_{k \sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{k G} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G\sigma}^+ C_{k\sigma}.
 \end{aligned}$$

здесь:

$U_G \equiv U_n$ — фурье-образ периодического потенциала $U(r)$.

\mathbf{G} — вектор обратной решетки.

Итак, оператор Блоха (6.18) в представлении операторов вторичного кван-

тования по плоским волнам можно записать так:

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kG} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G,\sigma}^+ C_{k\sigma}. \quad (6.22)$$

Если сюда включить еще оператор (4.39), описывающий взаимодействие в системе электронного газа, представленный также в необходимой форме, то гамильтониан взаимодействующего электронного газа в периодическом поле решетки имеет вид:

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kG} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G,\sigma}^+ C_{k\sigma} + \\ + \sum_{kk'} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{G \neq 0} \frac{2\pi e^2}{G^2} \left(C_{k-G,\sigma}^+ C_{k'+G,\sigma}^+ C_{k'\sigma} C_{k\sigma} - n \right). \quad (6.23)$$

Это полный гамильтониан системы, вторично проквантованный по плоским волнам. Он очень удобен в работе и мы им будем неоднократно пользоваться.

А сейчас рассмотрим, как можно решить задачу о состояниях электронного газа в периодическом поле решетки в формализме операторов вторичного квантования. Мы будем пользоваться гамильтонианом (6.22), считая, что в системе имеется один электрон и большой набор возможных электронных состояний k . Такой прием вызван тем, что нам необходимо найти зависимость одночастичной энергии от волнового вектора. Основное состояние системы задается гамильтонианом $\sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}$, возмущением служит периодический потенциал. Обозначим одночастичную волновую функцию состояния i в компактном виде числа частиц в этом состоянии:

$$|\dots n_i \dots\rangle.$$

Поскольку имеется возмущение, то истинная волновая функция Ψ не будет совпадать с одночастичной функцией, а должна быть выражена в форме линейной комбинации этих функций

$$\Psi = \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle. \quad (6.24)$$

Запишем далее уравнение Шредингера с гамильтонианом (6.22), причем,

чтобы показать, что рассматривается одночастичная задача, придадим индексу k значок «штрих» и опустим спиновый индекс σ

$$\left(\sum_{k'} \varepsilon_{k'} C_{k'}^+ C_{k'} + \sum_{k' G'} U_{G'} C_{k'+G'}^+ C_{k'} \right) \times \\ \times \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle = E \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle.$$

Умножим левую и правую часть этого уравнения на сопряженную функцию $\langle \dots n_j \dots |$:

$$\sum_i \alpha_i \sum_{k'} \varepsilon_{k'} \langle \dots n_j \dots | C_{k'}^+ C_{k'} | \dots n_i \dots \rangle + \\ + \sum_i \alpha_i \sum_{k' G'} U_{G'} \langle \dots n_j \dots | C_{k'+G'}^+ C_{k'} | \dots n_i \dots \rangle = \\ = E \sum_i \alpha_i \langle \dots n_j \dots | \dots n_i \dots \rangle.$$

Используя свойство ортогональности одночастичных волновых функций и раскрывая соответствующие матричные элементы, находим

$$\sum_i \alpha_i \varepsilon_j \delta_{ji} + \sum_i \alpha_i \sum_{G'} U_{G'} \delta_{j+G',i} = E \sum_i \alpha_i \delta_{ji},$$

или, преобразуя, можно записать так:

$$\sum_i \alpha_i (\varepsilon_j \delta_{ji} - E \delta_{ji}) + \sum_i \alpha_i \sum_{G'} U_{G'} \delta_{j+G',i} = 0,$$

однако $\alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j$, $\alpha_i \delta_{j+G',i} = \alpha_{j+G'}$, тогда

$$\alpha_j (\varepsilon_j - E) + \sum_{G'} U_{G'} \alpha_{j+G'} = 0.$$

Здесь, как и ранее, индексы нумеруют электронные состояния. Пусть состояние j определено как $(k + \mathbf{G})$, где \mathbf{G} — вектор обратной решетки:

$$\alpha_{k+\mathbf{G}} (\varepsilon_{k+\mathbf{G}} - E) + \sum_{\mathbf{G}'} U_{\mathbf{G}'} \alpha_{k+\mathbf{G}+\mathbf{G}'} = 0.$$

Сумму обратных векторов можно обозначить одним вектором

$$G + G' = G'', \quad G' = G'' - G.$$

Таким образом, последнее выражение можно переписать так:

$$\alpha_{k+G}(\varepsilon_{k+G} - E) + \sum_{G''} U_{G''-G} \alpha_{k+G''} = 0. \quad (6.25)$$

Это есть уже полученная нами ранее система уравнений (6.7) (в других обозначениях) для определения коэффициентов α_i в выражении волновой функции возмущенной системы (6.24). Следовательно, тот же результат может быть получен, используя метод операторов вторичного квантования.

Лекция 7

7.1. Приближение Кронига–Пенни

До сих пор мы не делали никаких предположений, касающихся значения периодического потенциала системы ионов $U(r)$. В действительности этот потенциал не представляет собой монотонную функцию, а имеет резкие перепады вблизи каждого узла решетки. Это значит, что у него имеются фурье-компоненты с очень малой длиной волны, это приводит к плохой сходимости рядов, составленных из фурье-образов U_G . В связи с этим приближение почти свободных электронов в чистом виде не может быть реализовано и становится пригодным благодаря введению прisma, связанного с псевдопотенциалом. Тем не менее, все качественные выводы модели почти свободных электронов носят абсолютно всеобщий характер и составляют основу всех последующих приближений. Оставляя рассмотрение указанного прisma до следующего параграфа, сделаем сейчас некоторые предположения относительно потенциала $U(r)$. Грубым приближением к реальному распределению его в одномерной решетке является предположение о наличии обрезающего потенциала U_0 , позволяющее записать потенциальную энергию электрона в поле решетки в виде:

$$U(r) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(r - na), \quad (7.1)$$

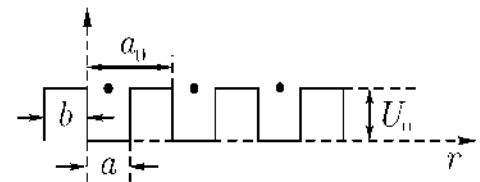


Рис. 4

здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Таким образом, потенциальную энергию электрона можно графически изобразить в форме ступенчатой кривой из одинаковых элементов-ступенек (рис. 4), a — ширина потенциальной ямы, a_0 — параметр решетки.

Запишем одномерное уравнение Шредингера для электрона, движущегося в периодическом поле, аналогичное (5.5)

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[\varepsilon - U(r)]\varphi = 0. \quad (7.2)$$

Мы уже знаем (стр. 63), что это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Решениями его, согласно теореме Блоха, являются функции (5.6):

$$\varphi = e^{ik \cdot r} u(r). \quad (7.3)$$

Эти решения полностью будут определены, если известна зависимость величины k от коэффициентов уравнения (7.2). Подставим потенциал Кронига–Пенни (7.1) в уравнение (7.2):

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\varepsilon - U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(r - na) \right] \varphi = 0. \quad (7.4)$$

Рассмотрим это уравнение в главном интервале ступенчатости, т. е. там где мы выбрали начало координат. Периодичность решетки обеспечивает нам справедливость произвольного выбора начала координат:

$$\varphi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon - U_0)\varphi_1 = 0, \quad -b \leq r \leq 0 \quad (7.5)$$

и

$$\varphi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon\varphi_2 = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (7.6)$$

Подставляем в эти уравнения функцию Блоха (7.3):

$$u_1''(r) + 2i k u_1'(r) - \left[k^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \varepsilon) \right] u_1(r) = 0$$

и

$$u_2''(r) + 2i k u_2'(r) - \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon \right] u_2(r) = 0.$$

Здесь удобно ввести обозначение:

$$\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \varepsilon) = \alpha^2, \quad (7.7)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon = \beta^2. \quad (7.8)$$

Тогда последние уравнения можно переписать так:

$$u_1''(r) + 2i k u_1'(r) - (k^2 + \alpha^2) u_1(r) = 0 \quad (7.9)$$

и

$$u_2''(r) + 2i k u_2'(r) - (k^2 - \beta^2) u_2(r) = 0. \quad (7.10)$$

Решения этих уравнений хорошо известны и равны следующим выражениям:

$$u_1(r) = A e^{(-i k + \alpha)r} + B e^{-(i k + \alpha)r} \quad (7.11)$$

и

$$u_2(r) = C e^{i(-k + \beta)r} + D e^{-i(k + \beta)r}. \quad (7.12)$$

Решения для других участков потенциальной кривой (7.1) имеют тот же вид, что и (7.11), (7.12), лишь постоянные отличаются на фазовый множитель. Постоянные A, B, C, D следует выбрать, требуя, чтобы функция $u(r)$ и ее производная $u'(r)$ были непрерывны в точках, соответствующих скачку потенциала $U(r)$, т. е. при $r = 0, r = -b (r = a)$:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_2(0), \\ u_1'(0) &= u_2'(0), \\ u_1'(-b) &= u_2'(a), \\ u_1(-b) &= u_2(a). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Периодичность решетки позволяет утверждать, что условия непрерывности (7.13) должны выполняться и во всех других точках разрыва потенциала $U(r)$. Присоединяя условия (7.13) к решениям (7.11) и (7.12), находим:

$$\begin{aligned} A + B - C - D &= 0, \\ (i k - \alpha)A + (i k + \alpha)B - i(k - \beta)C - i(k + \beta)D &= 0, \\ A e^{(i k - \alpha)b} + B e^{(i k + \alpha)b} - C e^{i(-k + \beta)a} - D e^{-i(k + \beta)a} &= 0, \\ (i k - \alpha)A e^{(i k - \alpha)b} + (i k + \alpha)B e^{(i k + \alpha)b} - \\ - i(k - \beta)C e^{i(-k + \beta)a} - i(k + \beta)D e^{-i(k + \beta)a} &= 0. \end{aligned}$$

Запишем определитель этой системы уравнений относительно произволь-

НЫХ ПОСТОЯННЫХ:

$$\begin{vmatrix} \frac{(ik - \alpha)}{e^{-(ik - \alpha)b}} & \frac{(ik + \alpha)}{e^{-(ik + \alpha)b}} & \frac{-i(k - \beta)}{e^{i(k - \beta)a}} & \frac{-i(k + \beta)}{e^{i(k + \beta)a}} \\ e^{(ik - \alpha)b} & e^{(ik + \alpha)b} & -e^{i(-k + \beta)a} & -e^{-i(k + \beta)a} \\ (ik - \alpha) & (ik + \alpha) & -i(k - \beta) & -i(k + \beta) \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разрешим его, последовательно подсчитывая определители третьего порядка, относительно волнового вектора k . Имеем, после перехода к тригонометрическим и параболическим функциям:

$$\cos(k(a + b)) = \operatorname{ch}(\alpha b) \cos(\beta a) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \operatorname{sh}(\alpha b) \sin(\beta a). \quad (7.14)$$

Это выражение дает важную связь волнового вектора k с параметрами α и β . Так как, согласно (7.7) и (7.8), имеем

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} U_0 - \beta^2, \quad (7.15)$$

то, задавая волновому вектору различные значения, можно найти зависимости $\alpha(k)$ и $\beta(k)$, или $\varepsilon(k)$.

Используя зависимость (7.14), затем можно было бы определить и сами функции $u(r)$. Однако прямое решение уравнения (7.14) не возможно вследствие его трансцендентности. Согласно Кронигу–Пенни, это уравнение может быть значительно упрощено в предельном случае малых толщин потенциальных барьеров. Пусть b стремится к нулю, с другой стороны можно потребовать, чтобы обрезающий потенциал U_0 стремился к бесконечности. С учетом этих условий и условия (7.15) уравнение (7.14) упрощается:

$$\cos(ak) = \cos(\beta a) + \frac{2m}{\hbar^2} U_0 b \frac{\sin(\beta a)}{2\beta}. \quad (7.16)$$

Мы использовали здесь:

$$\operatorname{sh}(\alpha b) \approx \alpha b, \quad \operatorname{ch}(\alpha b) \approx 1 \quad \text{при } b \rightarrow 0.$$

Введем обозначение

$$\frac{am}{\hbar^2} U_0 b = P, \quad (7.17)$$

чтобы величина P оставалась постоянной, можно потребовать постоянства $U_0 b$ при переменных U_0 и b .

С учетом введенных обозначений выражение (7.16) принимает вид:

$$\cos(ak) = \cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a}. \quad (7.18)$$

Это хорошо известное уравнение Кронига – Пенни, определяющее явную связь между собственным значением энергии ε и волновым вектором k . Величина P теперь является приведенным обрезывающим потенциалом.

Очевидно, что если правая часть уравнения (7.18) будет меньше единицы, то волновой вектор является вещественным числом и решения (7.11) и (7.12) имеют смысл, если правая часть больше единицы, то k есть мнимая величина и (7.11) и (7.12) обращаются в бесконечность. Трансцендентное уравнение (7.18) уже можно решить графически для любого значения вектора k . Для этого построим зависимость правой части уравнения от βa ; Если $\beta a = 0$, то, учитывая, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

находим

$$\cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = 1 + P.$$

С ростом βa до $+\pi$ эта функция убывает, становясь равной -1 при $\pi = \beta a$, при $\beta a > \pi$ функция продолжает убывать и, достигая минимума, затем вновь растет, принимая при $\beta a = 2\pi$ значение $+1$. Далее при $\beta a > 2\pi$ она становится больше единицы, достигает максимума и затем опять убывает и т. д. Аналогичная картина складывается, когда βa изменяется в сторону отрицательных углов. На рис. 5 приведен качественный ход рассматриваемой зависимости

$$\cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = f(\beta a).$$

Очевидно, что при $|\beta a| = 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, функция $f = +1$, при $|\beta a| = (2n + 1)\pi$ имеем $f = -1$.

Значения βa , удовлетворяющие условию (7.18), т. е. корни этого уравнения, получим, проводя прямые параллельные оси βa , и на расстоянии $\cos ka$ от нее. Меняя ka от 0 до π и проводя соответствующие прямые,

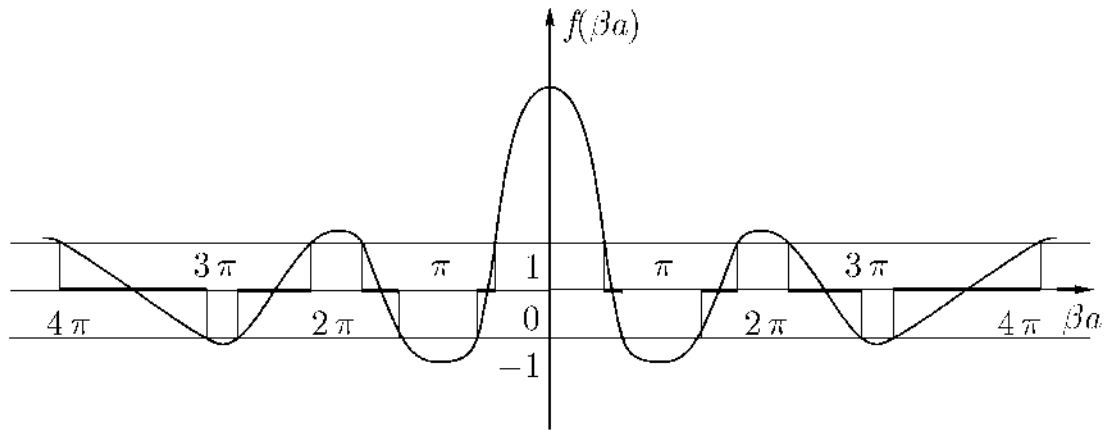


Рис. 5

параллельные оси βa , находим точки пересечения прямых с кривой, описываемой функцией f . Эти точки и есть решения трансцендентного уравнения (7.18). При этом видно, что там, где $|f| > 1$, вещественных корней нет. Это значит, что значения βa , соответствующие $|f| > 1$, а значит и энергии, не являются в этих интервалах собственными энергиями в уравнении Шредингера (7.2). Следовательно, весь интервал изменения βa , а значит и ε , является дискретным, т. е. распадается на зоны разрешенных и запрещенных энергий и значений βa . Разрешенные значения βa на рис. 5 показаны жирной чертой. С возрастанием $|\beta a|$ ширина разрешенных значений $|\beta a|$, а значит и энергий, растет за счет уменьшения запрещенных. Каждому разрешенному значению энергии соответствует два значения βa , отличающиеся знаком. Следовательно, приближение Кронига–Пенни даст нам тот же результат, что и приближение почти свободных электронов, т. е., спектр энергий электрона в периодическом поле решетки состоит из непрерывных полос, разделенных интервалами запрещенных значений энергии. Равноценность выводов обоих приближений позволяет утверждать, что распад энергетического спектра на полосы в приближении Кронига–Пенни не связан с принятыми предельными условиями. Обсуждая уравнение Кронига–Пенни, мы не делали никаких заключений о величине приведенного обрезывающего потенциала. Однако энергетический спектр электрона существенно зависит от этой величины. Предположим, что $P = 0$, тогда, согласно (7.18)

$$\cos(ka) = \cos(\beta a), \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (7.19)$$

и, следовательно, $\pm ka + 2\pi n = \beta a$. Это значит, что βa может принимать

любые значения, т. е. разрешенными являются все значения энергии то нуля до бесконечности. Такая ситуация, как мы знаем, свойственна свободным электронам, когда энергетический спектр непрерывен и отсутствуют интервалы запрещенных энергий.

Предположим другой крайний случай. т. е. $P = \infty$. Мы знаем, что если величина P растет, то, согласно рис. 5, зоны дозволённых значений βa уменьшаются и когда $P = \infty$ эти зоны вырождаются в дискретные уровни. Действительно, если внимательно изучить рис. 5, то легко увидеть, что в этом предельном случае величина βa вообще не зависит от k , а определяется соотношением

$$\beta a = n\pi, \quad \text{где} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.20)$$

или, раскрывая значение β , находим

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.21)$$

Как известно, эта формула определяет энергетические уровни электрона в изолированном атоме. Следовательно, этот случай соответствует полностью связанному электрону. Сопоставляя оба предельных случая, можно сказать, что величина обрезающего приведенного потенциала P характеризует энергию связи электрона, т. е. его свободу или локализацию.

Рассмотрим еще случай, когда величина P сравнительно велика и электроны сильно связаны. Зоны дозволённых энергий тесно примыкают к значениям βa , равным $n\pi$. Пусть ширина этих зон есть Δ , тогда разрешенные значения βa можно задать так:

$$\beta a = n\pi + \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta \approx 0. \quad (7.22)$$

Подставляем это условие сильно связанных электронов в уравнение Кронига – Пенни:

$$\cos(ak) = (-1)^n + P \frac{(-1)^n}{n\pi} \Delta. \quad (7.23)$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \cos(\beta a) &= \cos(n\pi + \Delta) = \cos(n\pi) \cos \Delta + \sin(n\pi) \sin \Delta = (-1)^n, \\ \sin(\beta a) &= \sin(n\pi + \Delta) = \sin(n\pi) \cos \Delta + \cos(n\pi) \sin \Delta = (-1)^n \Delta, \\ \beta a &= n\pi + \Delta \simeq n\pi. \end{aligned}$$

Разрешаем уравнение (7.23) относительно ширины разрешенной зоны:

$$\Delta \simeq \frac{n\pi}{P} [(-1)^n \cos(ka) - 1].$$

Отсюда, используя (7.22), находим

$$\beta a = n\pi + \Delta = n\pi \left\{ 1 + \frac{1}{P} [(-1)^n \cos(ka) - 1] \right\} \quad (7.24)$$

Раскрывая величину β , согласно (7.8), находим в явной форме энергетический спектр сильно связанных электронов:

$$\left[\frac{2ma^2}{\hbar^2} \varepsilon_n \right]^{\frac{1}{2}} = n\pi \left\{ 1 - \frac{1}{P} + \frac{1}{P} (-1)^n \cos(ka) \right\},$$

или

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2} \left[1 - \frac{1}{P} + \frac{1}{P} (-1)^n \cos(ka) \right]^2, \quad (7.25)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из этой формулы очень наглядно видны особенности энергетического спектра сильно связанных электронов.

Потребуем, далее, чтобы рассматриваемая кристаллическая цепочка удовлетворяла циклическим условиям Борна–Кармана, т. е. перейдем от безграничного к ограниченному кристаллу. Мы знаем, что в этом случае волновой вектор меняется не непрерывным, а дискретным образом согласно формуле (5.30)

$$k = \frac{2\pi z}{Na}, \quad (7.26)$$

где z — целое число, изменяющееся, согласно (5.31), в интервале

$$-\frac{N}{2} < z < \frac{N}{2}. \quad (7.27)$$

Каждому значению z из этого интервала будет соответствовать два решения, т. е. когда $\beta > 0$ и когда $\beta < 0$. Однако на каждое значение волнового вектора k приходится строго один энергетический уровень в каждой энергетической зоне. Следовательно, можно повторить и здесь уже известное нам положение (стр. 71), что каждая энергетическая полоса содержит столько

энергетических уровней, сколько элементарных ячеек содержит кристалл. Сделаем здесь еще один важный вывод, заключающийся в том, что каждое электронное состояние в кристалле необходимо нумеровать двумя квантовыми числами: волновым вектором k или, что все равно, квантовым числом z , и номером энергетической зоны n . Например, $\varphi_{kn}(r)$. Причем волновой вектор мы рассматриваем в схеме приведенных зон, т. е. в первой зоне Бриллюэна.

На модели Кронига – Пенни можно очень наглядно проследить, как квантовые числа приближения свободных электронов ($P = 0$) переходят в квантовые числа, описывающие вырожденные энергетические состояния электронов в изолированных атомах.

Рассмотрим под каким углом кривая зависимости энергии от волнового вектора внутри каждой зоны перескачет ее границу. Имеем уравнение Кронига – Пенни:

$$f(\beta a) = \cos(ka).$$

Дифференцируем его по βa , т. е. по энергии:

$$\frac{df}{d\beta a} = -\sin(ka) \frac{dk}{d\beta}.$$

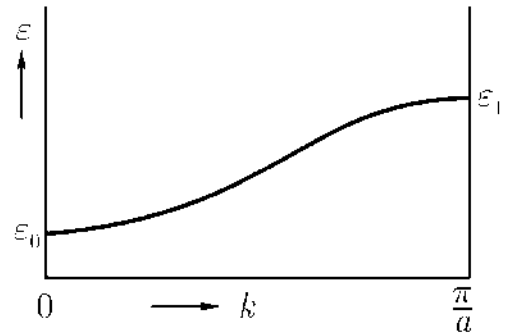


Рис. 6

На каждой границе зоны, как видно из рис. 5, $ka = n\pi$, отсюда $\sin ka = 0$. Поскольку $\frac{df}{d\beta a} \neq 0$, то необходимо, чтобы $\frac{d\beta}{dk} = 0$. Имеем:

$$\frac{d\beta}{dk} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varepsilon}{dk} = 0, \quad \text{так как } \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \neq 0, \quad \text{то} \quad (7.28)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = 0, \quad \text{при } k = n\frac{\pi}{a}.$$

Это значит, что дисперсионная кривая перескачет границу зоны под прямым углом, что также весьма важно и носит совершенно общий характер. На рис. 6 приводится качественно дисперсионная зависимость $\varepsilon(k)$ при $n = 1$, т. е. для первой зоны Бриллюэна. При $k = \frac{\pi}{a}$ имеем $\frac{d\varepsilon}{dk} = 0$. Основной особенностью приближения Кронига – Пенни является то обстоятельство, что оно позволяет на основе одной схемы рассмотреть различные случаи

одноэлектронных приближений, различающиеся энергией связи электрона. Все выводы этого приближения носят всеобщий характер, утверждающий зонную структуру энергетического спектра электрона в периодическом поле решетки. В дальнейшем мы еще вернемся к приближению Кронига – Пенни в связи с изучением локальных электронных состояний в металлах.

Лекция 8

8.1. Методы расчета энергетической зонной структуры

Рассмотренные ранее приближения позволили выяснить основную особенность энергетического спектра электронов в металлах — его зонную структуру. Мы условились в связи с этим каждому электронному состоянию сопоставлять два квантовых числа: волновой вектор k в первой зоне Бриллюэна и номер энергетической зоны n . Нам известно, что в каждой зоне имеется определенное число состояний, равное числу значений волнового вектора в первой зоне Бриллюэна, т. е. числу элементарных ячеек в кристалле. Каждое состояние может быть заполнено, согласно принципу Паули, двумя электронами с противоположными спинами. Нам необходимо знать, в какой последовательности располагаются энергетические зоны, каков закон дисперсии внутри каждой зоны, какова ширина разрешенной и запрещенной зоны энергии, какова плотность состояний в области энергий, подверженных тепловому возбуждению и т. д.

Расчеты зонной энергетической структуры металлов, призванные ответить на эти вопросы, образуют область весьма тонких вычислительных методов, которые в настоящее время хорошо освоены. На саму зонную структуру большое влияние оказывает симметрия зон Бриллюэна и ячейки кристаллической решетки, поэтому для расчетов таких структур характерно использование теории групп. Она позволяет заметно упростить, а иногда и уточнить расчеты, так как в точках высокой симметрии исходные одноэлектронные уравнения Шредингера значительно упрощаются.

Число методов, использующихся при расчетах структуры энергетических зон, достаточно велико. Однако, мы рассмотрим только наиболее важные из них, применяемые при расчетах зон в металлах. Наше рассмотрение будет сводиться к решению одноэлектронного уравнения Шредингера, считая, что эффективный кристаллический потенциал (стр. 61) известен.

Общей особенностью почти всех используемых методов расчета является то обстоятельство, что они строятся на одноэлектронной основе и то, что искомая функция ищется в форме разложения в ряд по какой-нибудь полной системе известных функций, чаще всего по плоским волнам, либо по системе произведений радиальных функций на сферические гармоники. Удобство такого подхода заключается в возможности выбрать систему простых функций так, чтобы удовлетворялись некоторые условия, накладываемые на искомую функцию. Поскольку таким способом мы можем удовлетворить лишь части необходимых требований, то выполнение остальных условий можно потребовать, выбирая должным образом коэффициенты разложения.

Исключением из общей схемы построения методов расчета зонной структуры является своеобразный по построению метод ячеек, который известен еще как метод Вигнера – Зейтца.

8.1.1. Метод Вигнера – Зейтца (метод ячеек)

Если выбрать в качестве элементарной ячейки прямого пространства ячейку Вигнера–Зейтца, то для плотноупакованных металлов граница элементарной ячейки является поверхностью с высокой степенью симметрии и потому очень хорошо аппроксимирующуюся сферой того же объема $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, где R_0 — радиус сферы. Каждая сфера содержит один узел решетки и является примитивной элементарной ячейкой. В центре такой ячейки расположен ионный остов, размеры которого обычно малы в сравнении с радиусом сферы. Так, для натрия $R_0 = 1.85 \text{ \AA}$, а радиус иона $R_{\text{и}} = 0.95 \text{ \AA}$. Потенциал иона распространяется не на всю ячейку и обычно охватывает лишь часть ее объема. В таких условиях можно считать, что ионный потенциал заключен внутри каждой сферы и обладает сферической симметрией. Важно еще раз подчеркнуть это обстоятельство, отметив, что если электрон попал в область какой-нибудь сферы, то на него будет действовать потенциал, создаваемый ионом и другими валентными электронами, находящимися только в этой сфере.

Обычно рассматриваемый метод используют для определения волновой функции и собственного значения энергии на дне зоны проводимости, т. е. для состояний электронов с $k = 0$. Такое ограничение связано с наиболее просто реализуемыми граничными условиями на поверхности ячейки. Рассмотрим волновую функцию $\varphi_{kn}(\mathbf{r})$. Она, согласно теореме Блоха,

должна удовлетворять граничным условиям периодичности:

$$\varphi_{kn}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\varphi_{kn}(\mathbf{r}).$$

Для состояний с $\mathbf{k} = 0$ имеем

$$\varphi_{kn}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \varphi_{kn}(\mathbf{r}), \quad (8.1)$$

здесь \mathbf{R} — вектор трансляции, n — номер валентной зоны в общем числе зон. Это значит, что волновая функция должна быть непрерывной функцией без сингулярности и периодически переходить из одной ячейки в другую. Тогда аналогичной непрерывностью обладает и первая производная от этой функции. Непрерывность производной требует обращения ее в нуль на границе ячейки:

$$\left. \frac{\partial \varphi_{kn}(r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0. \quad (8.2)$$

Поскольку, как было установлено, потенциал ионного остова внутри сферы сферически симметричен, то выбрав его, согласно Вигнеру–Зейтцу, в форме потенциала $U(r)$ внутри свободного атома, нужно решить радиальное уравнение Шредингера, присоединяя к решению граничное условие (8.2). В результате решения мы получим волновую функцию и энергию электрона, соответствующую дну зоны проводимости $[\varepsilon(0)]$. Итак, наша задача состоит, следуя Вигнеру–Зейтцу, в вычислении зависимости энергии электрона, находящегося внутри сферы, от радиуса сферы R_0 . Как уже было сказано, потенциальная энергия этого электрона определяется только сферическим потенциалом самого иона, а всеми возможными эффектами обмена и корреляции можно пренебречь. Таким образом, необходимо интегрировать радиальное уравнение Шредингера с радиальной функцией R_l .

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[\varepsilon - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (8.3)$$

и граничным условием (8.2). Здесь $U(r)$ — сферически симметричный потенциал иона. Поскольку волновая функция обладает периодичностью решетки, повторяется при переходе из одной сферы в другую, то нам необходимо иметь решение только для одной сферы. Зависимость полной энергии кристалла от радиуса сферы R_0 тогда можно найти, умножая соответствующую одноэлектронную зависимость на число атомов в кристалле. Отметим

еще, что при решении уравнения Шредингера мы не должны отбрасывать решения, не стремящиеся к нулю при возрастании радиуса r , как это делается для случая изолированного атома, поскольку нас будут интересовать значения радиуса r вблизи поверхности сферы R_0 .

Приведенный расчет относится к состояниям электронов с $k = 0$, т. е. касается основного состояния в зоне проводимости. Вполне понятно, что значительно сложнее рассчитать энергии состояний с $k \neq 0$. Простейшим приемом, позволяющим в рамках рассматриваемого метода, получить первое приближение для энергии возбужденного состояния является допущение, что волновую функцию можно выбрать в виде:

$$\varphi_k(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}). \quad (8.4)$$

Эта запись напоминает запись функции Блоха, однако, здесь функция $\varphi_0(\mathbf{r})$ считается не зависящей от волнового вектора \mathbf{k} . Тем не менее, она является лучшим, чем плоская волна, приближением к правильной волновой функции. Подставим ее в уравнение Шредингера:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r) \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}).$$

Преобразуем:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0(\mathbf{r}) - 2i\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}) + U(r)\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_k\varphi_0(\mathbf{r}),$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}) + 2i\mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r})\right\} + U(r)\varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_k\varphi_0(\mathbf{r}). \quad (8.5)$$

Отсюда уже можно получить выражение для расчета энергии возбужденного электронного состояния, считая, что функция $\varphi_0(r)$ нормирована к единице в объеме сферы Вигнера – Зейтца. Используя обычный рецепт определения энергии, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_k = & \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0^*(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r})d^3r - \frac{\hbar^2}{2m}\int \varphi_0^*(\mathbf{r})\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r})d^3r - \\ & - \frac{\hbar^2}{2m}2i\int \mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r})\varphi_0^*(\mathbf{r})d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r})d^3r, \end{aligned} \quad (8.6)$$

или

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8.7)$$

Интегрирование здесь выполняется по всему объему сферы Вигнера–Зейтца. Интеграл

$$\int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r = 0$$

в силу симметрии распределения заряда в ячейке. Анализируя выражение для энергии (8.7), видим, что первый член представляет собой энергию Ферми, а второй и третий — энергию Вигнера–Зейтца. Перепишем выражение (8.7) в более удобной форме:

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon(0), \quad (8.8)$$

где

$$\varepsilon(0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8.9)$$

В принципе в выражение для $\varepsilon(0)$ можно было бы еще ввести поправки на корреляцию и обмен электронов, однако, вычисления потребовали бы дальнейших упрощений и потому мы их здесь упускаем.

Выражение для энергии (8.8) показывает, что энергия возбужденных состояний $k \neq 0$ может быть подсчитана как сумма энергий свободного электронного газа и энергии основного состояния в форме энергии Вигнера–Зейтца. В такой записи (8.8) закон дисперсии уже напоминает энергетическую зону.

Итак, определив функцию $\varphi_0(\mathbf{r})$, характеризующую распределение заряда внутри сферы Вигнера–Зейтца, можно затем построить и всю энергетическую зону, пользуясь выражением (8.8).

Можно рассчитать важную для оценки сил связи среднюю энергию, приходящуюся на один электрон, используя (8.8). Для этого необходимо, как это мы делали ранее, усреднить величину k^2 по сфере Ферми (3.19):

$$\overline{k^2} = \frac{3}{5} k_{\Phi}^2 = \frac{3}{5} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}, \quad (8.10)$$

здесь \bar{n} — концентрация электронов проводимости. Учитывая (8.8), можно записать выражение энергии, приходящейся на один электрон проводимости в приближении Вигнера–Зейтца:

$$\bar{E}_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{\frac{2}{3}}. \quad (8.11)$$

В заключение отметим, что последовательное использование общего метода ячеек потребовало бы учета в выражении кристаллического потенциала добавочных членов: 1. Потенциала электростатического взаимодействия ячеек, 2. Потенциалов взаимодействия данного электрона с электронами, находящимися в данной ячейке и распределенных в других ячейках. Этот учет связан с очень громоздкими выкладками и мы его не будем здесь затрагивать, а непосредственно используем вычисленную ранее (4.17) обменную энергию.

8.2. Силы сцепления в металлах

Рассмотренный метод расчета электронных состояний в металле был построен на ряде допущений, касающихся вида волновой функции и вида кристаллического потенциала. Особенностью этих допущений, сделавших задачу разрешимой, является то обстоятельство, что здесь совершенно игнорируется структура металла и результат расчета зависит только от объема сферы Вигнера–Зейтца. Тем не менее, применение этого простого метода к определению дна зоны проводимости одновалентного металла, а, следовательно, и энергии связи дало результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. Под энергией сцепления металлов обычно понимают разность между средней энергией валентных электронов и энергией валентных электронов в изолированных атомах, находящихся в основном состоянии. Последнюю энергию можно получить из спектроскопических данных. Обычно главный интерес в проблеме сцепления металлов представляет собой определение зависимости энергии сцепления от радиуса R_0 . Ценность метода Вигнера–Зейтца и заключается в том, что он позволяет явно найти эту зависимость, хотя и численными методами. Минимум на кривой этой зависимости отвечает энергии связи, а соответствующий этому минимуму параметр решетки является равновесным. Кривизна кривой, как мы увидим, характеризует сжимаемость металлов. Если найти эту зависимость для де-

формированного металла, то можно определить и упругие характеристики среды.

В соответствии с определением энергия сцепления в металлах представляется выражением:

$$E_{\text{сц}} = \bar{E}_{\text{вз}} + \bar{E}_{\text{об}} - E_a - \bar{E}_I, \quad (8.12)$$

здесь:

$\bar{E}_{\text{об}}$ — средняя на электрон обменная энергия,

\bar{E}_I — средняя энергия корреляции на электрон,

$E_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{2/3}$ — энергия Вигнера–Зейтца,

E_a — энергия низшего состояния валентного электрона в изолированном атоме.

Согласно виду волновой функции $\varphi_k(\mathbf{r})$, вычисленной Вигнером–Зейтцем, она в большей части характеристической сферы представляет собой плоскую волну. Это позволяет рассматривать обменные и корреляционные эффекты в предположении приближения свободных электронов. В связи с этим мы воспользуемся ранее полученными численными результатами этих поправок. Более точное определение корреляционных поправок может быть сделано на основе многоэлектронной модели взаимодействующего электронного газа. Отметим еще одну трудность, возникающую при расчете энергии сцепления металлов — это поляризация ионного остова. Она является следствием корреляции между валентными электронами и электронами подвалентных уровней. Кроме того, флуктуирующий дипольный момент ионного остова должен экранироваться компенсирующей деформацией плотности валентных электронов, поэтому радиус поляризованного потенциала сравнительно невелик, меньше радиуса R_0 . Однако, роль поляризационных эффектов в величине энергии сцепления металлов еще плохо изучена и является проблемой, как и в целом весь вопрос.

Приведем некоторые численные результаты расчетов сил сцепления в кристалле натрия. Итак, имеем:

$$\bar{E}_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{2/3} = (-0.611 + 0.144) \frac{R_g}{\text{эл}} = -0.467 \frac{R_g}{\text{эл}},$$

$$E_a = -0.378 \frac{R_g}{\text{эл}},$$

$$E_{\text{сц}} = \bar{E}_{\text{вз}} - E_a = -0.089 \frac{R_g}{\text{эл}} \simeq -27.2 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}},$$

ГЛАВА VII

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Квазистационарные явления в линейных проводниках

Если период колебаний электромагнитного поля значительно превышает время распространения поля через систему:

$$T \gg \frac{l}{c}, \quad \omega \ll \frac{c}{l}, \quad (\text{VII.1})$$

где c — скорость света, l — линейный размер системы, то можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений внутри системы. Такое приближение называется квазистационарным¹.

Ток в замкнутой цепи с э. д. с. $\mathcal{E}(t)$, емкостью C , индуктивностью L и сопротивлением R удовлетворяет в квазистационарном приближении дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{I} = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{1}{c^2}L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t),$$

где q — заряд на обкладке конденсатора.

При гармонической зависимости э. д. с. от времени ($\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$) и установившемся режиме ток пропорционален э. д. с.:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \quad Z = R + i \left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2} \right). \quad (\text{VII.2})$$

Величина Z называется комплексным сопротивлением (импедансом) цепи.

Собственная частота ω_0 колебаний в контуре, состоящем из емкости C и самоиндукции L , дается формулой Томсона

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (\text{VII.3})$$

¹ Иногда квазистационарное приближение дает хорошие результаты и при нарушении условия (VII.1), например, в теории длинных линии. Подробнее об этом см. [101] § 107.

Для разветвленной цепи дифференциальные уравнения, определяющие токи в отдельных участках, могут быть составлены на основе законов Кирхгофа.

Если э. д. с. в линейном контуре наводится в результате электромагнитной индукции, она может быть вычислена с помощью закона Фарадея:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{VII.4})$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции через контур. Величина Φ может изменяться как вследствие изменения магнитного поля, так и в результате движения или деформации контура. Если имеется несколько индуктивно связанных контуров, то полный поток магнитной индукции через i -й контур Φ_i выражается формулой

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} \mathcal{I}_k. \quad (\text{VII.5})$$

Здесь \mathcal{I}_k — ток в k -м контуре, L_{ik} — при $i \neq k$ — коэффициент взаимной индукции между i -м и k -м контурами, $L_{ii} \equiv L_i$ — коэффициент самоиндукции i -го контура. (Определение коэффициентов индуктивности приведено в начале гл. V.)

Обобщенную силу, действующую на проводник с током в квазистационарном поле, можно вычислить по формуле

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{\mathcal{I}}, \quad (\text{VII.6})$$

в которой W обозначает магнитную энергию системы, q_i — обобщенную координату и производная берется при фиксированных значениях токов в проводниках. Магнитная энергия выражается через токи и коэффициенты индуктивности по тем же формулам, что и в статическом случае (см. формулы (V.17), (V.20)).

При усреднении по времени произведений величин, меняющихся по гармоническому закону

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t},$$

можно пользоваться формулами

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} |a|^2, \quad \overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(ab^*). \quad (\text{VII.7})$$

Например, среднее тепловыделение в контуре можно вычислить по формулам

$$Q = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{E} \mathcal{I}^*) = \frac{1}{2} |\mathcal{I}|^2 \text{Re} Z. \quad (\text{VII.8})$$

350. Круглая проволочная петля радиуса a , находящаяся в постоянном магнитном поле H_0 , вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного H_0 . Найти силу тока в петле $\mathcal{I}(t)$, тормозящий момент $N(t)$ и среднюю мощность \bar{P} , которая требуется для поддержания вращения.

351. Плоский контур с электрическими параметрами R, L, C и площадью S вращается с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле H_0 вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной H_0 . Определить средний тормозящий момент \bar{N} , приложенный к контуру.

352. В одном из двух индуктивно связанных контуров течет ток $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Индуктивности и сопротивления контуров заданы. Выразить среднюю обобщенную силу взаимодействия контуров через производную от коэффициента взаимной индукции по обобщенной координате q_i .

353. В один из двух одинаковых контуров, имеющих сопротивление R и индуктивности L , включена э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$. Коэффициент взаимной индукции контуров L_{12} . Определить среднюю силу \bar{F} взаимодействия контуров. Результат выразить через производную от коэффициента взаимной индукции по соответствующей координате.

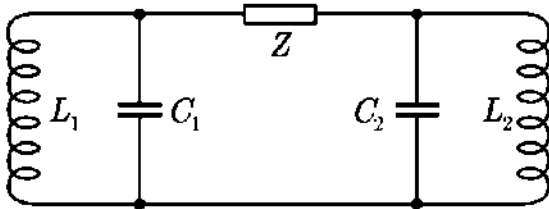


Рис. 17

354. Определить собственные частоты ω_1, ω_2 электрических колебаний в двух контурах (рис. 17), связь между которыми осуществляется через емкость C ($Z = \frac{i}{\omega C}$).

УКАЗАНИЕ. Составить систему алгебраических уравнений для определения токов и приравнять нулю определитель системы.

355. Решить предыдущую задачу для случая, когда связь между контурами осуществляется через индуктивность (см. рис. 17, $Z = -i\omega L/c^2$).

356. Найти собственные частоты колебаний $\omega_{1,2}$ в двух индуктивно связанных контурах с емкостями C_1, C_2 , индуктивностями L_1, L_2 и коэффициентом взаимной индукции L_{12} .

357. Два контура связаны друг с другом через активное сопротивление (см. рис. 17, $Z = R$). Найти собственные частоты колебаний, считая связь слабой (R велико).

358. В контур с индуктивностью L_1 , емкостью C_1 и сопротивлением R_1 включена сторонняя э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$. С этим контуром индуктивно связан второй контур, параметры которого L_2, C_2, R_2 , коэффициент взаимной индукции L_{12} . Определить токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 в обоих контурах. Рассмотреть, в частности, случай, когда второй контур содержит только индуктивность ($R_2 = 0, C_2 = \infty$); определить частоту ω , при которой ток \mathcal{I}_1 максимален.

359. Найти комплексное сопротивление Z участка цепи (двухполюсника), изображенного на рис. 18.

360. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$ (ионизованный газ, см. задачу 312*). Емкость незаполненного конденсатора C_0 . Доказать, что комплексное сопротивление участка цепи, содержащего такой конденсатор, равно сопротивлению двухполюсника, изображенного на рис. 18, если параметры его подобраны соответствующим образом. Определить R, L, C .

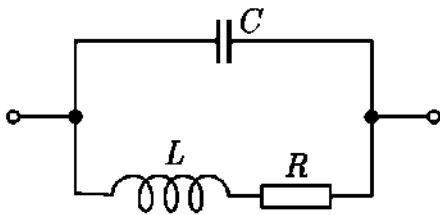


Рис. 18

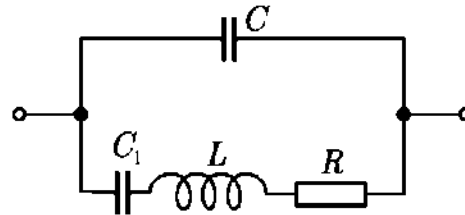


Рис. 19

361. Определить средний запас энергии \overline{W} и тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, описанном в предыдущей задаче. Выразить эти величины через напряжение на обкладках конденсатора $U = U_0 e^{-i\omega t}$.

362. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}$ (диэлектрик с потерями, см. (VI.12)). Емкость конденсатора при отсутствии диэлектрика C_0 . Какими параметрами C, C_1, L, R должен обладать двухполюсник, изображенный на рис. 19, чтобы его сопротивление переменному току было таким же, как сопротивление конденсатора?

363. Определить средний запас энергии \overline{W} и средние тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, рассмотренном в задаче 362. Напряжение на обкладках $U_0 e^{-i\omega t}$.

364. Колебательный контур состоит из емкости C и индуктивности L . В некоторый момент времени к обкладкам конденсатора присоединяется батарея с постоянной э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R . Найти зависимость тока, текущего через индуктивность, от времени. Исследовать зависимость этого тока от величин R, L, C .

365. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C , прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leq t \leq T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на сопротивлении R .

366. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leq t \leq T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на индуктивности L .

367. Цепь состоит из плоского конденсатора с емкостью C и сопротивления R (рис. 20). Между пластинами конденсатора (расстояние h) требуется создать поле, которое линейно возрастает от 0 до E_0 за время T , а затем за такое же время линейно уменьшается до нуля. Определить форму импульса, который нужно при этом подать на вход цепи.

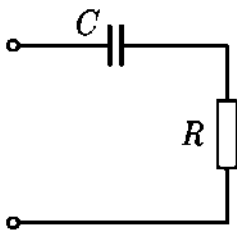


Рис. 20

368. В цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , включается в момент времени $t = 0$ э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Определить силу тока в цепи $\mathcal{I}(t)$. При каком значении фазы φ_0 переходные явления в цепи не возникнут?

369*. Электрическая цепь (искусственная длинная линия) состоит из N одинаковых звеньев ($N \gg 1$) и разомкнута на концах (рис. 21). Найти частоты собственных колебаний этой системы.

370. Считая полное число собственных частот в искусственной длинной линии (см. задачу 369*) большим, найти число Δr колебаний, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$.

371*. Искусственная длинная линия, состоящая из $2N$ чередующихся звеньев с параметрами L_1, C и L_2, C , разомкнута на концах (рис. 22). Исследовать спектр собственных колебаний такой системы.

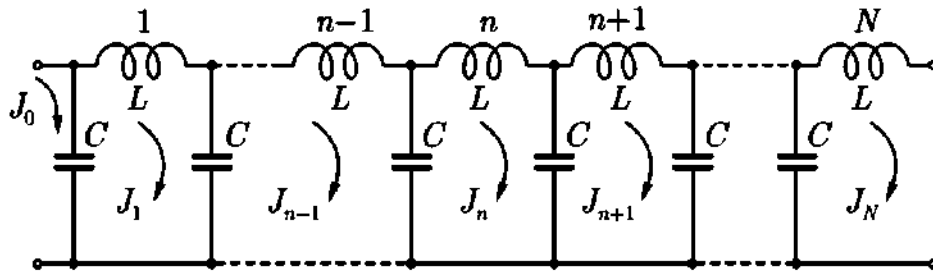


Рис. 21

372*. Искусственная длинная линия (рис. 23) состоит из N одинаковых звеньев, содержащих импедансы

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

К линии приложено напряжение U_1 , конец линии разомкнут. Найти напряжение U_2 между точками a , b .

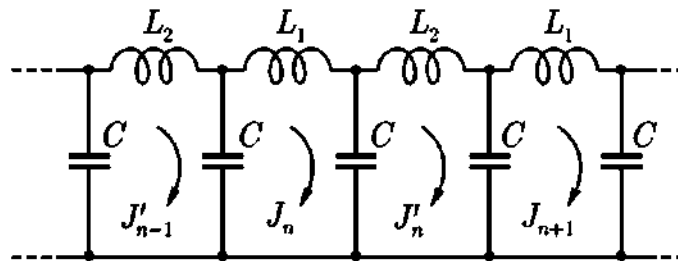


Рис. 22

УКАЗАНИЕ. Искать решение разностного уравнения для тока \mathcal{I}_n в n -м звене цепи в форме $\mathcal{I}_n = \text{const} \cdot q^n$.

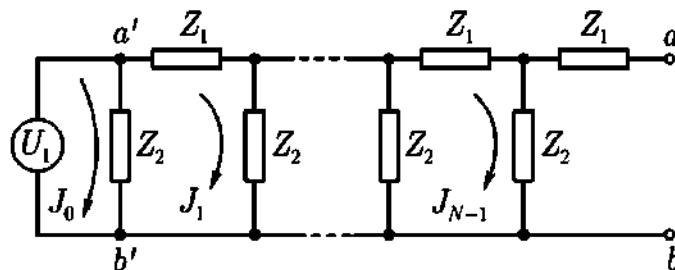


Рис. 23

373. Основываясь на результатах предыдущей задачи и считая $N \gg 1$, исследовать зависимость коэффициента передачи $K = U_2/U_1$ от частоты. Найти интервал частот, для которых K заметно отличен от нуля.

374. Из рассмотрения искусственной длинной линии с сосредоточенными параметрами (задача 369*) получить путем предельного перехода дифференциальное уравнение для тока в длинной линии с равномерно распределенными параметрами.

375. Идеальная длинная линия с распределенными параметрами длиной l разомкнута на концах. Определить спектр собственных колебаний такой системы, сравнить его со спектром цепочки с сосредоточенными параметрами (см. задачу 369*).

376*. Э. д. с., включенная в замкнутый контур, вызывает в нем ток $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Найти общее выражение для комплексного сопротивления контура, не пренебрегая запаздыванием внутри системы.

377. Для контура, имеющего форму окружности радиуса a , найти поправку к индуктивности и сопротивление $R_r(\omega)$ в первом исчезающем приближении (см. предыдущую задачу). Показать, что $R_r(\omega)$ представляет коэффициент пропорциональности между средней величиной энергии, излучаемой в единицу времени, и среднеквадратичным значением силы тока в контуре.

§ 2. Вихревые токи и скин-эффект

Если проводник находится во внешнем магнитном поле, удовлетворяющем условию квазистационарности (VII.1), то вблизи проводника поле удовлетворяет в каждый момент времени уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{VII.9})$$

и уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{VII.10})$$

Внутри проводника при достаточно большой проводимости σ ($\sigma/\omega \gg \epsilon'$, где ϵ' — вещественная часть диэлектрической проницаемости) поле описывается уравнениями (VII.10) и

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{VII.11})$$

Из (VII.10) и (VII.11) можно получить уравнения второго порядка для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , имеющие в случае однородной среды вид

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{VII.12})$$

На границах раздела двух проводников или проводника и диэлектрика векторы поля должны удовлетворять условиям:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (\text{VII.13})$$

Величина $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ (толщина скин-слоя) характеризует глубину проникновения поля в проводник (ω — частота поля). При сильном скин-эффекте в некотором приближении можно считать, что поле проникает в проводник на нулевую глубину; тогда внутри проводника $\mathbf{H} = 0$, а вне проводника, у его поверхности, поле связано с плотностью поверхностного тока \mathbf{i} соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{n}. \quad (\text{VII.14})$$

Вследствие возникновения вихревых токов проводник, помещенный в магнитное поле, приобретает магнитный момент, даже если у него $\mu = 1$. Для характеристики этого магнитного момента удобно ввести тензор магнитной поляризуемости тела β_{ik} по формуле

$$m_i = \beta_{ik} H_{0k}, \quad (\text{VII.15})$$

где m — магнитный момент тела, \mathbf{H}_0 — периодическое внешнее магнитное поле. Тензор β_{ik} симметричен ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$), а его компоненты в общем случае комплексны и зависят от частоты.

Среднее (по времени) тепловыделение внутри проводника может быть подсчитано по одной из следующих формул:

$$Q = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV = \int \sigma \overline{E^2} dV \quad (\text{VII.16})$$

или

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{VII.17})$$

В первой из этих формул интеграл берется по объему проводника, во второй — по его поверхности. Q выражается также через мнимую часть тензора магнитной поляризуемости тела ($\beta_{ik} = \beta'_{ik} + i\beta''_{ik}$):

$$Q = \frac{\omega}{2} \beta''_{ik} \text{Re}(H_{0i} H_{0k}^*). \quad (\text{VII.18})$$

Последняя формула справедлива только при гармонической зависимости поля от времени.

378. Широкая плита с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ , ограниченная плоскостями $x = \pm h$, обмотана проводом, по которому протекает ток $\mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Провод тонкий, число витков на единицу длины n , витки намотаны параллельно друг другу. Пренебрегая краевым эффектом, определить вещественную амплитуду магнитного поля внутри плиты. Исследовать предельные случаи слабого ($\delta \gg h$) и сильного ($\delta \ll h$) скин-эффекта.

379*. Металлический цилиндр бесконечной длины с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ расположен так, что его ось совпадает с осью бесконечного соленоида кругового сечения, по которому течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Найти напряженность магнитного и электрического поля во всем пространстве, а также распределение плотности тока j в цилиндре; радиус цилиндра a , радиус соленоида b , число витков на единицу длины n .

380. Проводящий цилиндр находится в однородном переменном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 e^{-i\omega t}$, параллельном его оси. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать распределение тока j внутри цилиндра в предельных случаях малых и больших частот.

381. Подсчитать количество тепла Q , выделяющегося за единицу времени на единице длины цилиндра, рассмотренного в задаче 379*. Исследовать предельные случаи малых и больших частот.

382. Найти магнитную поляризуемость β (на единицу длины) цилиндра, находящегося в переменном магнитном поле, параллельном его оси. Частота поля ω , радиус цилиндра a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Рассмотреть предельные случаи больших и малых частот.

383*. Металлический цилиндр находится во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 e^{-i\omega t}$, перпендикулярном его оси. Радиус цилиндра a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Найти результирующее поле и плотность тока j в цилиндре.

УКАЗАНИЕ. Выразить \mathbf{E} и \mathbf{H} через векторный потенциал \mathbf{A} и проинтегрировать дифференциальное уравнение для \mathbf{A} .

384. Найти диссипацию энергии на единицу длины бесконечного проводящего кругового цилиндра, помещенного в поперечное относительно оси цилиндра магнитное поле, меняющееся с частотой ω .

385*. Бесконечный круговой цилиндр радиуса a с проводимостью σ находится в поперечном относительно его оси магнитном поле, поляризованном по кругу:

$$\mathbf{H}_0(t) = (\mathbf{H}_{01} + i\mathbf{H}_{02})e^{-i\omega t},$$

где \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{02} — взаимно перпендикулярные векторы с одинаковыми длинами: $H_{01} = H_{02} = H_0$. (Вектор $\mathbf{H}_0(t)$ описывает окружность постоянного радиуса H_0 в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.) Найти средний вращательный момент \bar{N} , приложенный к единице длины цилиндра ($\mu = 1$).

386. Бесконечный цилиндр, находящийся в постоянном и однородном поперечном магнитном поле \mathbf{H}_0 , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти тормозящий момент \bar{N} , приложенный к единице длины цилиндра.

387*. Бесконечный металлический цилиндр радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ находится в постоянном и однородном, продольном относительно его оси, магнитном поле H_0 . В некоторый момент времени внешнее поле выключается и поддерживается затем равным нулю. Найти ход затухания со временем магнитного поля в цилиндре.

388. Металлический шар радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ , помещен в однородное переменное магнитное поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом исчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность Q .

389. Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω . Найти результирующее поле \mathbf{H} и среднюю поглощаемую шаром мощность Q при больших частотах. Радиус шара a , магнитная проницаемость μ , проводимость σ .

УКАЗАНИЕ. При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю (т. е. пренебречь глубиной проникновения δ по сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара считать его поверхность плоской.

390*. Проводящий эллипсоид находится в однородном переменном магнитном поле. Определить магнитную поляризуемость эллипсоида при сильном скин-эффекте (т. е. считая, что глубина проникновения поля в проводник равна нулю). Рассмотреть предельные случаи тонкого круглого диска и длинного тонкого стержня.

391*. Шар радиуса a с проводимостью σ находится в однородном магнитном поле $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти результирующее магнитное поле и распределение вихревых токов в шаре для общего случая произвольных частот. Убедиться, что в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта получаются результаты, найденные в задачах 388 и 389 (считать для простоты $\mu = 1$).

392. Найти среднюю мощность Q , поглощаемую проводящим шаром в однородном переменном магнитном поле при произвольных частотах.

393. Найти активное сопротивление R тонкого цилиндрического проводника при скин-эффекте. Длина проводника l , радиус a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Исследовать предельные случаи малых и больших частот.

394. На поверхность цилиндрического проводника, у которого радиус a , удельная проводимость σ_1 , нанесен слой другого металла. Толщина слоя h , его проводимость σ_2 , причем $h \ll a$. Найти активное сопротивление R такого проводника переменному току, считая толщину скин-слоя малой по сравнению с a ($\mu = 1$).

395. Бесконечный полый цилиндр, у которого внутренний радиус a , толщина стенки h ($h \ll a$) находится в однородном продольном магнитном поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти амплитуду H' магнитного поля в полости. Исследовать ее зависимость от ω .

УКАЗАНИЕ. В силу условия $h \ll a$ при определении поля в толще оболочки можно считать ее плоской.

396. Переменный ток $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$ течет по пологому цилиндрическому проводнику, у которого средний радиус a , проводимость σ , магнитная проницаемость μ , толщина $h \ll a$. Найти распределение тока j по сечению и активное сопротивление R на единицу длины. Указать условие, при выполнении которого сопротивление полого проводника будет мало отличаться от сопротивления сплошного проводника такого же радиуса.

УКАЗАНИЕ. Пренебречь кривизной поверхности проводника.

397*. Внутри металлической трубы на расстоянии l от ее осевой линии течет прямолинейный ток \mathcal{I} . Радиус трубы a , толщина стенки $h \ll a$, проводимость стенки σ ($\mu = 1$). Как ток \mathcal{I} , так и расстояние l зависят от времени по произвольному закону, но так, что во все моменты времени $l \ll a$. Считая выполненными условия квази-стационарности, определить силу f на единицу длины, действующую на ток \mathcal{I} со стороны вихревых токов, индуцируемых в цилиндрической оболочке, при слабом скин-эффекте ($h \ll \delta$).

398*. Решить предыдущую задачу для случая сильного скин-эффекта ($h \gg \delta$).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Тамм И. Е. [101], Френкель Я. И. [112], Власов А. А. [25], Смайт В. [93], Стрэттон Дж. А. [100], Вайнштейн Л. А. [23], Бриллюэн Л., Пароди М. [19], Конторович М. И. [61].

ГЛАВА VIII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Плоские волны в однородной среде. Отражение и преломление волн. Волновые пакеты

В диэлектрической среде при отсутствии зарядов и токов векторы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.2})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (\text{VIII.3})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{VIII.4})$$

В недиспергирующей среде векторы поля связаны соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{VIII.5})$$

где ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости. Если потери электромагнитной энергии пренебрежимо малы, то ε и μ — вещественные величины. В случае однородной среды из (VIII.1)–(VIII.5) можно получить уравнение второго порядка для \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{VIII.6})$$

где $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — фазовая скорость распространения электромагнитных волн.

В общем случае соотношения (VIII.5) справедливы только для монохроматических компонент полей, причем проницаемости ε и μ зависят от частоты (дисперсия) и являются комплексными величинами. Мнимые части ε и μ определяют диссипацию электромагнитной энергии в среде.

В проводящей среде, при достаточно медленном изменении поля, когда между током и электрическим полем справедлива связь вида $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ со статическим значением проводимости σ , уравнение (VIII.2) заменяется следующим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.7})$$

оно снова примет вид (VIII.2), если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость, имеющую при малых частотах вид

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (\text{VIII.8})$$

где ε' и σ — статические значения диэлектрической проницаемости и проводимости. При высоких частотах диэлектрическая проницаемость проводящей среды — комплексная величина, зависящая от частоты.

У хороших проводников (металлов) второй член в (VIII.8) очень велик, поэтому при малых частотах

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (\text{VIII.9})$$

Если частота поля такова, что глубина проникновения поля в металл много меньше радиуса кривизны поверхности металла и длины волны в окружающем металл пространстве, то при любом характере поля вне проводника можно считать, что тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} вблизи поверхности проводника связаны соотношением

$$\mathbf{E}_\tau = \zeta (\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n}). \quad (\text{VIII.10})$$

Здесь \mathbf{n} — орт нормали к поверхности, направленный вглубь проводника, ζ — поверхностный импеданс металла — величина, зависящая от частоты поля и определяемая свойствами металла:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (\text{VIII.11})$$

Равенство (VIII.10) справедливо только при $|\zeta| \ll 1$; его можно использовать в качестве граничного условия при определении поля вне проводника (приближенное граничное условие Леонтовича).

Если среда неоднородна, а $\mu = 1$, то гармонически меняющееся во времени электрическое поле будет удовлетворять уравнению

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (\text{VIII.12})$$

\mathbf{H} определяется через \mathbf{E} из уравнения Максвелла (VIII.1).

Плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны), описывается функцией

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (\text{VIII.13})$$

Амплитуда волны $\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}' + i\mathcal{E}''$ является в общем случае комплексным вектором, причем $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ (поперечность волны). В зависимости от величины и направления вещественных векторов \mathcal{E}' и \mathcal{E}'' волна может иметь линейную, круговую или эллиптическую поляризацию.

Плоские монохроматические волны, обладающие определенной частотой и определенной поляризацией, представляют собой математическую идеализацию. Те волны, которые мы называем монохроматическими, в действительности всегда являются квазимонохроматическими. Их можно рассматривать как суперпозиции монохроматических волн с частотами в некотором промежутке $\Delta\omega$. В данной точке пространства такая волна описывается функцией $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$, где ω — некоторая средняя частота в промежутке $\Delta\omega$, а $\mathbf{E}_0(t)$ — функция, меняющаяся значительно медленнее, чем $e^{-i\omega t}$. Кроме этого, часто (а в оптическом диапазоне — как правило) приходится иметь дело с одновременным наблюдением излучения от многих независимых источников, разности фаз у которых меняются беспорядочным образом. Эти волны будут немонахроматическими и только частично поляризованными.

Можно единым образом рассматривать состояние поляризации как монохроматических (и полностью поляризованных), так и немонахроматических (частично поляризованных) волн. Поляризацию и интенсивность этих волн можно характеризовать тензором

$$I_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*}, \quad (\text{VIII.14})$$

где усреднение проводится по времени наблюдения и по ансамблю независимых источников, а $i, k = 1, 2$ характеризуют два основных направления в плоскости xy (здесь $\mathbf{k} \parallel z$). Тензор поляризации эрмитов: $I_{ik} = I_{ki}^*$. Он может быть представлен в виде

$$I_{ik} = I_1 e_i^{(1)} e_k^{(1)*} + I_2 e_i^{(2)} e_k^{(2)*}, \quad (\text{VIII.15})$$

где I_1 и I_2 — положительные величины, $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ — взаимно ортогональные комплексные векторы, нормированные условием $e^{(i)} \cdot e^{(k)*} = \delta_{ik}$ и характеризующие два основных состояния поляризации частично поляризованной волны. Из (VIII.15) видно, что такую волну можно рассматривать как некогерентную¹ суперпозицию двух основных эллиптически поляризованных

¹Некогерентными называются колебания, разность фаз которых меняется беспорядочным образом

волн. Форма и ориентация эллипсов поляризации этих волн описываются векторами $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Эллипсы поляризации подобны, а их соответствующие оси взаимно перпендикулярны. Величины I_1 и I_2 представляют собой интенсивности основных волн. Полная интенсивность волны $I = \overline{E_0 E^*} = I_1 + I_2 = \text{Sp}(I_{ik})$. Величины I_i и $e^{(i)}$ могут быть определены из системы уравнений

$$I_{kl} e_l^{(i)} = I_i e_k^{(i)}. \quad (\text{VIII.16})$$

Отношение

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad (I_2 \leq I_1) \quad (\text{VIII.17})$$

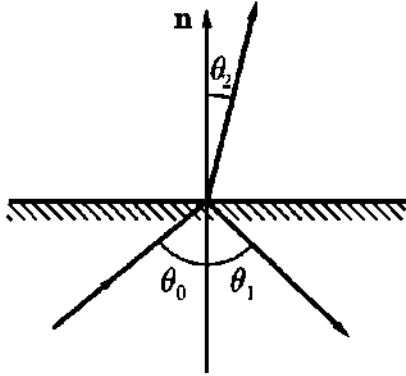


Рис. 24

называется степенью поляризации частично поляризованной волны, а $\rho = I_2/I_1$ — степенью ее деполаризации. Используется также другое определение степени деполаризации как $\rho' = 1 - P = 2I_2/(I_1 + I_2)$.

Для полностью поляризованной волны $P = 1$ ($\rho = \rho' = 0$), для неполяризованной волны $P = 0$ ($\rho = \rho' = 1$), $I_1 = I_2 = 1/2$, и тензор поляризации принимает вид

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I \delta_{ik}.$$

При падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред углы $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, указывающие направления распространения соответственно падающей, отраженной и преломленной волн (рис. 24) связаны соотношениями:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i}, \quad (\text{VIII.18})$$

где $n_{1,2}$ — показатели преломления первой и второй сред (полагаем $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Амплитуды отраженной (E_1, H_1) и преломленной (E_2, H_2) волн выражаются через амплитуды E_0, H_0 падающей волны по формулам Френеля:

а) если E_0 нормальна к плоскости падения, то

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0; \quad (\text{VIII.19})$$

б) если H_0 нормальна к плоскости падения, то

$$H_1 = \frac{\text{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (\text{VIII.20})$$

Угол θ_2 выражается через диэлектрические проницаемости сред по формулам (VIII.18). Формулы (VIII.18)–(VIII.20) сохраняют свой вид и при комплексном ε_2 , при этом угол θ_2 также станет комплексным и не будет иметь простого геометрического смысла. Случай комплексного угла θ_2 рассматривается в задаче 420*.

Коэффициентом отражения R называется отношение среднего (по времени) потока энергии отраженной волны к среднему, падающему на поверхность, потоку энергии.

Суперпозиция плоских монохроматических волн с разными волновыми векторами и частотами носит название группы волн или волнового пакета:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z, \quad (\text{VIII.21})$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — любая декартова компонента вектора \mathbf{E} или \mathbf{H} . Функцию $\psi(\mathbf{k})$, характеризующую долю каждой отдельной плоской волны в общей суперпозиции, будем называть амплитудной функцией. Максимум амплитуды волнового пакета перемещается в пространстве с групповой скоростью $v_g = d\omega/dk$.

399. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z . Первая волна поляризована по x и имеет амплитуду a , вторая поляризована по y , имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ . Найти поляризацию результирующей волны.

400. Рассмотреть в предыдущей задаче зависимость поляризации от сдвига фаз χ для случая $a = b$.

401. Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу с противоположными направлениями вращения, имеют одинаковые фазы и распространяются в одном направлении. Амплитуды этих волн a (у правополяризованной волны) и b (у левополяризованной волны). Найти зависимость характера поляризации от отношения a/b (a и b можно выбрать вещественными).

402. Выразить степень поляризации P плоской волны через составляющие I_{ik} тензора поляризации. Какому условию должны удовлетворять компоненты I_{ik} , чтобы волна была полностью поляризованной?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (VIII.15) и ортонормированностью базисных векторов поляризации.

403. Убедиться в том, что частично поляризованная электромагнитная волна всегда может рассматриваться как совокупность неполяризованной и полностью поляризованной волны. Для этого доказать, что тензор поляризации (VIII.15) может быть в общем случае записан в форме

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I(1 - P)\delta_{ik} + \frac{1}{2}PI_{ik}^{\text{пол}},$$

где тензор $I_{ik}^{\text{пол}}$ имеет нулевой определитель и, следовательно, описывает полностью неполяризованную волну, причем $I = I_1 + I_2$ — полная интенсивность, P — степень поляризации.

404. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I распространяется вдоль оси z и поляризована по эллипсу с полуосями a , b . Большая полуось a составляет угол ϑ с осью x . Составить тензор поляризации и рассмотреть возможные частные случаи.

405. Электромагнитная волна является суперпозицией двух некогерентных «почти монохроматических» волн равной интенсивности I с приблизительно одинаковыми частотами и волновыми векторами. Обе волны поляризованы линейно, направления поляризации задаются в плоскости, перпендикулярной к их волновому вектору, ортами $e^{(1)}(1, 0)$ и $e^{(2)}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Построить тензор поляризации I_{ik} результирующей волны и определить степень ее деполаризации.

406. Решить предыдущую задачу для случая, когда интенсивности волн различны ($I_1 \neq I_2$), а направления поляризаций составляют угол $\pi/4$.

407. Тензор поляризации электромагнитной волны, который является эрмитовым, может быть представлен в виде

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I \left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^3 \xi_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} \right) = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

где I — полная интенсивность волны, ξ_i — вещественные параметры, удовлетворяющие условию $\xi_2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$ (параметры Стокса), $\hat{\tau}^{(l)}$ -матрицы

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить физический смысл параметров ξ_i . Для этого выразить степень деполаризации ρ волны через ξ_i и определить поляризации двух основных волн, на которые распадается частично поляризованная волна, в следующих трех случаях:

а) $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$; б) $\xi_2 \neq 0$, $\xi_1 = \xi_3 = 0$; в) $\xi_3 \neq 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

408. Пусть в плоской неоднородной¹ волне вектор электрического поля \mathbf{E} поляризован линейно. Определить взаимное расположение векторов \mathbf{E}_0 , \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' , (\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 — вещественная и мнимая части комплексной амплитуды \mathbf{H}_0 ; \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' — вещественная и мнимая части волнового вектора \mathbf{k}). Какую кривую описывает конец вектора \mathbf{H} в фиксированной точке пространства?

Решить ту же задачу для случая, когда вектор \mathbf{H} поляризован линейно.

409. Поляризованная по кругу плоская монохроматическая волна падает наклонно на плоскую границу диэлектрика. Определить характер поляризации отраженной и преломленной волн.

410*. Пучок почти монохроматического неполяризованного света падает на плоскую границу диэлектрика. Найти тензоры поляризации $I_{ik}^{(1)}$, $I_{ik}^{(2)}$ и коэффициенты деполяризации ρ_1 , ρ_2 отраженного и преломленного света.

411. Неполяризованный почти монохроматический пучок света падает на плоскую границу раздела диэлектриков. Определить коэффициент отражения R и коэффициенты деполяризации $\rho_{1,2}$ отраженного и преломленного света, если угол падения равен углу Брюстера.

412. Вывести формулы Френеля для случая, когда электромагнитная волна падает из вакуума на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ .

413. Найти коэффициент отражения R от металлической поверхности с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. При каких углах падения θ_0 коэффициент отражения минимален?

414. Линейно поляризованная волна падает на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ . Определить характер поляризации отраженной волны, если угол скольжения падающей волны равен углу Φ_0 , определенному в предыдущей задаче.

415. Линейно поляризованная плоская волна падает под углом θ_0 на поверхность металла. Направление ее поляризации составляет с плоскостью падения угол $\pi/4$. Экспериментально определены отношение поперечной и продольной (относительно плоскости падения) компонент отраженной волны $\frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} = \operatorname{tg} \rho$ и сдвиг фаз между ними δ :

$$\frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} = \operatorname{tg} \rho e^{i\delta}.$$

¹ Неоднородной называется волна, у которой вещественная \mathbf{k}' и мнимая \mathbf{k}'' составляющие комплексного волнового вектора \mathbf{k} имеют различные направления.

Выразить через ρ , δ и θ_0 вещественную часть показателя преломления n' и коэффициент поглощения n'' ($n' + in'' = 1/\zeta$, ζ — поверхностный импеданс), считая $|n'^2 - n''^2| \gg \sin^2 \theta_0$.

416. Найти коэффициент отражения R от плоской границы проводника при нормальном падении в предельном случае малых значений проводимости (см. формулу (VIII.8)).

417*. Показать, что после полного отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

418. Исследовать движение энергии при полном внутреннем отражении. Найти поток энергии вдоль поверхности раздела и в перпендикулярном направлении в среде, от которой происходит отражение. Определить линии вектора Пойнтинга γ .

419. Плоская монохроматическая волна падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Какой характер примет поле по обе стороны от границы в случае скользящего падения (угол падения $\theta_0 \rightarrow \pi/2$)?

420*. Электромагнитная волна падает наклонно из диэлектрика на плоскую границу проводящей среды. Найти направления распространения, затухания и фазовую скорость v_φ волны в проводящей среде.

421*. Диэлектрический слой с проницаемостью ϵ_2 , ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = a$, разделяет диэлектрические среды с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). На этот слой нормально к его поверхности падает из области $z < 0$ электромагнитная волна. При какой толщине слоя отражение будет минимальным? При каком соотношении между $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ отражения не будет?

422*. Плоская волна падает нормально из вакуума на границу диэлектрика. Исследовать влияние размытости границы на коэффициент отражения. Для этого аппроксимировать ход диэлектрической проницаемости функцией

$$\epsilon(z) = \epsilon - \frac{\Delta\epsilon}{e^{z/a} + 1}, \quad \epsilon = 1 + \Delta\epsilon,$$

где ϵ и $\Delta\epsilon$ — постоянные. Исследовать частные случаи больших и малых a .

УКАЗАНИЕ. В дифференциальном уравнении для $E(z)$ (см. (VIII.12)) сделать замену независимой переменной $\xi = -e^{-z/a}$ и подстановку $E(\xi) = \xi^{-ika} \psi(\xi)$, где $\psi(\xi)$ будет удовлетворять гипергеометрическому уравнению (см. справочник [90], 9.151).

423*. При отсутствии поглощения диэлектрическая проницаемость плазмы имеет вид (см. задачу 312*):

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

Рассмотреть распространение электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно: $N(z) = N_0 z$. Плоская монохроматическая волна падает на неоднородный слой плазмы нормально. (Такой случай может иметь место при распространении радиоволн в ионосфере.)

УКАЗАНИЕ. Уравнение для $E(z)$ решать путем разложения искомой функции в интеграл Фурье.

424. Построить одномерный волновой пакет Ψ для момента времени $t = 0$, взяв в качестве амплитудной функции кривую Гаусса $a(k) = a_0 \exp\left[-\left(\frac{k - k_0}{\Delta k}\right)^2\right]$, где $a_0, k_0, \Delta k$ — постоянные. Найти связь между шириной пакета Δx и интервалом волновых чисел Δk , вносящих основной вклад в суперпозицию.

425. Волновой пакет Ψ образован суперпозицией плоских волн с разными частотами. Амплитудная функция имеет вид кривой Гаусса $a(\omega) = a_0 \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right]$, где $a_0, \omega_0, \Delta\omega$ — постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке $x = 0$. Получить связь между длительностью волнового импульса Δt и интервалом частот $\Delta\omega$.

426. Некоторый объект, освещаемый светом с длиной волны λ , рассматривается в микроскоп. Найти минимальный возможный размер объекта Δx_{\min} , допускаемый условием $\Delta x \cdot \Delta k \geq 1$.

427. Положение некоторого объекта определяется с помощью радиолокации. С какой предельной точностью можно провести это измерение, если расстояние до объекта l , длина волны λ ?

428. Исследовать форму и движение волнового пакета, полученного наложением плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и с волновыми векторами, лежащими в области $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}| \leq q$ (\mathbf{k}_0, q — постоянные). Действительный закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ заменить приближенным соотношением $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \left.\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}\right|_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$.

429*. Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета в диспергирующей среде. Для этого выбрать амплитудную функцию в виде кривой Гаусса $a(k) = a_0 e^{-\alpha(k - k_0)^2}$ и учесть квадратичный член в разложении частоты ω по k .

430. Найти фазовую v_φ и групповую v_g скорости распространения в среде, диэлектрическая проницаемость которой (ср. (VI.12))

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ограничиться рассмотрением только случаев больших и малых (по сравнению с ω_0) частот ω ($\mu = 1$).

431. Определить скорость переноса энергии одномерным волновым пакетом, движущимся в диспергирующей среде. Показать, что эта скорость совпадает с групповой скоростью v_g .

УКАЗАНИЕ. Скорость переноса энергии v определяется соотношением $\bar{\gamma} = v\bar{\omega}$, где

$$\bar{\omega} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} EE^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} HH^* \right]$$

— усредненная плотность энергии в диспергирующей среде (см. [66]), $\bar{\gamma}$ — средняя плотность потока энергии.

§ 2. Плоские волны в анизотропных и гиротропных средах

Оптически анизотропными называются такие среды, у которых электрическая и магнитная проницаемости являются тензорами. Оптическая анизотропия может быть следствием кристаллической структуры тела, а также вызываться внешним электрическим полем (см. задачи 313*, 314) или внешними механическими воздействиями. При отсутствии внешнего магнитного поля тензоры $\varepsilon_{ik}(\omega)$ и $\mu_{ik}(\omega)$ ¹ симметричны:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}. \quad (\text{VIII.22})$$

В анизотропной среде в данном направлении могут распространяться с разными фазовыми скоростями две плоские монохроматические волны одной частоты, поляризованные линейно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Направления, вдоль которых обе волны имеют одинаковые скорости распространения, называются оптическими осями. Направление распространения волны, которое определяется нормалью к волновой поверхности, в общем случае не совпадает с направлением луча (т.е. с направлением вектора Пойнтинга).

¹Мы не рассматриваем эффектов, связанных с пространственной неоднородностью поля, которые приводят к зависимости ε_{ik} и μ_{ik} от волнового вектора \mathbf{k} (см. [66], а также задачу 446).

Кристаллы, у которых два главных значения тензора диэлектрической проницаемости совпадают ($\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{\parallel}$), являются одноосновными. Их оптическая ось совпадает с осью $x_3 = z$. Волновые векторы двух волн, распространяющихся под углом θ к оптической оси, имеют в этом случае величины:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}. \quad (\text{VIII.23})$$

Первая из этих волн называется обыкновенной, в ней векторы индукции \mathbf{D} и напряженности электрического поля \mathbf{E} направлены одинаково и оба перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k}_1 и плоскости, проходящей через волновой вектор и оптическую ось (плоскость главного сечения). Вторая волна называется необыкновенной. Вектор \mathbf{D} этой волны лежит в плоскости главного сечения и перпендикулярен ее волновому вектору \mathbf{k}_2 . Вектор \mathbf{E} также лежит в плоскости главного сечения и не совпадает по направлению с \mathbf{D} .

При наличии внешнего постоянного магнитного поля тензоры ε_{ik} и μ_{ik} перестают быть симметричными; но в непоглощающих средах, которые только и будут рассматриваться в этом параграфе, они являются эрмитовыми:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}^*. \quad (\text{VIII.24})$$

В этом случае связь между напряженностями полей и индукциями можно записать в виде (ср. с задачей 316)

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}' \mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g}_e), \quad \mathbf{B} = \hat{\mu}' \mathbf{H} + i(\mathbf{H} \times \mathbf{g}_m), \quad (\text{VIII.25})$$

где \mathbf{g}_e и \mathbf{g}_m — векторы гирации (электрический и магнитный), $\hat{\varepsilon}' \mathbf{E}$ — вектор с компонентами $\varepsilon'_{ik} E_k$. Среда, в которых векторы поля связаны уравнениями (VIII.25), называются гиротропными.

В гиротропной среде в заданном направлении могут распространяться с разными фазовыми скоростями две плоские волны одной частоты. Эти волны поляризованы эллиптически с противоположными направлениями вращения, эллипсы поляризации имеют одинаковое отношение осей и повернуты друг относительно друга на $\pi/2$.

Граничные условия на поверхности анизотропного или гиротропного тела имеют такой же вид, как и на границе раздела изотропных сред (см. (III.9) и (V.6)).

432. Необыкновенная волна распространяется в одноосном кристалле под углом θ к оптической оси. Определить угол α между волновым вектором \mathbf{k} и вектором \mathbf{E} , а также угол ϑ между направлением луча (вектором Пойнтинга) и оптической осью кристалла.

433. Плоская волна падает из вакуума на плоскую поверхность одноосного кристалла. Оптическая ось кристалла нормальна к его поверхности. Найти направления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если угол падения θ_0 .

434. Решить предыдущую задачу для случая, когда оптическая ось кристалла параллельна его поверхности и составляет угол α с плоскостью падения.

435. Плоская монохроматическая волна распространяется в безграничной ферритовой намагниченной до насыщения среде под углом θ к постоянному магнитному полю. Магнитная проницаемость феррита — тензор¹:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}$$

(см. задачу 331; ось z направлена вдоль постоянного магнитного поля). Диэлектрическую проницаемость феррита ε можно считать скаляром². Найти фазовые скорости распространения $v_{1,2}$.

436. Плоская монохроматическая волна распространяется в диэлектрике с $\mu = 1$, находящемся в постоянном и однородном магнитном поле. Тензор диэлектрической проницаемости (см. задачу 318) имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Найти фазовые скорости распространения.

437. Исследовать поляризации волн, которые могут распространяться в безграничной ферритовой намагниченной до насыщения среде. Рассмотреть два частных случая распространения:

- а) вдоль постоянного магнитного поля;
- б) перпендикулярно постоянному магнитному полю.

438. Диэлектрик находится во внешнем магнитном поле. Плоская монохроматическая волна распространяется в направлении магнитного поля (ось z) и имеет в точке $z = 0$ линейную поляризацию. Определить поляризацию волны в точке $z \neq 0$.

¹Такой же вид имеет тензор диэлектрической проницаемости газообразного диэлектрика, находящегося во внешнем однородном магнитном поле (см. задачу (318)).

²Это объясняется тем, что влияние постоянного магнитного поля на магнитные свойства феррита значительно сильнее, чем на электрические.

УКАЗАНИЕ. Использовать тензор диэлектрической проницаемости, полученный в задаче 318.

439. Плоская поляризованная по кругу волна падает из вакуума нормально на плоскую границу феррита. Феррит намагничен в направлении падения волны. Определить характер поляризации и амплитуды отраженной и прошедшей волн.

УКАЗАНИЕ. Использовать граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

440. Решить предыдущую задачу для случая, когда падающая волна поляризована линейно.

441*. Искусственный диэлектрик состоит из тонких идеально проводящих круглых дисков, ориентированных одинаковым образом и находящихся в вакууме. Перпендикулярно плоскостям дисков приложено постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 и в том же направлении распространяется плоская электромагнитная волна. Определить фазовые скорости распространения, рассматривая диэлектрик как сплошную среду.

УКАЗАНИЕ. Учесть эффект Холла, который возникнет из-за наличия внешнего магнитного поля.

442. Плоская волна падает нормально на плоскую решетку, образованную тонкими параллельными бесконечно длинными проводниками. Расстояния между проводниками и их толщина много меньше длины волны. Какое влияние окажет решетка на распространение волн с различными поляризациями?

443. Рассмотреть возможность распространения продольных колебаний в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. При таких колебаниях вектор электрического поля \mathbf{E} параллелен волновому вектору. Указать условия, при которых затухание этих колебаний является малым. На какой частоте возможны продольные колебания в плазме (ее диэлектрическая проницаемость вычислена в задаче 312*)?

444. Область $x < 0$ занята плазмой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (см. задачу 312*), при $x > 0$ — вакуум. Показать, что вдоль границы плазма–вакуум может распространяться поверхностная волна, напряженности поля в которой затухают экспоненциально при удалении от границы. Найти частоту, при которой возможна такая волна, и ее поляризацию. Ограничиться рассмотрением медленной волны ($v_\varphi = \omega/k \ll c$).

445. Ионизованный газ находится в постоянном магнитном поле. Вдоль направления поля распространяется поперечная плоская волна. Найти фазовые скорости распространения. Рассмотреть, в частности, случай

малых частот ($\omega \rightarrow 0$) и исследовать характер электромагнитных волн с учетом движения положительных ионов.

УКАЗАНИЕ. Использовать выражение для тензора диэлектрической проницаемости ионизованного газа в постоянном магнитном поле, полученное в задаче 321*.

446. Определить тензор магнитной проницаемости $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ ферродиелектрика, не пренебрегая членом $q\nabla^2\mathbf{M}$ в выражении (VI.16) эффективного магнитного поля. Для этого рассмотреть движение вектора намагниченности под действием плоской монохроматической волны. Ферродиелектрик намагничен до насыщения постоянным магнитным полем \mathbf{H}_0 .

УКАЗАНИЕ. Ограничиться случаем малых амплитуд, линеаризовать уравнение движения вектора намагниченности.

447. Найти с учетом члена $q\nabla^2\mathbf{M}$ в выражении (VI.16) для $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$ дисперсионное уравнение электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной, намагниченной до насыщения ферродиелектрической среде. Показать, что в такой среде могут распространяться три типа волн с разными законами дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Определить явный вид зависимости $\omega(\mathbf{k})$ для того типа волн, у которого может выполняться условие $\frac{\omega^2 \varepsilon}{(ck)^2} \ll 1$. Оценить относительную величину электрического и магнитного полей для этой ветви колебаний.

448. Определить поверхностный импеданс ζ ферромагнитного проводника, находящегося в постоянном магнитном поле, параллельном его поверхности. Тензор магнитной проницаемости приведен в условии задачи 435, а компоненты тензора электропроводности равны $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_{33} = \sigma_3$, $\sigma_{12} = -\sigma_{21} = -i\sigma_2$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

УКАЗАНИЕ. Поверхностный импеданс в данном случае — тензор Π ранга и должен быть определен из условия (ср. (VIII.10))

$$E_{\tau i} = \zeta_{ik}(\mathbf{H}_{\tau} \times \mathbf{n})_k,$$

где $i, k = 1, 2$, \mathbf{E}_{τ} и \mathbf{H}_{τ} — касательные составляющие векторов поля вблизи поверхности проводника, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

449. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное магнитное поле нормально к поверхности ферромагнитного проводника.

§ 3. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Дифракция

Точное решение задачи о дифракции электромагнитной волны на проводящем или диэлектрическом теле сводится к интегрированию уравне-

ний Максвелла при соответствующих граничных условиях. Оно возможно в немногих случаях (см., например, задачи 450*, 457*). В ряде случаев может быть найдено приближенное решение.

Если линейные размеры тела малы по сравнению с длиной волны, то электромагнитное поле вблизи тела можно считать однородным. Тело, находящееся в однородном периодическом поле, приобретет электрический и магнитный моменты, которые будут зависеть от времени по тому же закону, что и внешнее поле.

Рассеянная волна возникает в результате излучения этими переменными моментами. Задача о рассеянии электромагнитных волн на теле малых размеров сводится к определению дипольных моментов, которые приобретает тело. Поля излучения выражаются через дипольные моменты по формулам (XII.17) и (XII.20).

Эффективным дифференциальным сечением рассеяния в телесный угол $d\Omega$ называется отношение

$$d\sigma_s = \frac{dI(\vartheta, \alpha)}{\bar{\gamma}_0}. \quad (\text{VIII.26})$$

Здесь $dI = \bar{\gamma} dS = \bar{\gamma} r^2 d\Omega$ — средняя (по времени) интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$; $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}_0$ — средние плотности потока энергии в рассеянной и падающей волнах. Плотность потока энергии описывается вектором Пойнтинга

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (\text{VIII.27})$$

Эффективным сечением поглощения называется отношение средней энергии, поглощаемой телом в единицу времени, к средней плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma_a = \frac{Q}{\bar{\gamma}_0}. \quad (\text{VIII.28})$$

В противоположном предельном случае, когда длина волны много меньше размеров тела, применимы методы геометрической оптики. При дифракции электромагнитной волны на отверстии в бесконечном непрозрачном экране амплитуда дифрагированного поля в приближении геометрической оптики описывается формулой

$$u_P = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{u}{R} e^{ikR} dS_n, \quad (\text{VIII.29})$$

которая может быть выведена на основе принципа Гюйгенса. Здесь u_P — поле в точке P за экраном (рис. 25), u — поле на участке dS поверхности

отверстия (это поле предполагается таким же, как при отсутствии экрана, т. е. неискаженным), dS_n — проекция элемента dS поверхности отверстия на направление луча, пришедшего из источника света O в dS , R — расстояние от dS до точки P , k — абсолютная величина волнового вектора световой волны.

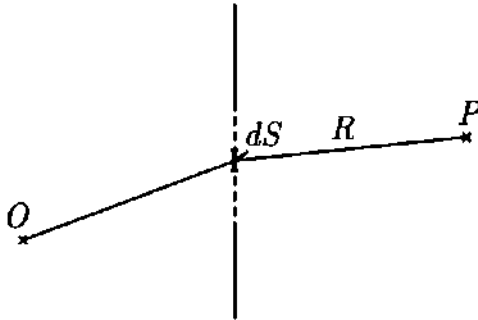


Рис. 25

Источник света O и точка наблюдения P могут находиться как на конечных, так и на бесконечно больших расстояниях от экрана. Случай, когда точки O и P , или хотя бы одна из них, находятся на конечном расстоянии от экрана, носит название дифракции Френеля.

Если обе точки O и P находятся на очень больших расстояниях от экрана, то лучи света, идущие от источника к отверстию и от отверстия в точку наблюдения, можно считать параллельными. В этом случае, который носит название дифракции Фраунгофера, формула (VIII.29) может быть преобразована:

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dS_n. \quad (\text{VIII.30})$$

Здесь \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы падающего и дифрагированного света, R_0 — расстояние от отверстия до точки наблюдения, u_0 — амплитуда поля на отверстии.

Интенсивность дифрагированного света пропорциональна квадрату модуля $|u_P|^2$.

В случае дополнительных¹ экранов имеет место принцип Бабине [55]: пусть u_1 и u_2 — волновые поля в некоторой точке, соответствующие двум дополнительным экранам, u — неискаженное волновое поле в той же точке при отсутствии экранов, тогда

$$u_1 + u_2 = u. \quad (\text{VIII.31})$$

Формулы (VIII.29) и (VIII.30) не учитывают поляризации электромагнитных волн (амплитуда u предполагается скалярной, а не векторной величиной). Дифракционная формула, учитывающая векторный характер электромагнитного поля, может быть записана в виде

$$\mathbf{E}_P = -\frac{ik}{4\pi R} \int \{ \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H} - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H})] + \mathbf{n} \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}) \} e^{ikr} dS. \quad (\text{VIII.32})$$

¹ Дополнительным называется экран, имеющий отверстия там, где другой экран не прозрачен, и не прозрачный там, где другой экран имеет отверстия.

В этой формуле \mathbf{E} и \mathbf{H} — значения полей на поверхности отверстия, \mathbf{E}_P — электрическое поле на большом расстоянии от экрана (в волновой зоне), \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения дифрагированной волны, \mathbf{n}_0 — орт нормали к поверхности отверстия, направленный в сторону точки наблюдения, r — расстояние от dS до точки наблюдения, R — расстояние от начала координат (выбранного на отверстии) до точки наблюдения.

Магнитное поле в волновой зоне выражается через электрическое по обычной формуле:

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_P.$$

450*. На бесконечный круговой идеально проводящий цилиндр радиуса a , находящийся в вакууме, падает плоская монохроматическая волна в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Вектор \mathbf{E}_0 падающей волны параллелен оси цилиндра. Определить результирующее поле, распределение тока по поверхности цилиндра и полный ток \mathcal{I} , текущий вдоль цилиндра.

451. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s$ электромагнитной волны (диаграмму направленности вторичных волн) цилиндром, рассмотренным в задаче 450*. Найти также полное сечение рассеяния σ_s .

452*. Плоская монохроматическая волна падает на идеально проводящий круговой цилиндр так, что ее магнитный вектор $\mathbf{H}_0 = \mathcal{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ параллелен, а волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен оси цилиндра. Цилиндр находится в вакууме. Найти результирующее электромагнитное поле. Рассмотреть, в частности, случай тонкого ($ka \leq 1$) цилиндра, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния для этого случая.

453. Пусть $d\sigma_{\parallel}$ и $d\sigma_{\perp}$ — дифференциальные сечения рассеяния на бесконечном цилиндре плоской волны с вектором \mathbf{E} , направленным соответственно параллельно и перпендикулярно оси цилиндра. Найти дифференциальное сечение $d\sigma'_s$ рассеяния волны, у которой вектор \mathbf{E} составляет с осью цилиндра угол φ , а также дифференциальное сечение $d\sigma''_s$ рассеяния неполяризованной волны.

УКАЗАНИЕ. Использовать принцип суперпозиции полей.

454. Неполяризованная плоская волна рассеивается на идеально проводящем тонком ($ka \ll 1$) цилиндре. Определить степень деполаризации ρ рассеянных волн в зависимости от угла рассеяния.

455*. Решить задачу 452* о дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре, не предполагая цилиндр идеально проводящим, но считая его поверхностный импеданс ζ малым. Воспользоваться приближенным граничным условием Леонтовича (VIII.10).

456. Определить среднюю потерю энергии Q и сечение поглощения σ_a на единицу длины цилиндра, рассмотренного в предыдущей задаче. Исследовать, в частности, случай $ka \ll 1$ и объяснить получающийся результат.

457*. Рассмотреть дифракцию плоской монохроматической волны на диэлектрическом цилиндре. Цилиндр радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ находится в вакууме. Волна падает нормально к образующей цилиндра, вектор \mathbf{E} параллелен его оси. Определить результирующее поле.

458*. Линейно поляризованная плоская монохроматическая волна рассеивается на шаре, радиус которого a много меньше длины волны λ . Выразить составляющие электромагнитного поля рассеянного излучения в волновой зоне через электрическую и магнитную поляризуемости шара. Определить эффективное дифференциальное сечение рассеяния.

УКАЗАНИЕ. В силу условия $a \ll \lambda$ считать внешнее поле вблизи шара однородным и рассмотреть излучение индуцированных электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных моментов.

459. Вычислить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния, а также степень деполяризации ρ вторичного излучения при рассеянии неполяризованной волны шаром, радиус которого a много меньше длины волны λ . Результат выразить через электрическую β_e , и магнитную β_m поляризуемости шара.

460. Используя результаты предыдущей задачи, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния неполяризованного света малым диэлектрическим шаром с проницаемостью ε ($\mu = 1$), а также степень деполяризации ρ рассеянного света. Построить графики зависимости этих величин от угла рассеяния θ . Указать условие применимости полученных формул. Решить ту же задачу для идеально проводящего шара с $\mu = 1$.

461. Плоская монохроматическая волна падает под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на идеально проводящий тонкий диск, радиус которого a много меньше длины волны λ . Определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния при различных поляризациях падающей волны, а также сечение рассеяния неполяризованной волны.

462. В однородном диэлектрике с проницаемостью ε ($\mu = 1$) вырезана полость, имеющая форму тонкого диска радиуса a , толщиной $2h$. Нормально к плоскости полости падает неполяризованный свет с длиной волны $\lambda \gg a$. Найти дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния.

463*. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния плоской волны длиной λ на идеально проводящем цилиндре высотой $2h$ и радиуса $a \ll h \ll \lambda$. Исследовать различные случаи поляризации падающей волны. Цилиндр аппроксимировать вытянутым эллипсоидом вращения с полуосями a и h .

УКАЗАНИЕ. Использовать решения задач 197, 198, 390*.

464. Решить предыдущую задачу для диэлектрического цилиндра, высота которого $2h$ много меньше длины волны λ внутри цилиндра,

465*. Плоская монохроматическая волна $\mathcal{E}_0 \exp[i(kr - \omega t)]$ рассеивается на диэлектрическом шаре радиуса a , поляризуемость которого $(\epsilon - 1)/4\pi \ll 1$ ($\mu = 1$). Вследствие малой поляризуемости поляризация шара в первом приближении пропорциональна полю падающей волны. Определить дифференциальное сечение рассеяния и степень деполяризации ρ рассеянного излучения. Какой характер приобретает рассеяние в случае очень большого шара ($ka \gg 1$)?

466. Определить полное сечение рассеяния σ_s диэлектрической сферой, рассмотренной в предыдущей задаче, в предельном случае $ka \gg 1$. Сравнить со случаем $ka \ll 1$.

467*. Плоская монохроматическая волна рассеивается некоторой системой зарядов (например, макроскопическим телом). Электрическое поле на больших расстояниях от рассеивателя имеет вид

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\mathbf{e} e^{ikz} + \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \right],$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{E_0}$, $k = \frac{\omega}{c}$, E_0 — амплитуда падающей волны, $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ — амплитуда рассеяния — функция, характеризующая свойства рассеивателя и зависящая от частоты. Доказать соотношение («оптическую теорему»):

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}[\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{n}_0)].$$

Здесь $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ — полное сечение взаимодействия волны с системой зарядов, равное сумме сечений рассеяния σ_s и поглощения σ_a , $\mathbf{F}(\mathbf{n}_0)$ — амплитуда рассеяния «вперед», т. е. в направлении распространения падающей волны.

468*. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическую частицу, размер которой много меньше длины волны λ . Электрическая и магнитная поляризуемости частицы: $\beta_e = \beta'_e + i\beta''_e$ и $\beta_m = \beta'_m + i\beta''_m$ — комплексны, поэтому наряду с рассеянием происходит поглощение электромагнитной энергии. Вычислить сечение поглощения σ_a .

УКАЗАНИЕ. Поглощаемая в единицу времени энергия равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность сферы большого радиуса, окружающей частицу.

469. Вычислить сечение поглощения электромагнитной волны проводящим шаром σ_a с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Радиус шара b мал по сравнению с длиной волны λ .

470. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическое тело. Сечение поглощения волны телом σ_a и дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s/d\Omega$ — известны. Выразить через них среднюю по времени силу \bar{F} , действующую на тело со стороны волны.

471*. Определить среднюю силу \bar{F} , которая действует на малый шар радиуса a , находящийся в поле плоской монохроматической волны. Рассмотреть случаи идеально проводящего шара и диэлектрического шара с диэлектрической проницаемостью ε (магнитная проницаемость $\mu = 1$). Амплитуда падающей волны E_0 .

472. Точечный источник света расположен на оси, проходящей через центр круглого непрозрачного экрана радиуса a перпендикулярно его плоскости. Считая выполненным условие применимости геометрической оптики ($\lambda \ll a$), найти интенсивность света I в симметричной относительно экрана точке P .

473. В предыдущей задаче рассмотреть дифракцию на дополнительном экране (т. е. на круглом отверстии в бесконечном непрозрачном экране).

474. Параллельный пучок света падает на круглое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его плоскости. Найти распределение интенсивности света I на средней линии за экраном.

475. Найти угловое распределение интенсивности света dI при Дифракции Фраунгофера на кольцевом отверстии (радиусы $a > b$) в бесконечном непроницаемом экране. Начальный пучок света падает нормально к плоскости отверстия. Рассмотреть частный случай дифракции на круглом отверстии.

476. Найти угловое распределение интенсивности света dI при наклонном падении параллельного пучка на круглое отверстие (дифракция Фраунгофера).

477. Плоская линейно поляризованная волна падает на прямоугольное отверстие $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Амплитуды электрического и магнитного полей имеют составляющие $E_y = E_0$, $H_x = -E_0$, $H_y = E_x = 0$. Определить поле излучения из отверстия, а также угловое распределение излучения dI .

478. Плоская линейно поляризованная волна $E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ падает на круглое отверстие радиуса a в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Определить поле излучения из отверстия и угловое распределение интенсивности излучения dI .

§ 4. Когерентность и интерференция

Детекторы электромагнитного излучения в оптическом диапазоне реагируют на интенсивность I излучения, которая является усредненной по времени квадратичной функцией компонент поля

$$I = \overline{|u|^2} = \frac{1}{T} \int_0^T |u|^2 dt.$$

Это усреднение выражает тот факт, что время T срабатывания детекторов составляет не менее чем 10^{-10} сек (в исключительных случаях до 10^{-13} сек), а характерный период оптических колебаний $10^{-15} \div 10^{-16}$ сек.

В связи с этим наблюдаться может только такая интерференционная картина, которая существует достаточно стабильно в течение промежутка времени, большего чем T . Это усложняет наблюдение интерференции волн в оптическом диапазоне.

Тепловые, люминесцентные, тормозные источники света состоят, как правило, из большого количества независимых (некогерентных) излучателей, испускающих свет не согласованно по фазе и поляризации. Почти полное согласование достигается в квантовых оптических генераторах (лазерах), в которых главную роль играет вынужденное излучение света. Однако и в этом случае имеются флуктуации фазы и поляризации из-за спонтанного излучения и рассеяния на различных флуктуирующих неоднородностях.

Для наблюдения стабильной интерференционной картины обычно приходится прибегать к расщеплению волнового поля каждого из независимых излучателей (и источника в целом) на несколько пучков. Если образовавшиеся после расщепления волновые пакеты снова перекрываются, пройдя разные оптические пути, то в области их перекрытия может возникнуть интерференционная картина, если выполняются определенные условия когерентности.

Эти условия сводятся к требованию, чтобы интерференционные картины от различных независимых источников не замазывали друг друга.

Выделяют два простейших случая когерентности (подробнее см., например, [18], [84], [27], [120]).

1) *Временная когерентность*. Интерференция волновых пакетов может произойти, только если время τ запаздывания одного из пакетов будет меньше, чем время Δt жизни отдельного излучателя. По порядку величины $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$, где $\delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ — спектральный интервал излучаемых атомами частот (см. задачи 482–484). Вместо времени Δt когерентности можно рассматривать продольный размер l_{\parallel} области когерентности (длина когерентности):

$$l_{\parallel} = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad (\text{VIII.33})$$

где $\Delta\vartheta$ — длина излучаемой квазимонохроматической волны, $\Delta\lambda$ — разброс длин волн, связанный со спектральной шириной соотношением $\Delta\lambda = (\lambda^2/c)\Delta\nu$.

2) *Пространственная когерентность*. Если источник является протяженным, то интерференционные картины от независимых излучателей, находящихся в разных достаточно удаленных друг от друга точках источника, могут взаимно смазываться, налагаясь друг на друга. Поле сохраняет когерентность в окрестностях точки наблюдения в области, поперечные размеры которой

$$l_{\perp} \sim \frac{\lambda}{\Delta\vartheta} \sim \lambda \frac{R}{L}, \quad (\text{VIII.34})$$

где $\Delta\vartheta$ — угловой размер источника, L — поперечный размер источника, R — расстояние от него до точки наблюдения. Продольный размер l_{\parallel} области когерентности определяется формулой (VIII.33).

Объемом когерентности называется величина

$$\Delta V = l_{\perp}^2 l_{\parallel} \sim \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) \cdot \lambda^3. \quad (\text{VIII.35})$$

Параметром δ вырождения излучения называется среднее число фотонов (квантов света), пересекающих площадь когерентности l_{\perp}^2 за время когерентности $\Delta t = 1/\Delta\nu$:

$$\delta = l_{\perp}^2 \frac{\gamma}{\hbar\omega} \Delta t = \frac{\Delta V \cdot \gamma}{c\hbar\omega}, \quad (\text{VIII.36})$$

где γ — плотность потока энергии излучения, приходящаяся на интервал частот $\Delta\nu$, $\hbar\omega = 2\pi\hbar\nu$ — энергия одного фотона, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек —

постоянная Планка. Параметр вырождения характеризует важное свойство квантовых излучателей: способность к вынужденному или стимулированному излучению. Это свойство состоит в том, что интенсивность излучения от излучателей, находящихся в электромагнитном поле, пропорциональна $1 + \delta$ и увеличивается с ростом δ .

Пусть поле $u(\mathbf{r}, t)$ в точке наблюдения \mathbf{r} в момент t выражается, согласно принципу Гюйгенса, через поля в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ в моменты времени $t - t_1, t - t_2$:

$$u(\mathbf{r}, t) = A_1 u(\mathbf{r}_1, t - t_1) + A_2 u(\mathbf{r}_2, t - t_2). \quad (\text{VIII.37})$$

Здесь $t_1 = s_1/c, t_2 = s_2/c, s_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, s_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|, A_1, A_2$ — множители, зависящие от геометрии схемы и размеров отверстий, расположенных вблизи точек, радиусы-векторы которых \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .

Тогда наблюдаемую усредненную интенсивность в точке \mathbf{r} в момент t при стационарном режиме можно записать в виде

$$I(\mathbf{r}) = \overline{u^*(\mathbf{r}, t)u(\mathbf{r}, t)} = I_1(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r})} \operatorname{Re} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \quad (\text{VIII.38})$$

В этой формуле $\tau = (s_1 - s_2)/c$, величины

$$I_i(\mathbf{r}) = |A_i|^2 \overline{|u(\mathbf{r}_i, t - t_i)|^2} = |A_i|^2 I(\mathbf{r}_i)$$

представляют собой интенсивности в точке \mathbf{r} , если открыто только одно i -е отверстие. Функция $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ называется комплексной степенью когерентности (или коэффициентом частичной когерентности) и определяется следующим образом:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I_1(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r})}}, \quad (\text{VIII.39})$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \overline{u(\mathbf{r}_1, t)u^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)} \quad (\text{VIII.40})$$

— корреляционная функция полей в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в моменты t и $t + \tau$. Случаю пространственной когерентности соответствует $\tau = 0$.

Понятие корреляционной функции и определения (VIII.39), (VIII.40) сохраняют свой смысл независимо от описанного здесь способа изучения когерентных свойств поля с помощью двух отверстий. Можно любым способом разделить световой пучок от точечного источника на два пучка с интенсивностями I_1 и I_2 и осуществить задержку одного из них на время τ относительно другого. Если затем соединить опять эти пучки и наблюдать в малой области около точки \mathbf{r} усредненную по t интенсивность

результатирующего поля, то эта интенсивность будет описываться формулой вида (VIII.38), корреляционная функция — формулой (VIII.40), а коэффициент частичной когерентности — формулой (VIII.39) с $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$. Функция $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$ называется автокорреляционной функцией поля в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} в моменты t и $t + \tau$.

Коэффициент частичной когерентности удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau| \leq 1.$$

Нижняя граница этих неравенств отвечает полностью некогерентному свету, для которого $I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})$, верхняя же граница — полностью когерентному свету. За меру резкости интерференционных полос принимается видимость по Майкельсону:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau|^2 \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (\text{VIII.41})$$

Положение максимумов усредненной интенсивности определяется условием

$$\begin{aligned} \arg \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau &= 2n\pi, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Если в поле когерентной световой волны находится некоторый предмет, рассеивающий эту волну, то в области наложения рассеянного поля на поле основной («опорной») волны образуется интерференционная картина, интенсивность которой в каждой точке этой области зависит как от интенсивностей, так и от разности фаз рассеянной и опорной волн. Эту картину можно отобразить на фотопластинке, а затем использовать эту фотопластинку как дифракционную решетку, пропуская через нее когерентный свет. Интенсивность I' света, прошедшего через проявленную фотопластинку в данной ее точке (x, y) при освещении пластинки светом, распределенным с интенсивностью $I(x, y)$, пропорциональна $I(x, y)$:

$$I'(x, y) = T(x, y)I(x, y)$$

и зависит от степени почернения фотопластинки, характеризуемой «пропусканием» $T(x, y)$. Пропускание зависит от интенсивности $I_0(x, y)$ первичного поля, вызвавшего почернение, и от контрастности фотоэмульсии, характеризуемой законом

$$T(x, y) \propto [I_0(x, y)]^{-\gamma/2},$$

где γ — коэффициент контрастности фотоэмульсии.

Фотопластинка, на которой изображена картина интерференции опорной волны с волной, рассеянной от предмета, называется голограммой. Оказывается, что при пропускании через голограмму когерентного света за нею образуется объемное изображение первоначального предмета. Процесс такого восстановления первичного волнового поля называется голографией (см., например, [99], [84]) и иллюстрируется задачами 495–499.

Приведем некоторые астрономические постоянные, используемые в решениях задач:

Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1,50 \cdot 10^8 \text{ км}$
Диаметр Солнца	$1,39 \cdot 10^6 \text{ км}$
Световой год	$9,46 \cdot 10^{12} \text{ км}$
Парсек	$30,8 \cdot 10^{12} \text{ км}$

479. Вывести оценочное выражение (VIII.34) для поперечной длины l_{\perp} когерентности. Исходить из того, что интерференционные картины, создаваемые излучателями, находящимися в разных точках протяженного квазимонохроматического источника с поперечником L , не должны замазывать друг друга в пределах области когерентности. Расстояние до источника R , длина волны λ .

480. Вывести оценочную формулу (VIII.36) для параметра вырождения δ .

481. Квазимонохроматический источник имеет поперечный размер L и испускает свет с длиной волны λ . Оценить порядок величины того телесного угла $\Delta\Omega$, в котором его излучение когерентно.

482. Каковы поперечная и продольная длина, а также телесный угол и объем когерентности излучения, испускаемого атомами натрия, находящимися в атмосфере Солнца. Наблюдается (на Земле) спектральная линия с длиной волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, масса атома $m = 3,7 \cdot 10^{-23}$. Главный вклад в ширину спектральной линии дает тепловое движение атомов (температура $T \approx 6000 \text{ К}$).

УКАЗАНИЕ. Доплеровская ширина спектральной линии

$$\gamma_D = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT}{m\lambda_0^2}},$$

где k — постоянная Больцмана (см. задачу 795).

483. Как изменятся результаты предыдущей задачи, если с Земли наблюдается звезда типа Солнца, находящаяся на расстоянии 10 световых лет?

484. Определить продольную и поперечную длины, а также объем когерентности в непосредственной близости от квантового оптического генератора, работающего на длине волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см с разбросом частот $\Delta\nu = 10^2$ гц. Диаметр зеркал $D = 5$ см.

485. Найти параметр вырождения δ излучения абсолютно черного тела, находящегося при температуре T . Сделать численные оценки для $\lambda = 1$ см и $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 273^\circ$ и для $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 10\,000^\circ$.

УКАЗАНИЕ. Спектральная плотность энергии излучения черного тела

$$I_\nu = \frac{4\pi\nu^2\hbar\omega}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp \frac{2\pi\hbar\nu}{kT} - 1},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана.

486. Найти параметр вырождения для квантового оптического генератора, рассмотренного в задаче 484. Мощность излучения 200 вт. Какой эффективной температуре отвечает это значение δ ?

487. Связать автокорреляционную функцию $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \overline{u(\mathbf{r}, t)u^*(\mathbf{r}, t + \tau)}$ со спектром мощности $I(\omega)$ излучения. Интенсивность излучения $I = \overline{u^*(t)u(t)} = \int_0^\infty I(\omega) d\omega$.

488. Найти автокорреляционную функцию излучения, если линия испускания узкая и имеет прямоугольную форму в интервале шириной $\Delta\omega$ около ω_0 . Интенсивность излучения I .

489. В интерференционном опыте Юнга наблюдается интерференционная картина в области перекрытия пучков, дифрагировавших на двух отверстиях (рис. 26). Отверстия расположены на расстоянии D друг от друга в точках с координатами $(0, 0)$ и (x, y) . Источник света протяженный, его размер значительно превышает D и он находится на расстоянии R от отверстий ($R \gg D$). Свет достаточно монохроматичен, так что для каждого из независимых излучателей выполняется условие временной когерентности. Выразить коэффициент частичной когерентности через распределение интенсивности $I(x, y)$ излучения по поперечнику источника света.

490. Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой вариант интерференционной схемы Юнга, в которой расстояние между отверстиями может изменяться. Найти зависимость видимости V интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния D между отверстиями и от длины волны λ для двух случаев.

а) Наблюдается двойная звезда — система двух близких звезд, находящихся на угловом расстоянии α друг от друга. Каждую из звезд можно рассматривать как точечный источник света. Считать светимости обеих звезд одинаковыми.

б) Наблюдается одиночная звезда больших размеров с угловым поперечником α (можно рассматривать эту звезду как равномерно излучающий диск).

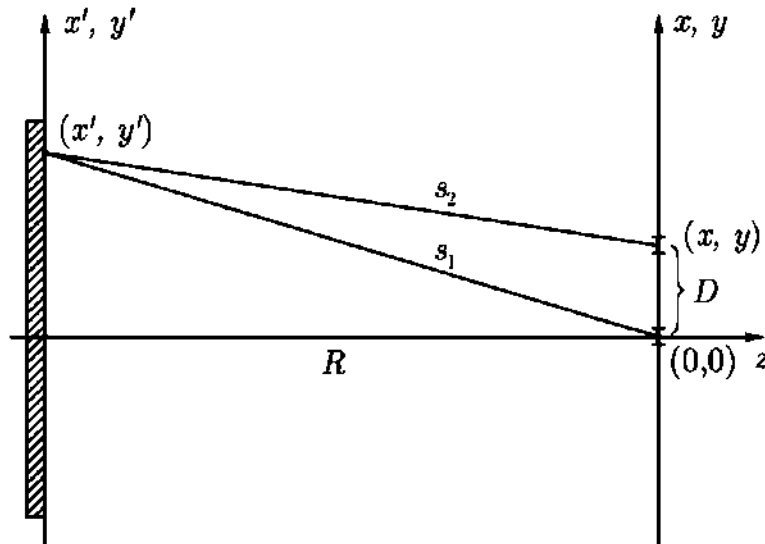


Рис. 26

491. В звездный интерферометр Майкельсона, рассмотренный в предыдущей задаче, поступает свет от двойной звезды или от одиночной звезды больших размеров. При увеличении расстояния D между отверстиями видимость интерференционных полос ослабевает и при некотором значении $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ между компонентами двойной звезды Капелла, находящейся от нас на расстоянии $R = 44,6$ световых лет, если $D_0 = 70,8$ см, а наблюдение ведется на длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; б) диаметр d звезды Бетельгейзе, расстояние до которой составляет 652 световых года, если $D_0 = 720$ см, а $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см.

УКАЗАНИЕ. Первый ненулевой корень функции Бесселя $I_1(x)$ равен $x_1 = 3,8317$.

492. В интерферометре Брауна и Твисса (рис. 27) независимо детектируются, а затем перемножаются и регистрируются интенсивности света, идущего от двух удаленных некогерентных точечных источников или от различных точек одного протяженного источника. Волны, идущие от источников, можно считать плоскими (волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2), их амплитуды и фазы флуктуируют случайным образом. Показать, что с помощью интерферометра Брауна и Твисса можно путем наблюдения корреляции между интенсивностями измерять угловое расстояние между источниками.

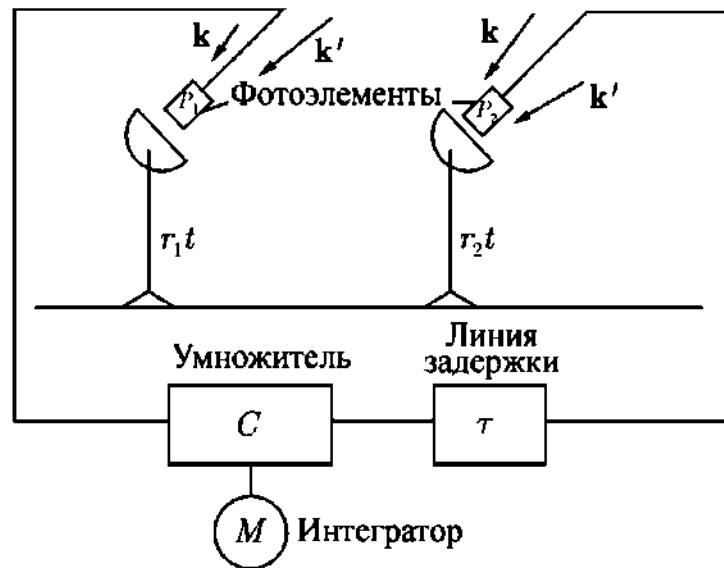


Рис. 27

493. Плоская волна (длина волны λ) падает почти нормально на боковую поверхность тонкой призмы с углом $\alpha \ll 1$ при вершине и показателем преломления n . Найти зависимость от x (рис. 28а) фазового сдвига, который приобретает волна в плоском слое $ABCD$, часть которого занята призмой.

494. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1 , R_2 и показателем преломления n (рис. 28б). Длина волны λ , угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от x фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.

495. Монохроматическая плоская волна (длина волны λ) от квантового оптического генератора падает на бизеркало Френеля (рис. 29) с углом $\vartheta \ll 1$ между плоскостями зеркал. В области перекрытия двух плоских волн, идущих от бизеркала, образуется интерференционное волновое поле. На фотопластинке, помещенной в эту область и образующей угол $\vartheta_1 \ll 1$

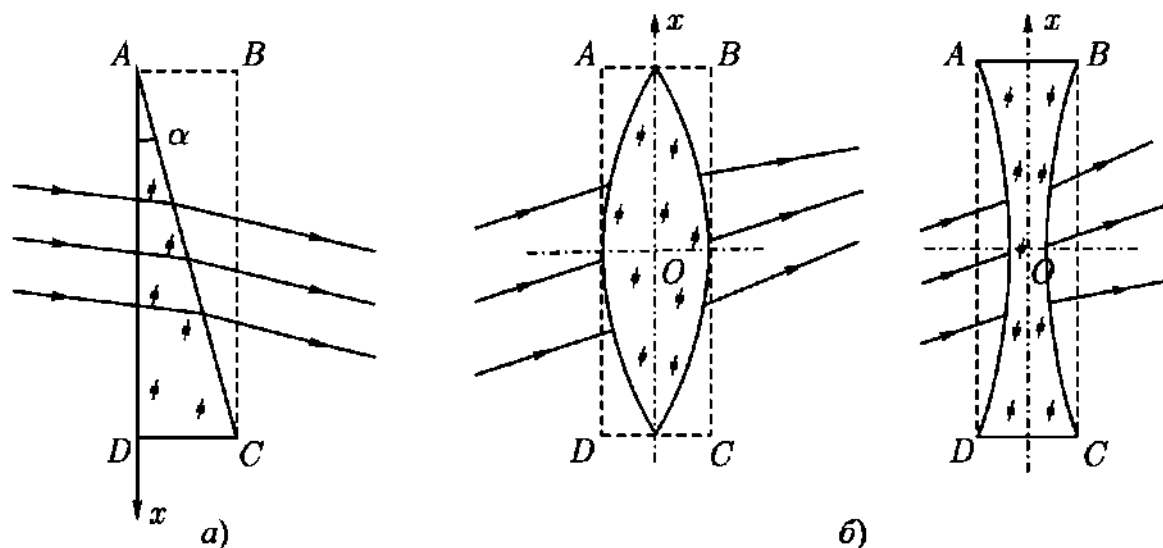


Рис. 28

с фронтом одной из волн, возникает система прозрачных и темных интерференционных полос. Какое волновое поле образуется за этой фотопластинкой, если после проявления пропустить сквозь нее нормально к поверхности плоскую волну от того же самого оптического генератора?

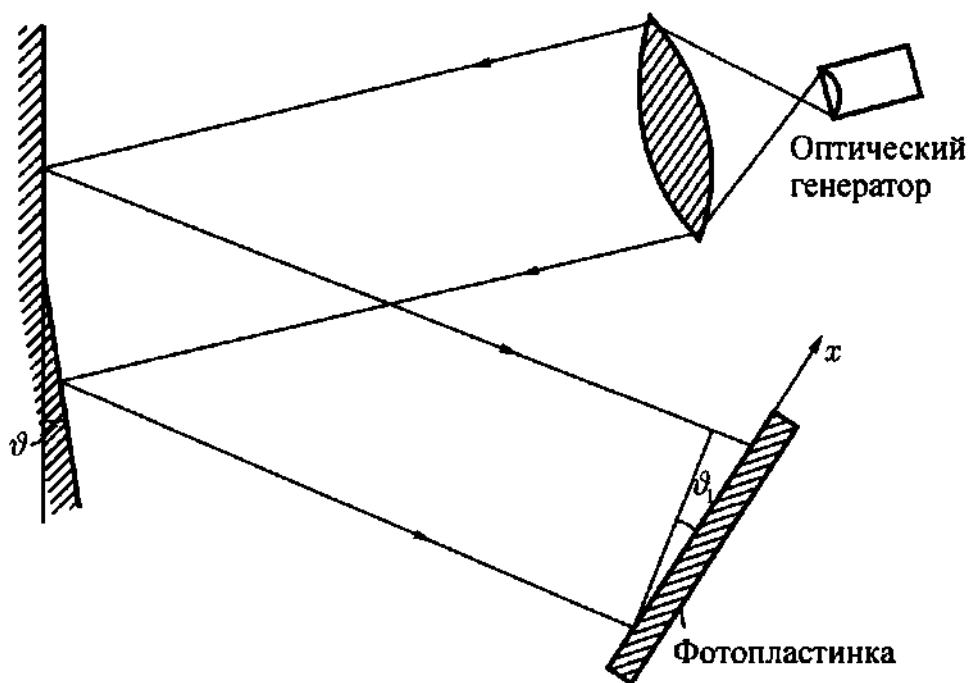


Рис. 29

496. Плоская монохроматическая волна проходит одновременно через призму и отверстие в непрозрачном экране, находящемся на расстоянии f (рис. 30). Призма тонкая, преломляющий угол $\alpha \ll 1$, а показатель преломления ее вещества n . На фотопластинке возникает некоторое распределение интенсивности поля за счет интерференции между «опорной» плоской волной (часть волны, прошедшая через призму и отклоненная вниз) и волной, дифрагировавшей на отверстии (угол дифракции считать малым). Найти это распределение.

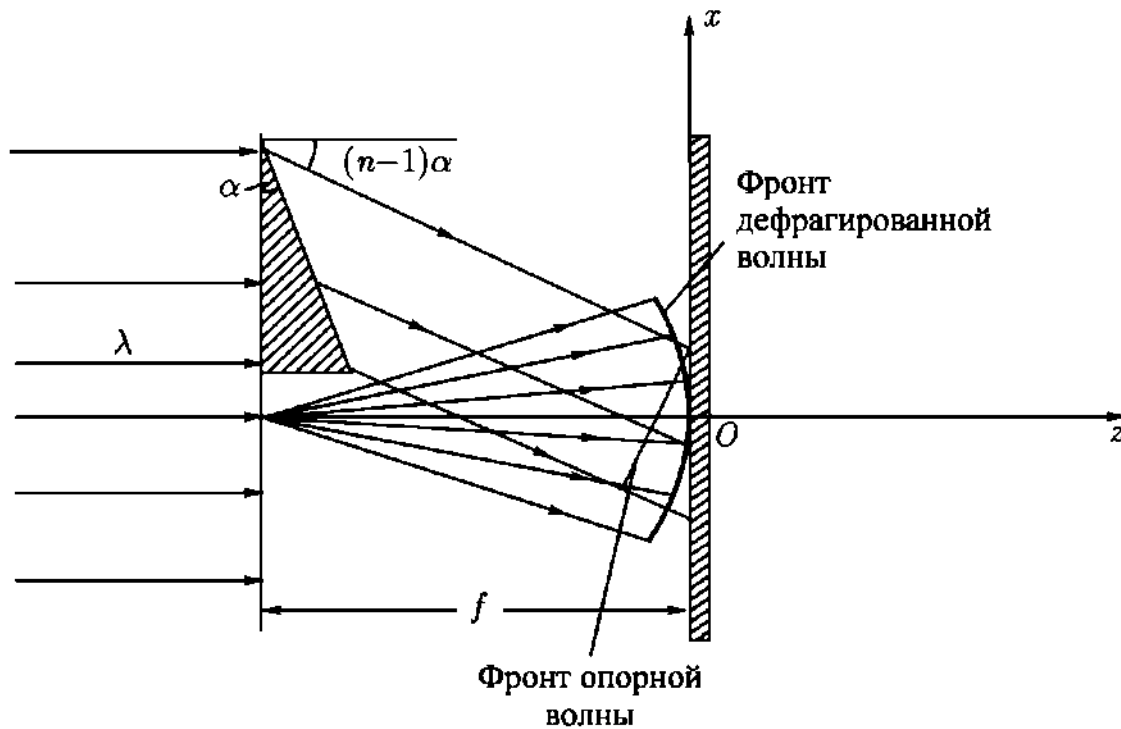


Рис. 30

497. Найти распределение пропускания $T(x)$ сквозь голограмму, полученную в условиях, описанных в предыдущей задаче. Считать при этом, что при создании голограммы интенсивность опорной волны была велика по сравнению с интенсивностью волны, прошедшей сквозь отверстие. Проследить за процессом восстановления первоначальных волновых фронтов при пропускании через эту голограмму нормально падающей плоской монохроматической волны $u_0 = A'_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ (длина волны та же, что и у первичной волны). В частности, проследить за возникновением точечного изображения первоначального отверстия.

УКАЗАНИЕ. Волновое поле за голограммой можно получить простым умножением падающей на голограмму волны $u_0(x)$ на пропускание $T(x)$. Для интерпретации получившегося выражения следует обратиться к решениям задач 493, 494.

498. На установке, рассмотренной в задачах 496, 497, получается голограмма двух отверстий, находящихся на расстоянии $2D$ друг от друга в плоскости призмы. По этой голограмме восстанавливается изображение двух отверстий. Найти это изображение и выяснить, в каком случае оно будет увеличенным.

УКАЗАНИЕ. Голограмму можно освещать при восстановлении изображения светом с длиной волны λ' , не совпадающей с той λ , которая применялась при получении голограммы.

499. Определить разрешающую способность голограммы, которая получена на установке типа, рассмотренного в задаче 496. Голограмма выполнена на фотопластинке с размером зерен эмульсии d

§ 5. Дифракция рентгеновых лучей

При рассмотрении рассеяния рентгеновых лучей на макроскопических телах существенным является то обстоятельство, что длина волны λ сравнима с размерами a атомов. В конденсированных средах тот же порядок величины имеют межатомные расстояния, в газах эти расстояния много больше a . Вследствие этого становится невозможным усреднение по физически малым элементам объема, содержащим много атомов. Однако в том случае, когда частота рентгеновых лучей велика по сравнению с характерными атомными частотами $\omega_{ат} \sim v_{ат}/c$, электроны среды можно рассматривать как свободные. Так как для свободных (к тому же нерелятивистских) электронов уравнения движения во внешнем электромагнитном поле легко интегрируются, то может быть вычислен наведенный полем ток и определена диэлектрическая проницаемость, зависящая от координат \mathbf{r} :

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 - \frac{4\pi e^2 n(\mathbf{r})}{m\omega^2}. \quad (\text{VIII.42})$$

Здесь $n(\mathbf{r})$ — концентрация электронов в теле, определяемая законами квантовой механики, усредненная по равновесному статистическому распределению состояний теплового движения атомов.

Уравнения Максвелла имеют свой обычный вид (VIII.1)–(VIII.4) с диэлектрической проницаемостью (VIII.42) и магнитной проницаемостью $\mu = 1$, если $4\pi e^2 n/m\omega^2 \ll 1$.

Пусть на некоторое тело конечной протяженности падает плоская волна $\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega t)]$ рентгеновой частоты $\omega \gg \omega_{ат}$. Для того чтобы падающее излучение можно было рассматривать как плоскую поляризованную волну, необходимо, чтобы размеры тела были малы по сравнению с длиной

когерентности¹. При этом дифференциальное сечение рассеяния линейно поляризованной волны (определение понятия сечения дано в § 3 этой главы) имеет вид

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2 \theta \left| \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\Omega, \quad (\text{VIII.43})$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, \mathbf{k} — волновой вектор рассеянной волны, $k = k_0 = \omega/c$, θ — угол между \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} , $d\Omega$ — элемент телесного угла направлений \mathbf{k} , $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ — переданный волновой вектор. Величина q связана с углом ϑ рассеяния волны (угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}) формулой

$$q = 2\frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (\text{VIII.44})$$

Сечение рассеяния неполяризованной рентгеновой волны

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left| \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\Omega. \quad (\text{VIII.45})$$

Условием применимости формул (VIII.43), (VIII.45) является требование, чтобы полное сечение $\sigma = \int_{(4\pi)} d\sigma$ было мало по сравнению с площадью

поперечного сечения образца в целом.

В случае дифракции рентгеновых лучей на идеальном монокристалле сечения (VIII.43) или (VIII.45) обнаруживают ряд резких максимумов, положение которых определяется уравнением Лауэ

$$\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{g}, \quad (\text{VIII.46})$$

где \mathbf{g} — векторы обратной решетки. Если элементарная кристаллическая ячейка имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3 , то

$$\mathbf{g} = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3} \right),$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа.

Если интеграл того вида, который входит в (VIII.43) или (VIII.45), берется по объему V_a одного атома, то он называется атомным формфактором:

$$F_a(\mathbf{q}) = \int_{V_a} n_a(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV. \quad (\text{VIII.47})$$

¹Определение длины когерентности см. в § 4 этой главы

Атомный формфактор представляет собой просто компоненту Фурье от распределения $n_a(\mathbf{r})$ электронов в атоме и через него можно с помощью обратного преобразования Фурье выразить $n_a(\mathbf{r})$.

Подробнее вопрос о дифракции рентгеновых лучей рассмотрен, например, в [63], [66].

500. Выяснить, при каких условиях сечение рассеяния рентгеновых лучей на телах конечной протяженности принимает вид сечения рассеяния на свободных зарядах (формула Томсона). Написать соответствующие выражения для сечений. Число атомов в теле N , число электронов в каждом атоме Z .

501. Распределение электронной концентрации в Z -электронном атоме аппроксимируется выражением $n_a(r) = n_{0a} \exp\left[-\frac{r}{a}\right]$, где $n_{0a} = Z/\pi a^3$, $a = a_0/Z^{1/3}$, $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти дифференциальное сечение рассеяния волны рентгенового диапазона на одноатомном газе, содержащем N атомов, считая распределение атомов совершенно хаотическим.

502. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа, содержащем N двухатомных молекул. Атомы в молекуле одинаковы и находятся на фиксированном расстоянии R друг от друга. Принять, что формфактор $F_a(q)$ атома, входящего в состав молекулы, тот же, что и у изолированного атома.

503. Как изменится сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа из двухатомных молекул, рассмотренном в предыдущей задаче, если учесть тепловые колебания атомов в молекуле.

УКАЗАНИЕ. Считать, что расстояния R между атомами распределены около среднего значения $R_0 \gg b$ по закону $dW_x = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{b^2}\right] dx$, где $x = R - R_0$,

$b = \sqrt{\frac{2kT}{\mu\omega^2}}$, T — температура, μ — приведенная масса, ω — частота собственных колебаний атомов в молекуле.

504. Вывести уравнение Лауэ (VIII.46) и условие Брэгга–Вульфа $k \sin(\vartheta/2) = \pi |g|$, где $|g|$ — длина вектора обратной решетки, рассматривая интерференцию волн, рассеянных на отдельных центрах идеальной кристаллической решетки.

505. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на идеальном монокристалле, состоящем из N одинаковых атомов с формфакторами $F_a(q)$ (считать, что эти формфакторы те же, что и в случае изолированных атомов).

Элементарная ячейка имеет форму куба с ребром a , кристалл имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3 , параллельными ребрам элементарной ячейки. Определить положение главных максимумов, убедиться в выполнении уравнения Лауэ (VIII.46). Найти величину сечения в этих максимумах.

506. Кристалл состоит из кубических элементарных ячеек с ребром a и имеет форму прямой призмы с прямоугольным равнобедренным треугольником в основании (катеты основания $L_1 = L_2$, боковое ребро L_3). Определить положения главных максимумов, найти величину сечения в этих максимумах.

507. Найти распределение интенсивности в дифракционном пятне вблизи одного из главных максимумов при рассеянии рентгеновых лучей на монокристалле, рассмотренном в задаче 505. Волновой вектор падающих рентгеновых лучей параллелен ребру L_3 , а $k \gg 1/a$. Определить ширину дифракционного максимума и полное сечение, отвечающее рассеянию в пределах одного дифракционного пятна.

508. Вычислить распределение интенсивности в дифракционном пятне вокруг главного максимума при произвольном направлении падения и произвольном соотношении между k и $1/a$. Рентгеновы лучи рассеиваются на монокристалле, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3 (см. задачу 505).

509. Решить предыдущую задачу для случая рассеяния на монокристаллическом образце шарообразной формы (радиус R).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65, 66], Борн М. [16], Бейтмен Г. [10], Тамм И. Е. [101], Зоммерфельд А. [55], Френкель Я. И. [111], Стрэттон Дж. А. [100], Смайт В. [93], Джексон Дж. [52], Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. [3], Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И. [5], Власов А. А. [25], Пановский В., Филипс М. [86], Вайнштейн Л. А. [23], Гуревич А. Г. [48], Шифрин К. С. [116], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Борн М., Вольф Э. [18], Микаэлян А. Л. [78], Горелик Г. С. [43], Эйхенвальд А. А. [118], Альвен Х., Фельтхаммар К. Г. [2], Компанец А. С. [60], Гинзбург В. Л., Мотулевич Г. П. [34], Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. [42], Строук Дж. [99], О'Нейл Э. [84], Вольф Э., Мандель Л. [27], Кривоглаз М. А. [63], Франсон М., Сланский С. [120].

ГЛАВА IX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ

Часть пространства, ограниченная со всех сторон металлическими стенками, называется полым резонатором. В резонаторе может существовать система стоячих волн с определенными частотами ω (собственными частотами резонатора). Эта система волн определяется (в случае не заполненного диэлектриком резонатора с идеально проводящими стенками) путем решения уравнений

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{IX.1})$$

с граничным условием

$$\mathbf{E}_\tau = 0. \quad (\text{IX.2})$$

Собственные функции резонатора \mathbf{E}_ν ,¹ отвечающие различным собственным частотам ω_ν , взаимно ортогональны. Собственные функции, соответствующие одной и той же частоте (их может быть несколько — см. задачи 529, 531), также можно выбрать взаимно ортогональными. Условимся нормировать их на 4π :

$$\int \mathbf{E}_{\nu'} \cdot \mathbf{E}_\nu dV = 4\pi \delta_{\nu\nu'}, \quad (\text{IX.3})$$

где интеграл берется по объему резонатора. Этому же условию удовлетворяют собственные функции \mathbf{H}_ν , которые выражаются через \mathbf{E}_ν с помощью уравнений Максвелла.

Вследствие потерь энергии в стенках или в веществе, заполняющем резонатор, а также излучения энергии во внешнее пространство, свободные колебания реальных резонаторов являются затухающими. Потери энергии

¹Значком ν обозначена совокупность четырех величин, однозначно определяющих собственный тип колебаний («моду») резонатора.

данного типа колебаний характеризуются добротностью Q_ν , которая определяется отношением

$$Q_\nu = \frac{\tilde{\omega}_\nu W_\nu}{P_\nu} \quad \text{или} \quad Q_\nu = \frac{\tilde{\omega}_\nu}{2\gamma_\nu}. \quad (\text{IX.4})$$

Здесь W_ν — энергия, запасенная в резонаторе, P_ν — средняя (по времени) мощность потерь; $\tilde{\omega}_\nu$ — резонансная частота, которая может отличаться от резонансной частоты идеального резонатора; γ_ν — декремент затухания.

В отличие от резонатора, волновод представляет собою полость (трубу) неограниченной длины. Вдоль оси волновода (ось z) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей. В общем случае волны в волноводе не являются поперечными. Волны, у которых $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ называются волнами электрического типа, волны с $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ — волнами магнитного типа. Только в волноводах с неодносвязной формой поперечного сечения возможны чисто поперечные электромагнитные волны.

Типы волн, которые могут распространяться в данном волноводе, определяются путем решения уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Волна, бегущая вдоль оси волновода, описывается функциями

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathcal{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(r, t) = \mathcal{H}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

Здесь ω — частота волны, k — составляющая волнового вектора в направлении оси волновода. Величину k называют также постоянной распространения.

В случае волн электрического типа (E -волн) $\mathcal{H}_z = 0$, а \mathcal{E}_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathcal{E}_z + \kappa^2 \mathcal{E}_z = 0, \quad (\text{IX.5})$$

где $\kappa^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} - k^2$, κ — поперечная составляющая волнового вектора, ϵ и μ — проницаемости диэлектрика, заполняющего волновод, и граничному условию

$$\mathcal{E}_z = 0 \quad (\text{IX.6})$$

на стенке волновода.

В случае волн магнитного типа (H -волн) $\mathcal{E}_z = 0$, а \mathcal{H}_z является решением уравнения

$$\Delta \mathcal{H}_z + \kappa^2 \mathcal{H}_z = 0, \quad (\text{IX.7})$$

удовлетворяющим граничному условию

$$\mathcal{E}_\tau = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0 \quad (\text{IX.8})$$

на стенке волновода.

В уравнениях (IX.5) и (IX.7) Δ — двумерный оператор Лапласа. Граничные условия (IX.6) и (IX.8) строго справедливы только для волноводов с идеально проводящими стенками.

Поперечные составляющие векторов \mathcal{E} и \mathcal{H} могут быть выражены с помощью уравнений Максвелла через продольные составляющие этих векторов.

E - или H -волна заданного типа (т. е. с определенным значением \varkappa) может распространяться в волноводе с односвязной формой сечения только в том случае, если ее частота больше некоторой граничной частоты ω_0 . Соответствующая «длина волны в вакууме» $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ — порядка линейного размера сечения волновода. При $\omega < \omega_0$ постоянная распространения k становится чисто мнимой, поэтому распространение волны невозможно. Однако и при $\omega > \omega_0$ k в общем случае комплексно.

Это связано с тем, что стенки волновода имеют конечную проводимость, поэтому в них происходит диссипация энергии и электромагнитная волна затухает по закону $e^{-\alpha z}$. Коэффициент затухания α (мнимая часть k) равен отношению энергии, диссипируемой в единицу времени в стенках волновода на единице его длины, к удвоенному потоку энергии вдоль волновода. В случае, когда поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ стенок мал, можно получить приближенные выражения коэффициента затухания для E -волн:

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{2 \varkappa k c} \cdot \frac{\oint |\nabla \mathcal{E}_z|^2 dl}{\int |\mathcal{E}_z|^2 dS} \quad (\text{IX.9})$$

и для H -волн:

$$\alpha = \frac{c \varkappa^2 \zeta'}{2 k \omega} \cdot \frac{\oint [|\mathcal{H}_z|^2 + (k^2 / \varkappa^4) |\nabla \mathcal{H}_z|^2] dl}{\int |\mathcal{H}_z|^2 dS}. \quad (\text{IX.10})$$

Здесь \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z — компоненты полей, вычисленные при $\zeta = 0$ (т. е. в предположении идеальной проводимости стенок волновода), dl — элемент контура поперечного сечения волновода, dS — элемент площади этого сечения.

510. Определить типы волн, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками (длины сторон a, b). Найти для них закон дисперсии и конфигурации полей (т. е. зависимость компонент поля от координат).

511. Определить коэффициенты затухания α разных типов волн в прямоугольном волноводе. Поверхностный импеданс стенок волновода ζ задан.

512. Бесконечно протяженный диэлектрический слой заполняет в вакууме область $-a \leq x \leq a$ и имеет проницаемости ϵ и μ . Показать, что такой слой может действовать как волновод (для этого нужно, чтобы поле бегущей электромагнитной волны концентрировалось, в основном, внутри слоя). Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе. Ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y .

513. Диэлектрический слой с проницаемостями ϵ , μ , заполняющий область $0 \leq x \leq a$, нанесен на поверхность идеального проводника. В области $x > a$ — вакуум. Какие типы электромагнитных волн с амплитудой, убывающей при удалении от слоя, могут распространяться вдоль слоя? Сравнить возможные типы волн с системой волн, полученной в предыдущей задаче.

514. Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода.

515. Используя результат предыдущей задачи, найти коэффициенты затухания α разных типов волн в круглом волноводе. Поверхностный импеданс стенок ζ задан.

516. Определить фазовую v_φ и групповую v_g скорости волн в прямоугольном и круглом волноводах с идеально проводящими стенками. Построить их зависимость от $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

517. Определить фазовую v_φ и групповую v_g скорости волн в волноводе геометрическим методом. Для этого рассмотреть простейшую волну типа H_{10} в прямоугольном волноводе, разложить ее на плоские волны и исследовать отражение этих волн от стенок волновода.

518. Исследовать структуру поперечной электромагнитной волны в идеально проводящей коаксиальной линии (большой и малый радиусы соответственно b и a). Подсчитать средний поток энергии $\bar{\gamma}$ вдоль линии. Рассмотреть предельный случай одиночного идеально проводящего провода.

519. Определить возможные типы непоперечных электромагнитных волн в коаксиальной линии с идеально проводящими стенками (радиусы a и $b > a$).

520. Определить коэффициент затухания α поперечной электромагнитной волны в коаксиальной линии. Заданы радиусы a , $b > a$ и поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$.

УКАЗАНИЕ. Использовать приведенное в начале главы определение коэффициента затухания через потери энергии.

521*. Рассмотреть распространение аксиально симметричной волны электрического типа вдоль одиночного бесконечно длинного цилиндрического проводника с конечной проводимостью, находящегося в вакууме. Определить фазовую скорость волны. Показать, что в случае идеально проводящего провода волна перейдет в поперечную электромагнитную волну (см. задачу 518. Использовать приближенное граничное условие Леонтовича (см. (VIII.10)).

522. Аксиально симметричная E -волна распространяется в круглом волноводе радиуса b , частично заполненном диэлектриком. Диэлектрик имеет проницаемость ϵ и занимает область $a \leq r \leq b$. Считая $a \ll b$, определить зависимость фазовой скорости от частоты и граничную частоту. При каких условиях фазовая скорость будет меньше c ? Рассмотреть предельный случай волновода, полностью заполненного диэлектриком.

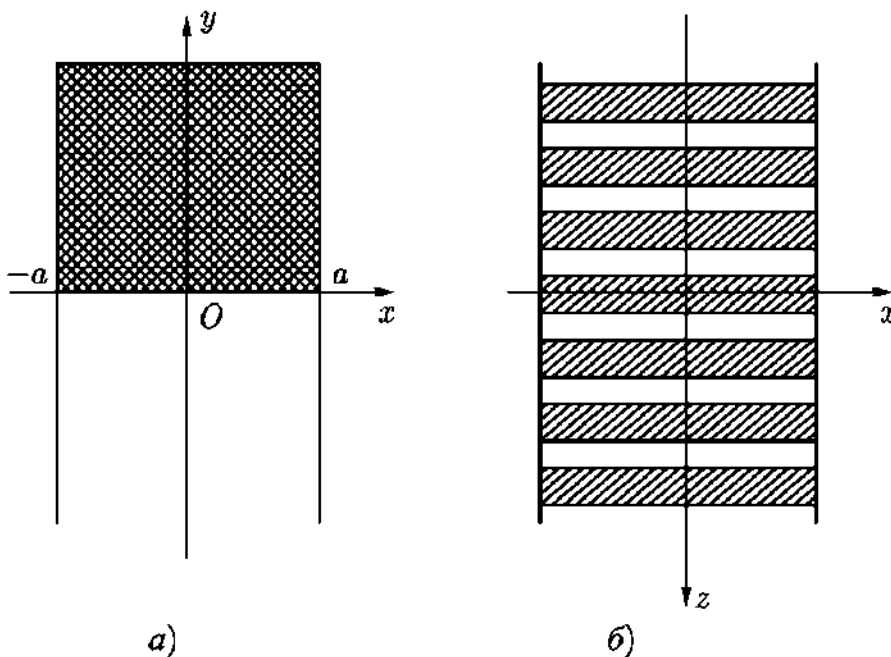


Рис. 31

523. Между двумя идеально проводящими плоскостями $x = \pm a$ (рис. 31а) помещена в плоскости $y = 0$ лестничная перегородка (рис. 31б), состоящая из тонких металлических полосок, ориентированных вдоль оси x . Расстояния между полосками и их ширина малы по сравнению с длиной волны. Область $y > 0$ над лестничной перегородкой заполне-

на диэлектриком с проницаемостью ϵ , в области $y < 0$ — воздух. Найти возможные типы бегущих волн, которые могут распространяться в такой системе вдоль оси z . Как связана постоянная распространения этих волн с частотой?

УКАЗАНИЕ. Лестничную перегородку для достаточно длинных волн можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость, проводимость которой в направлении оси x бесконечна, а в направлении z равна нулю.

524. Прямоугольный волновод с поперечным сечением $a \times b$ и идеально проводящими стенками заполнен ферродиелектриком. Постоянное магнитное поле приложено перпендикулярно широкой стенке волновода (вдоль оси y). Тензоры электрической и магнитной проницаемостей ферродиелектрика имеют вид

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & -i\epsilon_a \\ 0 & \epsilon_{\parallel} & 0 \\ i\epsilon_a & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & 0 & -i\mu_a \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ i\mu_a & 0 & \mu_{\perp} \end{pmatrix}$$

(ср. с результатом задачи 331). Определить составляющие электромагнитного поля, постоянную распространения и граничную частоту волновода для случая, когда поле не зависит от y .

525. Электрическое и магнитное поля в волноводе с идеально проводящими стенками, не содержащем диэлектрика, описываются функциями

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}_0(x, y)e^{i(k_0z - \omega t)}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathcal{H}_0(x, y)e^{i(k_0z - \omega t)}.$$

Если в волновод вставить диэлектрический сердечник, имеющий форму цилиндра произвольного сечения с осью, параллельной оси волновода, то поля в волноводе примут вид

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathcal{H}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

Диэлектрик в общем случае может характеризоваться тензорными параметрами ϵ_{ik} , μ_{ik} . Показать с помощью уравнений Максвелла, что постоянная распространения изменится на величину

$$\Delta k = k - k_0 = \frac{\omega \int (\Delta\epsilon_{ik} \cdot \mathcal{E}_k \mathcal{E}_{0i}^* + \Delta\mu_{ik} \cdot \mathcal{H}_k \mathcal{H}_{0i}^*) dS}{c \int_S [(\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) + (\mathcal{E} \times \mathcal{H}_0^*)] \cdot \mathbf{e}_z dS},$$

где $\Delta\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik} - 1$, $\Delta\mu_{ik} = \mu_{ik} - 1$, интеграл в числителе берется по площади сечения диэлектрического стержня (ΔS), интеграл в знаменателе — по площади сечения волновода (S).

526. В прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками вносится ферродиелектрическая пластинка толщиной $d \ll a$, намагниченная вдоль оси волновода (рис. 32). Пользуясь формулой, полученной в предыдущей задаче, определить с точностью до членов порядка d изменение Δk постоянной распространения волны типа H_{10} . Диэлектрическая проницаемость пластинки — скалярная величина, тензор ее магнитной проницаемости приведен в условии задачи 435.

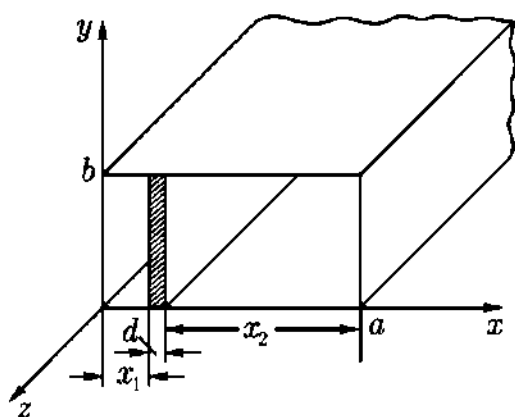


Рис. 32

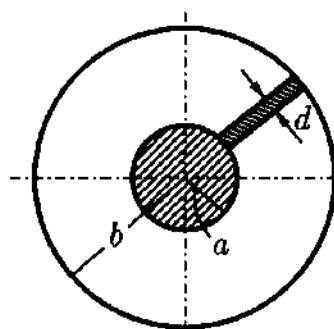


Рис. 33

527. В коаксиальный волновод (рис. 33) вставлена тонкая ферритовая пластина ($d < a, b$), намагниченная вдоль оси волновода. Определить изменение Δk постоянной распространения поперечной электромагнитной волны.

УКАЗАНИЕ. Амплитуды возмущенных полей определить таким же методом, как в предыдущей задаче.

528. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное подмагничивающее поле H_0 направлено перпендикулярно оси волновода. Рассмотреть два направления этого поля: а) H_0 перпендикулярно широкой грани пластинки; б) H_0 перпендикулярно узкой грани пластинки.

529. Определить типы собственных колебаний в полном резонаторе с идеально проводящими стенками. Резонатор имеет форму прямоугольного параллелепипеда, его размеры $a \times b \times h$.

530. Определить число собственных колебаний $\Delta N(\omega)$, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$ в полном резонаторе объема V , рассмотренном в предыдущей задаче. Считать, что выполняются неравенства $\Delta\omega \ll \omega$ и $\Delta N \gg 1$.

531. Резонатор имеет форму прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса a . Считая стенки резонатора идеально проводящими, найти частоты собственных колебаний. Рассмотреть колебания электрического и магнитного типов.

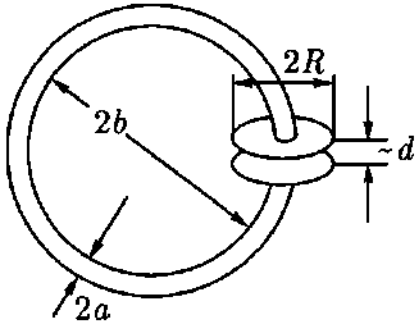


Рис. 34

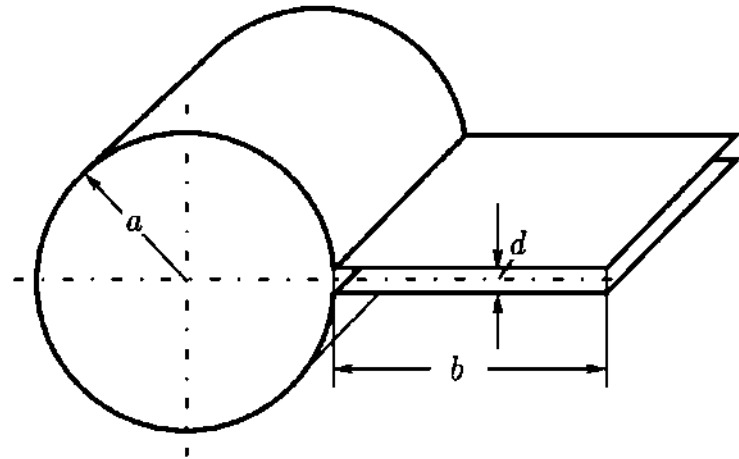


Рис. 35

532. Две круглые металлические пластинки радиуса R находятся на малом расстоянии d друг от друга, образуя конденсатор. Обкладки конденсатора замкнуты проводником толщиной $2a$, имеющим форму кольца радиуса b (рис. 34). Найти собственную частоту колебаний такого «открытого резонатора», предполагая применимым квазистационарное приближение. Все проводники считать идеально проводящими.

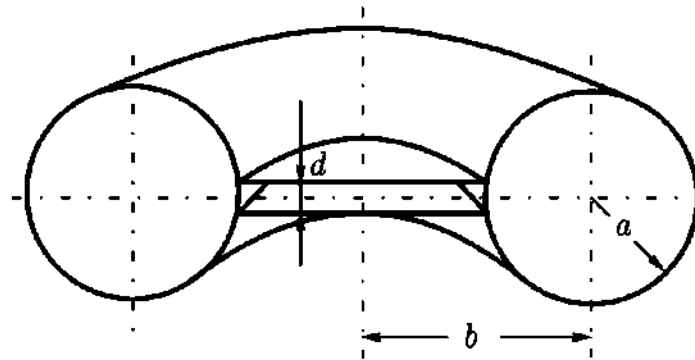


Рис. 36

533. Найти собственную частоту ω_0 колебаний системы, изображенной на рис. 35, предполагая, что соответствующая ей длина волны λ_0 велика

по сравнению с размерами системы. Потерями энергии и краевыми эффектами пренебречь.

534. Для уменьшения потерь энергии на излучение вместо открытого колебательного контура (см. рис. 34) используют закрытый резонатор, состоящий из соединенных вместе тороидальной камеры и плоского конденсатора с круглыми пластинами (его разрез и размеры показаны на рис. 36). Найти собственную частоту ω_0 основного типа колебаний такого резонатора в квазистационарном приближении. При каких условиях применимо такое приближение? Стенки резонатора считать идеально проводящими.

535. Решить предыдущую задачу для тороидального резонатора с камерой прямоугольного сечения (рис. 37).

536. Резонатор представляет собой цилиндр кругового сечения (внутренний радиус b , высота h), вдоль оси которого вставлен идеально проводящий стержень радиуса a (рис. 38). Стенки цилиндра также обладают идеальной проводимостью. Между стержнем и одним из торцов цилиндра оставлен зазор d . Найти собственные частоты поперечных относительно оси системы электромагнитных колебаний, считая, что длина волны этих колебаний много больше зазора d (но не высоты h цилиндра). Как изменится спектр колебаний при $d \rightarrow 0$?

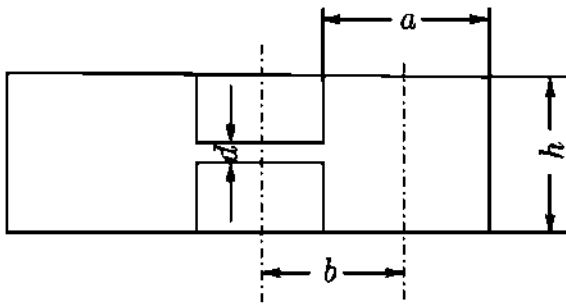


Рис. 37

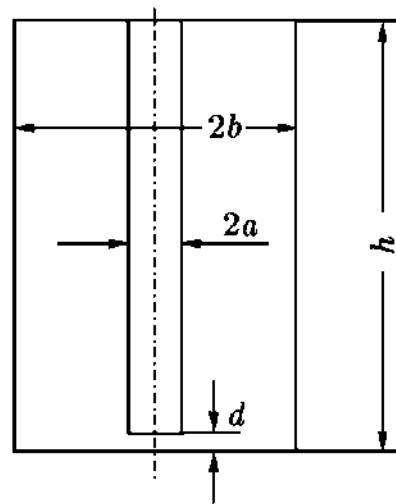


Рис. 38

537. Известны собственные частоты колебаний ω_ν и собственные функции E_ν, H_ν резонатора с идеально проводящими стенками. Вычислить изменение собственных частот, вызванное конечной проводимостью стенок резонатора. Поверхностный импеданс ζ стенок мал.

УКАЗАНИЕ. Искать решение уравнений Максвелла в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} q_{\nu}(t) \mathbf{E}_{\nu}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} p_{\nu}(t) \mathbf{H}_{\nu}(\mathbf{r}),$$

где q_{ν} и p_{ν} — неизвестные функции времени. Вывести уравнения для q_{ν} и p_{ν} с точностью до членов, линейных по ζ и исследовать их решения.

538. Полый резонатор имеет форму куба со стороной a . Проводимость стенок σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Вычислить добротность резонатора для произвольного типа колебаний. Как она зависит от частоты? При каких частотах резонансные свойства системы исчезнут?

539. Полый резонатор, стенки которого имеют поверхностный импеданс ζ , возбуждается сторонним током $\mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, текущим внутри резонатора. Частота тока ω близка к одной из собственных частот резонатора. Найти электромагнитное поле, возбуждаемое в резонаторе, и его зависимость от частоты ω вблизи резонанса.

УКАЗАНИЕ. Использовать метод решения, развитый в задаче 537.

540. Открытый резонатор инфракрасного диапазона состоит из двух параллельных круглых зеркал диаметром D , находящихся на расстоянии L друг против друга (рис. 39). Пусть собственное колебание такой системы реализуется в виде двух волн с $\lambda \ll L, D$, распространяющихся перпендикулярно плоскостям зеркал навстречу друг другу и образующих стоячую электромагнитную волну.

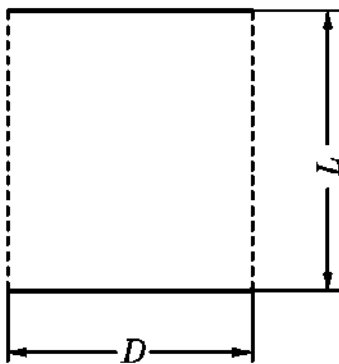


Рис. 39

Оценить по порядку величины добротность такого резонатора в приближении геометрической оптики. Учесть потери энергии при отражениях от зеркал (коэффициент отражения R) и излучение через боковую поверхность резонатора за счет дифракции. Параметры резонатора: $D = L = 1 \text{ см}$; $R = 0,95$; $\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$.

541. Зеркала открытого резонатора, рассмотренного в предыдущей задаче, слегка непараллельны. Угол между их плоскостями $\beta \ll 1$. Оценить дополнительные потери на излучение и соответствующий вклад в добротность резонатора, обусловленный непараллельностью зеркал. Какие значения угла β допустимы без существенного уменьшения полной добротности резонатора?

542. В резонаторе, образованном двумя параллельными зеркалами (см. рис. 39), собственные колебания с $\lambda \ll L, D$ осуществляются в виде

стоячих волн в пространстве между зеркалами. Рассмотреть тот тип колебаний, в котором волновой вектор стоячей волны составляет малый угол ϑ с нормалью к плоскостям зеркал.

а) Найти условие, определяющее возможные значения ϑ при заданной λ .

б) Оценить по порядку величины добротность резонатора как функцию угла ϑ . Рассмотреть различные соотношения между потерями в зеркалах и потерями на излучение.

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Вайнштейн Л. А. [23], Гуревич А. Г. [47, 48], де-Бройль Л. [51], Джексон Дж. [52], Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. [42], Пановский В., Филипс М. [86], Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. [7], Петрунькин В. Ю. [88], Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М. [9].

ГЛАВА X

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Преобразования Лоренца

Координаты и время в двух инерциальных системах отсчета S и S' связаны между собой формулами преобразования Лоренца¹:

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \quad (\text{X.1})$$

(соответствующие оси координат систем S и S' параллельны между собой, относительная скорость направлена вдоль оси Ox и при $t = t' = 0$ начала координат S и S' совпадают). Обратные преобразования Лоренца получаются как здесь, так и во всех других случаях (например, в формулах (X.4), (X.11)) изменением знака скорости V :

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right). \quad (\text{X.2})$$

Величины $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ являются координатами мировой точки

$$x_i = (ct, \mathbf{r}). \quad (\text{X.3})$$

Всякие четыре величины A_0, A_1, A_2, A_3 , преобразующиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой как координаты и время, т. е. по формулам

$$A_0 = \gamma(A'_0 + \beta A'_1), \quad A_1 = \gamma(A'_1 + \beta A'_0), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3 \quad (\text{X.4})$$

¹В этой и следующих главах применяются обозначения:

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где V — скорость системы S' относительно системы S .

образуют четырехмерный вектор (4-вектор) A_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Трехмерный вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ называют пространственной, а величину A_0 — временной составляющими 4-вектора A_i .

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов определяется следующим образом:

$$A_i B_i = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3. \quad (\text{X.5})$$

Как и раньше (см. гл. I), будем подразумевать суммирование по дважды повторяющемуся индексу, который теперь принимает значения 0, 1, 2, 3. При этом слагаемое с индексом 0 берется со знаком плюс, а слагаемые с индексами 1, 2, 3 — со знаком минус. Этим правилом знаков при суммировании будем пользоваться и в дальнейшем.

Квадраты 4-векторов A_i^2 , определенные в соответствии с (X.5), и их скалярные произведения $A_i B_i$ имеют одинаковые значения во всех инерциальных системах отсчета (инварианты относительно преобразований Лоренца). 4-вектор A_i называется пространственноподобным, если $A_i^2 < 0$, и времениподобным, если $A_i^2 > 0$.

Инвариантная величина

$$s_{12} = [(c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2)]^{1/2} \quad (\text{X.6})$$

называется интервалом между двумя событиями с координатами (\mathbf{r}_1, t_1) и (\mathbf{r}_2, t_2) .

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Если объект движется относительно системы S со скоростью V , то интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S по формуле

$$d\tau = dt \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (\text{X.7})$$

Величина $dt \sqrt{1 - \beta^2}$ является инвариантом преобразования Лоренца.

Если некоторый стержень в покое имеет длину l_0 , то при движении со скоростью v вдоль своей оси он имеет с точки зрения неподвижного наблюдателя длину

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{X.8})$$

Четырехмерной скоростью (4-скоростью) частицы называется 4-вектор, компоненты которого определяются формулой

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (\text{X.9})$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — обычная скорость частицы. Из (X.9) очевидно, что

$$u_i^2 = c^2. \quad (\text{X.10})$$

4-скорость, как и всякий 4-вектор, преобразуется по формулам (X.4).

Компоненты обычной скорости не являются пространственными составляющими какого-либо 4-вектора и преобразуются по формулам ($\mathbf{V} \parallel x$):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (\text{X.11})$$

Если скорость частицы составляет с осью x углы ϑ и ϑ' в системах S и S' соответственно, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{v' \cos \vartheta' + V}, \quad v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}. \quad (\text{X.12})$$

Четырехмерным ускорением частицы называется 4-вектор с компонентами

$$\omega_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d^2 x_i}{d\tau^2}. \quad (\text{X.13})$$

Волновой вектор \mathbf{k} и частота ω плоской электромагнитной волны являются компонентами волнового 4-вектора k_i :

$$k_i = \left(\frac{i\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (\text{X.14})$$

Поэтому фаза плоской волны $\varphi = -k_i x_i$ является инвариантом.

Из формул (X.4) следуют формулы преобразования угла ϑ , составляемого световым лучом с осью x :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{\gamma(\cos \vartheta' + \beta)} \quad \text{или} \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta'}. \quad (\text{X.15})$$

Задачи на преобразование Лоренца для энергии, импульса и силы собраны в § 1 гл. XI.

543. Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью V вдоль оси x . Часы, покоящиеся в S' в точке (x'_0, y'_0, z'_0) , в момент t'_0 проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S , где находятся часы, показывающие в этот момент время t_0 . Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

544. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . Доказать, что при сравнении хода часов в системах S и S' всегда будут отставать те часы в одной из этих систем отсчета, показания которых последовательно сравниваются с показаниями двух часов в другой системе отсчета. Выразить один промежуток времени через другой. (Показания движущихся часов сравниваются в момент, когда они проходят друг мимо друга.)

545. Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцово сокращение.

546. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время $t = t' = 0$. Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем S и S' показывают одно и то же время $t = t'$? Определить закон движения этой точки.

547. Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l . Один период — это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы параллельно направлению движения. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S формулой (X.7).

548. Решить предыдущую задачу для случая, когда световые часы ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости.

549. «Поезд» $A'B'$, длина которого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ км в системе, где он покоится, идет со скоростью $V = 240\,000$ км/сек мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове B' и хвосте A' «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизованные между собой. Такие же часы установлены в начале (A) и в конце (B) «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 час 00 мин. Ответить на следующие вопросы: а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 час 00 мин; б) сколько показывают каждые из часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»; в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом «платформы»?

550. Какой промежуток времени Δt занял бы по земным часам полет ракеты до звездной системы Проксима–Центавра и обратно (расстояние до нее 4 световых года¹), если бы он осуществлялся с постоянной скоростью $v = \sqrt{0,9999}c$? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запастись продовольствием и другим снаряжением? Каков запас кинетической энергии в такой ракете, если ее масса $10m$?

551. Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0 , равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x . Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время Δt . Какова относительная скорость v масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

552. Вывести формулы лоренцова преобразования от системы S' к системе S для радиуса-вектора \mathbf{r} и времени t , не предполагая, что скорость \mathbf{V} системы S' относительно S параллельна оси x . Результат представить в векторной форме.

УКАЗАНИЕ. Разложить \mathbf{r} на продольную и поперечную относительно \mathbf{V} компоненты и воспользоваться преобразованиями Лоренца (X.1).

553. Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = (A, A_4)$, не предполагая, что скорость \mathbf{V} системы S' относительно S параллельна оси x .

554. Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость \mathbf{V} системы S' относительно S имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

555. Даны три системы отсчета: S, S', S'' . S'' движется относительно S' со скоростью V' , параллельной оси x' , S' — относительно S со скоростью V , параллельной оси x . Соответствующие оси всех трех систем параллельны. Записать преобразования Лоренца от S'' к S и получить из них формулу сложения параллельных скоростей.

556. Доказать формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

¹Световым годом называется расстояние, проходимое светом в пустоте за год (см. введение к § 4 гл. VIII).

где \mathbf{v} и \mathbf{v}' — скорости частицы в системах S и S' , \mathbf{V} — скорость S' относительно S .

557. Доказать соотношение

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - (\mathbf{v}' \times \mathbf{V})^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где \mathbf{v} и \mathbf{v}' — скорости частицы в системах S и S' , \mathbf{V} — скорость S' относительно S .

558. Происходит три последовательных преобразования системы отсчета: 1) переход от системы S к системе S' , двигающейся относительно S со скоростью \mathbf{V} , параллельной оси x ; 2) переход от системы S' к системе S'' , двигающейся относительно S' со скоростью \mathbf{v} , параллельной оси y' ; 3) переход от системы S'' к системе S''' , двигающейся относительно S'' со скоростью, равной релятивистской сумме скоростей $-\mathbf{v}$ и $-\mathbf{V}$.¹ Доказать, что система S''' , как и следует ожидать, неподвижна относительно S и $t''' = t$, однако S''' повернута относительно S на некоторый угол в плоскости xy (томазовская прецессия). Вычислить угол φ томазовской прецессии.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулами общего вида для преобразования Лоренца (см. задачу 552) и сложения скоростей (см. задачу 554), записав эти формулы в проекциях на декартовы оси.

559. Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе покоя длину l_0 , движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой системы отсчета. Какова длина l каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?

560. Два пучка электронов летят навстречу друг другу со скоростями $v = 0,9c$ относительно лабораторной системы координат. Какова относительная скорость V электронов: а) с точки зрения наблюдателя в лаборатории; б) с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с одним из пучков электронов?

561. Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц, как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой m): а) один ускоритель разгоняет частицы до энергии \mathcal{E} , затем

¹Обратим внимание на то, что результирующая скорость зависит от того порядка, в котором производится сложение скоростей

быстрые частицы ударяются о неподвижную мишень из тех же частиц; б) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы создаваемые ими пучки частиц были направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разгонять частицы до энергии $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$.

Сравнить между собой значения \mathcal{E} и \mathcal{E}_0 . Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

562. Найти формулы преобразования ускорения \dot{v} для случая, когда система S' движется относительно системы S с произвольно направленной скоростью V . Представить эти формулы преобразования в векторном виде.

563. Выразить компоненты четырехмерного ускорения ω_i через обычное ускорение \dot{v} и скорость v частицы. Найти ω_i^2 . Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?

564. Выразить ускорение \dot{v}' частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение \dot{v} в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость v частицы меняется только по величине или только по направлению.

565. Релятивистская частица совершает «равноускоренное» одномерное движение (ускорение $\dot{v} \equiv \omega$ постоянно в собственной системе отсчета). Найти зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ частицы от времени t в лабораторной системе отсчета, если начальная скорость v_0 , а начальная координата x_0 . Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат предыдущей задачи.

566. Ракета, рассматривавшаяся в задаче 550, разгоняется от состояния покоя до скорости $v = \sqrt{0,9999} c$. Ускорение ракеты составляет $|\dot{v}| = 20 \text{ м/сек}^2$ в системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени продлится разгон ракеты по часам в неподвижной системе отсчета и по часам в ракете?

УКАЗАНИЕ. Влияние сил инерции на ход часов в ракете не учитывать¹.

567. Частица движется со скоростью v и ускорением \dot{v} , так что за малый промежуток времени δt ее скорость в лабораторной системе S меняется на величину $\delta v = \dot{v} \delta t$. Пусть S' — инерциальная система, мгновенно сопутствующая частице в момент t , а S'' — такая же система для момента

¹Это означает, что предлагается вычислить сумму собственных времен $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в последовательности мгновенно сопутствующих ракете инерциальных систем отсчета, выражаемую интегралом $\int d\tau$. Подробнее по этому поводу см. [107], § 62, а также [17], [72].

времени $t + \delta t$. Пользуясь преобразованиями Лоренца, показать с точностью до членов, линейных по $\delta \mathbf{v}$, что координаты и время в этих системах связаны формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \Delta\varphi \times \mathbf{r}' - t' \Delta\mathbf{v}, \\ t'' &= t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \Delta\mathbf{v}}{c^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v} &= \gamma \left[\delta\mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right], \\ \delta\varphi &= (\gamma - 1) \frac{\delta\mathbf{v} \times \mathbf{v}}{v^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Какой геометрический смысл имеют преобразования (1)? Какой вид приобретают формулы (2) при $v \ll c$ в первом неисчезающем приближении?

УКАЗАНИЕ. Удобно рассмотреть цепочку преобразований $S'' \rightarrow S \rightarrow S'$ с помощью формул, приведенных в ответе к задаче 552.

568. Относительно системы S движется система S' со скоростью \mathbf{V} и два тела со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Каков угол α между скоростями этих тел при наблюдении в системе S и в системе S' ?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами задач 554 и 556.

569. Что происходит с углом между скоростями двух тел предыдущей задачи, когда скорость системы S' относительно S стремится к c ?

570. В некоторый момент времени направление луча света от звезды составляет угол ϑ с орбитальной скоростью v Земли (в системе, связанной с Солнцем). Найти изменение направления от Земли на звезду за полгода (абберация света), не делая приближений, связанных с малостью $\frac{v}{c}$.

571. Найти форму видимой кривой, описываемой звездой на небосводе вследствие годичной абберации. Полярные координаты звезды в системе, связанной с Солнцем, ϑ , α (полярная ось проведена перпендикулярно плоскости земной орбиты). Орбитальная скорость Земли $v \ll c$.

572. Пучок света в некоторой системе отсчета образует телесный угол $d\Omega$. Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчета?

573. Если считать, что звезды в ближайшей к нам части Галактики распределены равномерно, то каково будет их распределение $dN/d\Omega'$ для наблюдателя в ракете, летящей со скоростью, близкой к скорости света?

574. Найти формулы преобразования частоты ω (эффект Доплера) и волнового вектора \mathbf{k} плоской монохроматической световой волны при переходе от одной инерциальной системы к другой. Направление относительной скорости \mathbf{V} произвольно.

575. Найти частоту ω световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно к направлению движения источника в системе, связанной с приемником света).

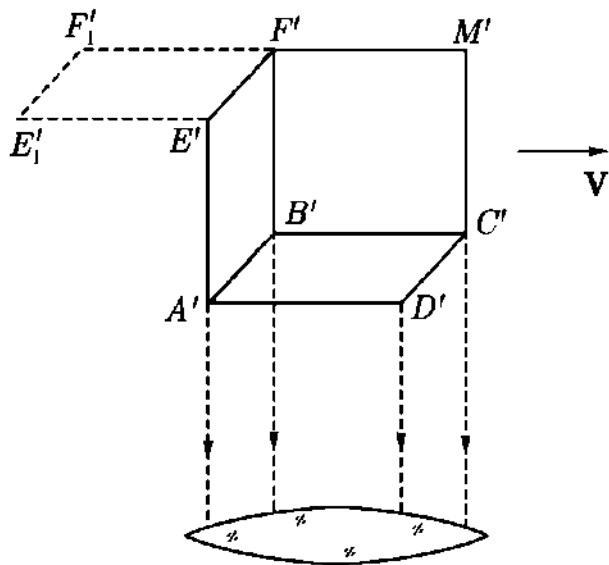


Рис. 40

Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?

576. Длина волны света, излучаемого некоторым источником, в той системе, в которой источник покоится, равна λ_0 . Какую длину волны λ зарегистрируют: а) наблюдатель, приближающийся со скоростью V к источнику и б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?

577. Источник, испускающий свет частоты ω_0 изотропно во все стороны в своей системе отсчета, движется равномерно и прямолинейно относительно наблюдателя со скоростью V , проходя от него в момент наибольшего сближения на прицельном расстоянии d . Число фотонов, излучаемых в единицу времени в единицу телесного угла (интенсивность потока фотонов), равно J_0 в системе покоя источника. Найти зависимость частоты ω и интенсивности J потока фотонов, регистрируемого наблюдателем, от угла между направлением луча и скорости V . При каких углах $\theta = \theta_0$ регистрируемые частота и интенсивность потока фотонов совпадут с ω_0 и J_0 ? Какая доля фотонов регистрируется наблюдателем в интервалах $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$? Начертить графики зависимостей $\omega(\theta)$ и $J(\theta)$ для $V/c = 1/3$ и $V/c = 4/5$. Какой характер имеют эти зависимости при $V/c \rightarrow 1$?

578. Найти угловое распределение силы света I (световая энергия, излучаемая в единицу времени в единицу телесного угла), а также полный световой поток от источника света, рассмотренного в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. каждый фотон обладает энергией $\hbar\omega$, где \hbar — постоянная Планка.

579. Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью V . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

580. Решить предыдущую задачу для случая, когда зеркало перемещается поступательно вдоль собственной плоскости.

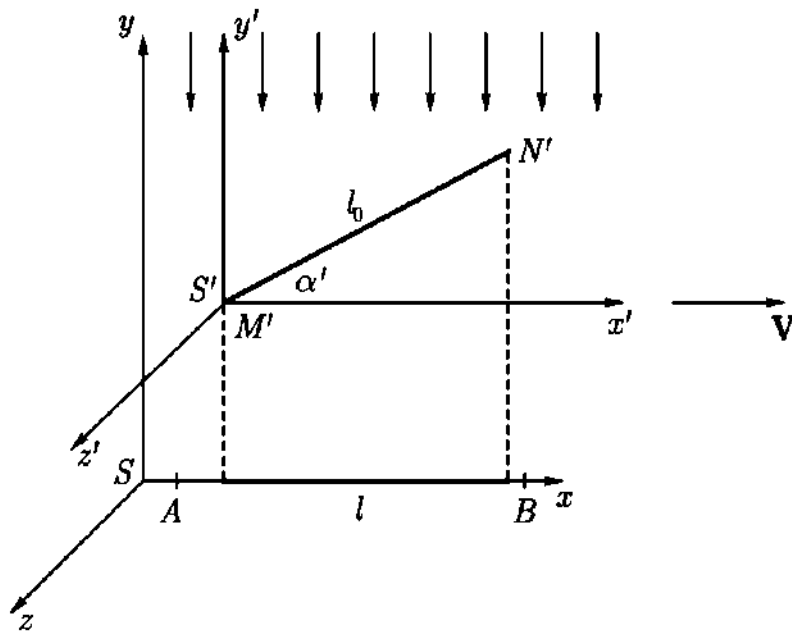


Рис. 41

581. Непрозрачный куб с ребром l_0 в своей системе покоя движется относительно наблюдателя со скоростью V (рис. 40). Наблюдатель фотографирует его в момент, когда лучи света, испускаемые поверхностью куба, приходят в объектив фотоаппарата под прямым углом к направлению движения (в системе фотоаппарата). Куб виден под малым телесным углом, вследствие чего лучи, приходящие от разных точек куба, можно считать параллельными.

Какой вид будет иметь изображение на фотопластинке? Составить чертеж изображения, нанести на него те вершины и ребра куба, которые будут сфотографированы. Вычислить их относительные длины. Изображению какого неподвижного предмета эквивалентна полученная фотография? Какой вид приняло бы изображение движущегося куба, если бы были справедливы преобразования Галилея?

582. Тонкий стержень $M'N'$ неподвижен в системе S' , имеет в ней длину l_0 и ориентирован так, как показано на рис. 41. Система S' движется со скоростью $V \parallel Ox$ относительно фотопластинки AB , покоящейся в системе S . В момент прохождения стержня мимо фотопластинки происходит короткая световая вспышка, при которой лучи света падают нормально к плоскости xu фотопластинки.

а) Какова длина l изображения на фотопластинке? Может ли она стать равной или превысить l_0 ?

б) При каком угле наклона α' сфотографируется только торец стержня?

в) Каков угол наклона α стержня к оси Ox ?

583. Шар, движущийся со скоростью V , фотографируется неподвижным наблюдателем под малым телесным углом. Лучи света от шара падают параллельным пучком на объектив фотоаппарата, составляя прямой угол с направлением скорости V . Какую форму будет иметь изображение на фотопластинке? Какая часть поверхности шара будет сфотографирована?

УКАЗАНИЕ. Представить шар в виде совокупности тонких дисков, движущихся параллельно своим плоскостям, и построить изображение каждого диска.

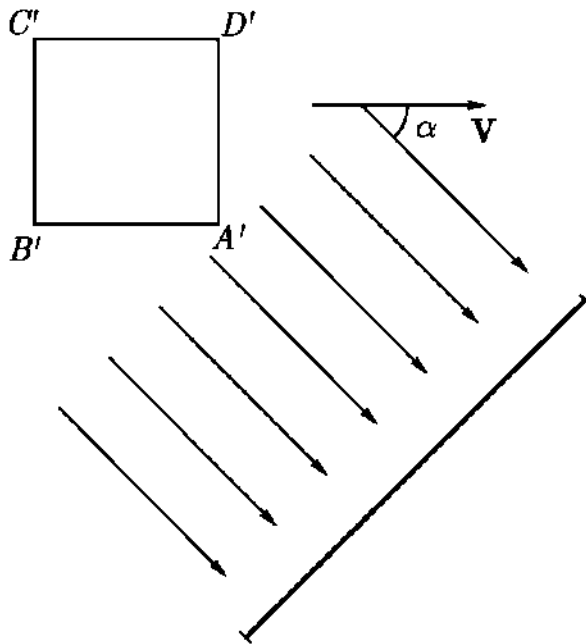


Рис. 42

584. Пусть движущийся непрозрачный куб фотографируется неподвижным наблюдателем в момент, когда лучи, приходящие от куба, составляют произвольный угол α с направлением скорости V куба (в системе наблюдателя). Телесный угол, под которым виден куб, мал, вследствие чего лучи приходят параллельным пучком и падают на фотопластинку нормально к ее поверхности (рис. 42). Показать, что фотография должна совпадать с фотографией неподвижного, но повернутого на некоторый угол куба. Найти угол поворота изображения при разных значениях V и фиксированном α . При каком значении V будет сфотографирована одна грань $A'B'$? одна грань $B'C'$?

585. Ввести волновой 4-вектор, описывающий распространение плоской монохроматической волны в движущейся со скоростью V в среде с показателем преломления n (фазовая скорость волны в неподвижной сре-

де $v' = \frac{c}{n}$). Найти формулы преобразования частоты, угла распространения и фазовой скорости.

586. Плоская волна распространяется в движущейся со скоростью V среде в направлении перемещения среды. Длина волны в вакууме λ . Найти скорость v волны относительно лабораторной системы (опыт Физо). Показатель преломления n определяется в системе S' , связанной со средой, и зависит от длины волны λ' в этой системе. Вычисления проводить с точностью до первого порядка по V/c .

§ 2. Четырехмерные векторы и тензоры

При переходе от одной инерциальной системы (S') к другой (S) компоненты 4-вектора преобразуются по формулам

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k, \quad (\text{X.16})$$

где матрица преобразования $\hat{\alpha}$ имеет вид¹

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.17})$$

Она соответствует преобразованию (X.1), при котором одноименные координатные оси систем S и S' параллельны, относительная скорость направлена вдоль x и начала координат при $t = t' = 0$ совпадали.

Матрица преобразования удовлетворяет соотношениям

$$\alpha_{il}\alpha_{kl} = g_{ik}, \quad \alpha_{li}\alpha_{lk} = g_{ik}, \quad (\text{X.18})$$

где g_{ik} — метрический тензор, имеющий вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.19})$$

Знаки на главной диагонали метрического тензора соответствуют знакам в формуле (X.5), определяющей скалярное произведение двух 4-векторов.

¹ Не забывать правило знаков при суммировании, сформулированное после формулы (X.5): при суммировании по дважды повторяющимся индексам слагаемое с индексом 0 берется со знаком «+», а слагаемые с индексами 1, 2, 3 — со знаком «-».

Преобразование, обратное (X.16), записывается так:

$$A'_i = \alpha_{ki} A_k. \quad (\text{X.20})$$

Координаты мировой точки $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ образуют 4-вектор и преобразуются по формулам (X.16), (X.20).

При последовательном выполнении двух преобразований Лоренца соответствующие матрицы перемножаются по обычному правилу умножения матриц (см. гл. I, § 1).

Четырехмерным тензором (4-тензором) N -го ранга называется совокупность 4^N величин $T_{ik\dots l}$, которые при переходе к другой инерциальной системе отсчета преобразуются как произведения соответствующих компонент 4-вектора A_i, A_k, \dots, A_l :

$$T_{ik\dots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\dots\alpha_{ls}T'_{pr\dots s}. \quad (\text{X.21})$$

Определитель $|\alpha_{ik}|$, составленный из элементов матрицы $\hat{\alpha}$ преобразования Лоренца, может быть равен -1 (собственное преобразование Лоренца, например, (X.1)) или $+1$ (несобственное преобразование). Любое собственное преобразование Лоренца сводится к преобразованию вида (X.1) и пространственному повороту; такие преобразования могут рассматриваться как повороты в четырехмерном пространстве. Несобственные преобразования Лоренца включают в себя отражение одной или трех координат.

Псевдотензором N -го ранга называется совокупность 4^N величин $P_{ik\dots l}$, которые при четырехмерных преобразованиях координат преобразуются по формулам

$$P_{ik\dots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\dots\alpha_{ls}|\alpha_{mn}|P'_{pr\dots s}. \quad (\text{X.22})$$

Примером псевдотензора является совершенно антисимметричный единичный псевдотензор 4-го ранга (см. ниже задачу 592). Его компоненты e_{iklm} определяются следующими условиями: а) e_{iklm} меняют знак при перестановке любой пары значков; б) $e_{0123} = 1$. Отсюда следует, что компоненты e_{iklm} равны нулю, если среди значков есть совпадающие между собой, или равны ± 1 , если все значки различны.

587. Доказать равенства:

$$A_i = g_{ik}A_k, \quad A_i B_i = A_i g_{ik} B_k, \quad g_{ik} g_{kl} = g_{il}, \quad g_{ii} = 4,$$

где g_{ik} — метрический тензор (X.19), A_i и B_i — четырехмерные векторы. При суммировании по двум повторяющимся значкам используется правило знаков, приведенное после формулы (X.5).

588. Показать, что тензор g_{ik} (X.19) имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах координат.

589. Показать, что компоненты A_1, A_2, A_3 четырехмерного вектора $A_i = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ при пространственных поворотах преобразуются как компоненты трехмерного вектора $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, а компонента A_4 является трехмерным скаляром.

590. Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется 4-тензор II ранга при пространственных поворотах.

591. Показать, что компоненты антисимметричного 4-тензора II ранга преобразуются при пространственных поворотах как компоненты двух независимых трехмерных векторов.

592. Доказать, что величина e_{iklm} , определенная во введении к данному параграфу, действительно преобразуется как псевдотензор.

593. Доказать равенства: а) $e_{iklm}e_{lmrs} = 2(g_{is}g_{kr} - g_{ir}g_{ks})$; б) $e_{iklm}e_{klmn} = -6g_{in}$, где величины e_{iklm} и g_{ik} определены во введении к этому параграфу.

594. Доказать равенство

$$e_{iklm}e_{lmrs} = A_i B_k C_r D_s = 2(A_i C_i)(B_k C_k) - 2(A_i C_i)(B_k D_k).$$

595. Составить 4-вектор из частных производных $\partial\varphi/\partial x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), где φ — скаляр. Найти выражение для компонент ∇_i оператора четырехмерного градиента.

596. Составить 4-вектор T_{ik} из частных производных $\partial A_i/\partial x_k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$), где A_i — 4-вектор. Показать, что 4-дивергенция $\nabla_i A_i$ является инвариантом, где ∇_i — оператор 4-градиента, введенный в предыдущей задаче.

597. Найти закон преобразования величин:

а) A_i^2 ; б) $T_{ik}A_k$, если A_i — 4-вектор, T_{ik} — 4-тензор.

598. Два 4-вектора A_i и B_i называются параллельными, если

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Доказать, что отношение одноименных компонент параллельных 4-векторов инвариантно относительно преобразования Лоренца.

599. Сколько существенно различных компонент имеет 4-тензор III ранга, антисимметричный по отношению к перестановке любой пары значков? Показать, что они преобразуются при поворотах как компоненты четырехмерного псевдовектора.

600. Даны три системы отсчета: S, S', S'' . S'' движется относительно S' со скоростью V' , параллельной оси x' , S' — относительно S со скоростью V , параллельной оси x . Одноименные оси всех трех систем параллельны. Путем перемножения соответствующих матриц получить матрицу преобразования от S'' к S . Получить отсюда формулу сложения (см. (X.11)) одинаково направленных скоростей.

601. Записать преобразование Лоренца (X.1) в переменных $x_1, x_2, x_3, x_0 = ct$, выразив величину относительной скорости V через угол α по формуле $\frac{V}{c} = \text{th } \alpha$.

602. Получить матрицу преобразования \hat{g} от системы S' к системе S путем перемножения матриц простых преобразований. S' движется относительно S со скоростью V ($\frac{V}{c} = \text{th } \alpha$) в направлении, характеризуемом сферическими углами ϑ, φ . Соответствующие оси S и S' параллельны.

§ 3. Релятивистская электродинамика

Приведем основные формулы релятивистской электродинамики в вакууме. Плотность трехмерного тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ и плотность заряда ρ образуют 4-вектор плотности тока:

$$j_i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (\text{X.23})$$

Электрическое и магнитное поля являются компонентами антисимметричного 4-тензора электромагнитного поля F_{ik} :

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.24})$$

При переходе от системы S' к системе S компоненты поля преобразуются по формулам (оси x и x' параллельны относительной скорости):

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y); \\ H_x &= H'_x, & H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z), & H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y). \end{aligned} \quad (\text{X.25})$$

Величины

$$\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv} \quad (\text{X.26})$$

являются инвариантами преобразования Лоренца. Векторный \mathbf{A} и скалярный φ потенциалы образуют 4-вектор потенциала

$$A_i = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (\text{X.27})$$

Компоненты тензора энергии-импульса в вакууме определяются формулой

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il}F_{kl} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}^2 \right). \quad (\text{X.28})$$

Девять пространственных компонент тензора T_{ik} образуют трехмерный тензор натяжений Максвелла

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{X.29})$$

Пространственно-временные компоненты T_{ik} пропорциональны составляющим плотности потока энергии \mathbf{S} и плотности импульса поля \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} T_{0\alpha} &= \frac{1}{c} \gamma_\alpha, & \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ T_{0\alpha} &= c g_\alpha, & \mathbf{g} &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (\text{X.30})$$

Временная компонента T_{ik} связана с плотностью энергии поля ω соотношением

$$T_{00} = \omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2). \quad (\text{X.31})$$

Дивергенция тензора T_{ik} определяет объемную плотность сил $f_i = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c}, \mathbf{f} \right)$, приложенных к зарядам:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k. \quad (\text{X.32})$$

Перейдем теперь к формулам электродинамики при наличии сред. В этом случае векторы поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} образуют два антисимметричных четырехмерных тензора II ранга: тензор поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{X.33})$$

и тензор индукции

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.34})$$

Векторы поляризации и намагничения \mathbf{P} и \mathbf{M} также образуют 4-тензор

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.35})$$

Формулы $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ объединяются в одно соотношение

$$H_{ik} = F_{ik} - 4\pi M_{ik}. \quad (\text{X.36})$$

Четырехмерная f_i , приложенная к единице объема среды со стороны поля, определяется как

$$f_i = \left(\frac{1}{c} [Q + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}], \mathbf{f} \right), \quad (\text{X.37})$$

где \mathbf{f} — пондеромоторная сила, приложенная к единице объема, Q — джоулево тепло, выделяемое в единицу времени в единице объема.

603. Записать формулы преобразования для векторов поля \mathbf{E} , \mathbf{B} ; \mathbf{D} , \mathbf{H} и поляризаций \mathbf{P} , \mathbf{M} при переходе к системе S' , движущейся относительно системы S с произвольно направленной скоростью \mathbf{V} . Представить формулы преобразования в векторном виде.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться выражением коэффициентов преобразования, приведенным в задаче 602, и антисимметрией тензоров F_{ik} , H_{ik} , M_{ik} .

604. В системе отсчета S имеется однородное электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$? Всегда ли задача имеет решение и единственно ли оно? Чему равны абсолютные значения \mathbf{E}' и \mathbf{H}' ?

605. В системе отсчета S электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны: $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение и единственно ли оно?

606. Бесконечно длинный круговой цилиндр равномерно заряжен с линейной плотностью λ . Вдоль оси цилиндра течет равномерно распределенный ток \mathcal{I} . Во всем пространстве проницаемости $\epsilon = \mu = 1$. Найти такую систему отсчета, в которой существует только электрическое или только магнитное поле. Найти величину этих полей.

607. Система дифференциальных уравнений для магнитных силовых линий вида

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

не является релятивистски инвариантной и при переходе в другую инерциальную систему не сохраняет своего вида.

а) Показать, что для полей некоторого специального вида система уравнений

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{H} + c\mathbf{E} dt = 0, \quad \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2)$$

может рассматриваться как релятивистски инвариантное обобщение системы (1).

б) Выяснить структуру полей, для которых такое обобщение возможно, путем рассмотрения условий совместности уравнений (2). Сколько независимых уравнений содержится в системе (2)?

в) Какой вид имеет условие интегрируемости системы (2)?

г) Убедиться в том, что силовые линии, определяемые системой (2), перемещаются в поперечном направлении со скоростью $\mathbf{u} = c\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{H}}{H^2}$, т. е. являются движущимися даже в случае статических полей.

608. Показать, что релятивистски инвариантная система уравнений для электрических силовых линий, аналогичная системе (2) предыдущей задачи, имеет вид $e_{iklm} F_{lm} dx_k = 0$ (1). Какие требования налагаются на \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также на распределение зарядов и токов условиями совместности и интегрируемости системы (1)? Как перемещаются силовые линии, определяемые системой (1)?

609. Найти величину э. д. с. электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле \mathbf{B} . Воспользоваться либо формулами преобразования напряженностей поля, либо формулами преобразования потенциалов.

610. Найти поля φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} точечного заряда e , движущегося равномерно со скоростью \mathbf{V} , произведя преобразование Лоренца от системы отсчета, в которой заряд покоится.

611. Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения. При этом происходит ослабление поля E на линии движения заряда по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$?

612. Электрический диполь с моментом p_0 в системе покоя равномерно движется со скоростью \mathbf{V} . Найти создаваемое им электромагнитное поле φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} .

613. Получить формулы преобразования электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных моментов поляризованного и намагниченного тела при переходе от инерциальной системы отсчета, в которой тело покоится, к другой инерциальной системе.

УКАЗАНИЕ. Исходить из известных формул преобразования вектора поляризации \mathbf{P} и вектора намагничивания \mathbf{M} .

614. Незаряженная проволочная петля с током \mathcal{I}' , имеющая форму прямоугольника $a \times b$, движется равномерно со скоростью \mathbf{V} параллельно своей стороне a . Провод имеет конечное сечение. Найти распределение электрических зарядов на петле, а также ее электрический и магнитный моменты, наблюдаемые в лабораторной системе отсчета.

615. Найти закон релятивистского преобразования джоулева тепла Q , исходя из определения четырехмерной плотности силы.

616. Найти формулы преобразования компонент тензора энергии импульса T_{ik} при преобразовании Лоренца.

617. Найти шпур тензора энергии импульса (X.28), т. е. результат свертывания его по двум значкам.

618*. Электромагнитное поле отлично от нуля лишь внутри некоторого конечного пространственного объема V , в котором отсутствуют заряды. Доказать, что полные энергия и импульс поля образуют 4-вектор.

619*. Полный момент импульса системы, состоящей из электромагнитного поля в вакууме и точечных зарядов, можно определить формулой¹

$$K_{ik} = -\frac{i}{c} \int_t (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) dS_l + \sum (x_i p_k - x_k p_i),$$

в которой интеграл распространен на всю гиперповерхность $x_0 = ct = \text{const}$. Суммирование производится по всем частицам; при этом берутся значения x_i, p_k в точках пересечения мировых линий соответствующих зарядов с гиперповерхностью $x_0 = \text{const}$. Доказать сохранение полного момента импульса K_{ik} системы, учитывая, что $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k$.

¹ Легко убедиться непосредственно, используя определение тензора T_{ik} , что пространственная часть $K_{\alpha\beta}$ тензора K_{ik} представляет собой антисимметричный тензор, эквивалентный вектору $\mathbf{K} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV + \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, где $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — плотность импульса поля.

620*. Система состоит из частиц и электромагнитного поля в вакууме и занимает конечный объем. Из рассмотрения баланса полного момента импульса $K_{\alpha\beta}$ этой системы найти выражение для плотности потока \mathcal{K} момента импульса поля. Воспользоваться выражением для K_{ik} , приведенным в условии предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Фок В. А. [107], Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65, 66], Бергман П. Г. [13], Френкель Я. И. [111, 112], Эйнштейн А. [117], Мандельштам Л. И. [76], Джексон Дж. [52] Беккер Р. [12], Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. [106], Гуревич Л. Э. [49], Паули В. [87], Гайтлер В. [29], Компанеев А. С. [60], Минковский Г. [79], Борн М. [17], Лефферт К., Донайе Т. [72], Пановский В., Филипс М. [86], Вайскопф В. [24], Соколовский Ю. И. [97].

ГЛАВА XI

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Энергия и импульс

Импульс \mathbf{p} релятивистской частицы связан с ее скоростью \mathbf{v} соотношением

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{XI.1})$$

где m — масса частицы. Полная энергия \mathcal{E} свободно движущейся частицы может быть выражена через скорость:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{XI.2})$$

или импульс:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (\text{XI.3})$$

Кинетическая энергия T частицы отличается от полной энергии на величину энергии покоя $\mathcal{E}_0 = mc^2$:

$$T = \mathcal{E} - mc^2. \quad (\text{XI.4})$$

Энергия, импульс и скорость частицы связаны формулой:

$$\mathcal{E}\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}. \quad (\text{XI.5})$$

Энергия и импульс частицы являются временной и пространственной составляющими 4-вектора энергии импульса (4-импульса):

$$p_i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}). \quad (\text{XI.6})$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой энергия и импульс преобразуются по формулам (X.4). Квадрат 4-импульса является релятивистским инвариантом:

$$p_i^2 = \mathcal{E}^2/c^2 - p^2 = m^2c^2. \quad (\text{XI.7})$$

Частица называется нерелятивистской, если ее кинетическая энергия мала, и ультрарелятивистской, если ее кинетическая энергия велика по сравнению с энергией покоя. Скорость ультрарелятивистской частицы близка к скорости света, импульс связан с энергией соотношением

$$\mathcal{E} = cp. \quad (\text{XI.8})$$

Частицы с нулевой массой и энергией покоя (фотоны, нейтрино) всегда являются ультрарелятивистскими, их скорость точно равна c .

Энергия и импульс фотона в вакууме связаны с его частотой формулами:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k, \quad (\text{XI.9})$$

где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ — постоянная Планка.

Полные энергия и импульс замкнутой системы частиц сохраняются. Отсюда следует, что если до начала и после окончания некоторой реакции (распада или столкновения) частицы не взаимодействуют между собой, то полный 4-импульс в начальном и конечном состояниях одинаков:

$$\sum_a p_{ai}^{(0)} = \sum_b p_{bi}, \quad (\text{XI.10})$$

где суммирование производится по всем частицам, имеющимся до и после реакции.

При рассмотрении столкновений удобно пользоваться одной из двух систем отсчета: лабораторной системой S или системой центра инерции S' (система ц. и.), в которой полный импульс p равен нулю. Следует обратить внимание на полезный прием, состоящий в использовании инвариантности квадратов 4-импульсов (см. решения задач 651, 657*, 675).

Различаются два типа столкновений: упругие, при которых не меняются внутренние состояния и, следовательно, массы частиц, и неупругие, при которых меняются внутренние энергии (массы) сталкивающихся частиц, исчезают старые или рождаются новые частицы. При неупругом столкновении двух частиц сумма масс $m_1 + m_2$ сталкивающихся частиц отличается от суммы масс M_k образующихся частиц на величину

$$\Delta M = m_1 + m_2 - M_k. \quad (\text{XI.11})$$

которая называется дефектом массы. Величина $Q = c^2 \Delta M$ называется энергетическим выходом реакции.

Реакции, идущие по схеме

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (\text{XI.12})$$

т. е. такие, при которых две частицы превращаются в две другие частицы, называются двухчастичными (частным случаем двухчастичной реакции является упругое рассеяние двух частиц). Кинематику двухчастичных реакций удобно описывать с помощью инвариантных переменных s , t , u :

$$s = (p_{ai} + p_{bi})^2, \quad t = (p_{ai} - p_{ci})^2, \quad u = (p_{ai} - p_{di})^2, \quad (\text{XI.13})$$

где p_{ai} — и т. д. — 4-импульсы частиц, участвующих в реакции. Любую из величин s , t , u можно выразить через две другие с помощью соотношения

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2. \quad (\text{XI.14})$$

Наглядное представление о кинематике двухчастичной реакции дает кинематическая плоскость, на которой откладываются значения переменных s и t (или s , t и u — см. задачу 673). Законы сохранения энергии и импульса ограничивают на кинематической плоскости область значений s , t , u , физическую для данной реакции.

Многие формулы релятивистской кинематики приобретают более простой вид, если пользоваться системой единиц, в которой скорость света $c = 1$. При этом масса, энергия и импульс измеряются в одинаковых единицах, например в *Мэв* ($1 \text{ Мэв} = 10^6 \text{ эв} = 10^{-3} \text{ Гэв} = 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$). В некоторых задачах этого параграфа используется такая система единиц (что всегда оговаривается). В ряде случаев массы элементарных частиц измеряют в единицах массы электрона m_e (т. е. используют систему единиц, в которой $m_e = 1$).

В таблице XI.1 приведены для справок массы ряда элементарных частиц. В таблице XI.2 приведены значения энергий связи B некоторых ядер. Под энергией связи понимается величина

$$B = \Delta M c^2 = \sum \mathcal{E}_{0н} - \mathcal{E}_{0я}, \quad (\text{XI.15})$$

где $\mathcal{E}_{0н}$ — энергия покоя нуклона, $\mathcal{E}_{0я}$ — энергия покоя ядра.

621. Выразить импульс p релятивистской частицы через ее кинетическую энергию T .

622. Выразить скорость v частицы через ее импульс p .

623. Частица с массой m обладает энергией \mathcal{E} . Найти скорость v частицы. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

¹ В качестве двух независимых величин можно выбрать, например, s и t . Все другие величины (энергии и углы рассеяния частиц в лабораторной системе и системе ц. и.) выражаются через них — см. задачи 668–670.

Таблица XI.1

Частица	Масса	
	в единицах m_e	в Мэв
Фотон γ	0	0
Нейтрино ν	0	0
Электрон e^-	1	0,511
Позитрон e^+		
Мю-мезоны μ^\pm	207	105,7
Пи-мезоны π^\pm	273	139,6
π^0	264	135,0
Ка-мезоны K^\pm	966	493,8
K^0, \bar{K}^0	974	497,8
Протон p	1836	938,2
Нейтрон n	1839	939,5
Лямбда-гиперон Λ	2181	1115,4

Таблица XI.2

Изотопы	H_1^2	He_2^4	Li_3^7
$B, \text{Мэв}$	2,23	28,11	38,96

624. Найти приближенные выражения кинетической энергии T частицы с массой m : а) через ее скорость v и б) через ее импульс p с точностью до $\frac{v^4}{c^4}$ и $\frac{p^4}{m^4 c^4}$ соответственно, при $v \ll c$.

625. Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e , прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).

626. Найти скорость v частиц в следующих случаях: а) электроны в электронной лампе ($\mathcal{E} = 300 \text{ эВ}$); б) электроны в синхротроне на 300 Мэв ;

в) протоны в синхроциклотроне на 680 Мэв , г) протоны в синхрофазотроне на 10 Гэв .

627. Ускоритель дает на выходе пучок заряженных частиц с кинетической энергией T ; сила тока в пучке равна \mathcal{I} . Найти силу F давления пучка на поглощающую его мишень и выделяемую в мишени мощность W . Масса частицы m , заряд e .

628. Некоторое тело движется с релятивистской скоростью v через газ, в единице объема которого содержится N медленно движущихся частиц с массой m . Найти давление p , производимое газом на элемент поверхности, нормальный к его скорости, если частицы упруго отражаются от поверхности тела.

629. В линейном ускорителе частица ускоряется в щели между полыми цилиндрическими электродами — «пролетными трубками», вдоль общей оси которых проходит траектория частицы. Ускорение происходит под действием высокочастотного электрического поля с частотой $\nu = \text{const}$. Разгоняются те частицы, которые проходят все промежутки между трубками при наличии там ускоряющего поля. Каковы должны быть длины пролетных трубок, чтобы частица с зарядом e и массой m пролетала через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда на них имеется максимальное напряжение V_e ? Оценить также полную длину ускорителя с N пролетными трубками.

630. Поток монохроматических μ -мезонов, родившихся в верхних слоях атмосферы¹, падает вертикально вниз. Найти отношение интенсивностей потока μ -мезонов на высоте h над уровнем моря (I_h) и на уровне моря (I_0), считая, что в рассматриваемом слое воздуха толщиной h происходит только ослабление потока за счет естественного распада μ -мезонов. Энергия μ -мезонов $\mathcal{E} = 4,2 \cdot 10^8 \text{ эв}$, $h = 3 \text{ км}$, среднее время жизни покоящегося μ -мезона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$.

631. Система отсчета S' движется со скоростью V относительно системы S . Частица с массой m , обладающая в S' энергией \mathcal{E}' и скоростью v' , движется под углом ϑ' к направлению V . Найти угол ϑ между импульсом p частицы и направлением V в системе S . Выразить энергию и импульс частицы в S через ϑ' , \mathcal{E}' или ϑ' , v' . Рассмотреть, в частности, ультра-релятивистский случай $\mathcal{E}' \gg mc^2$, $V \approx c$. Показать, что в этом случае в некотором (каком?) интервале углов можно пользоваться приближенной формулой $\vartheta \approx \frac{1}{\gamma} \text{tg } \frac{\vartheta'}{2}$.

¹Задача формулируется в упрощенном виде.

632*. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . Угловое распределение частиц, имеющих в S' одинаковую энергию \mathcal{E}' , описывается функцией $\frac{dW}{d\Omega'} = F'(\vartheta', \alpha')$, где величина dW представляет собой долю частиц, движущихся в системе S' внутри телесного угла $d\Omega'$. Ее обычно нормируют так, что

$$\int dW = \int F'(\vartheta', \alpha') d\Omega' = 1.$$

Угол ϑ' отсчитывается от направления V . Найти угловое распределение таких частиц в системе S . Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

633*. Число частиц dN , находящихся в элементе объема dV и имеющих составляющие импульсы, заключенные в пределах от p_x до $p_x + dp_x$, от p_y до $p_y + dp_y$, от p_z до $p_z + dp_z$, выражается в виде

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV(d\mathbf{p}),$$

где $(d\mathbf{p}) = dp_x dp_y dp_z$ — элемент объема в пространстве импульсов, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — функция распределения (или плотность числа частиц в фазовом пространстве). Найти закон релятивистского преобразования функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

634. Частицы сорта 1, обладающие в системе S скоростью \mathbf{v}_1 , рассеиваются неподвижными частицами сорта 2. Как преобразуется сечение рассеяния $d\sigma_{12}$ при переходе к системе отсчета S' , в которой частицы сорта 2 обладают скоростью \mathbf{v}'_2 , а частицы сорта 1 — скоростью \mathbf{v}'_1 ? Рассмотреть, в частности, случай, когда скорости \mathbf{v}'_1 и \mathbf{v}'_2 параллельны.

УКАЗАНИЕ. Сечением рассеяния $d\sigma_{12}$ называется отношение числа частиц, рассеиваемых в единицу времени в телесный угол $d\Omega$ одним рассеивающим центром, к плотности потока рассеиваемых частиц $J_{12} = n_1 v_0$, где n_1 — число рассеиваемых частиц в единице объема, $v_0 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ — относительная скорость частиц 1-го и 2-го сорта (ср. с задачей 560).

635. π^0 -мезон движется со скоростью v и распадается на лету на два γ -кванта. Найти угловое распределение γ -квантов распада $\frac{dW}{d\Omega}$ в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя π^0 -мезона оно сферически симметрично.

636. Выразить энергию π^0 -мезона, рассмотренного в предыдущей задаче, через отношение f числа γ -квантов распада, испускаемых в переднюю полусферу, к числу γ -квантов, испускаемых в заднюю полусферу.

637. π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Показать, что минимальный угол ϑ_{\min} разлета γ -квантов определяется условием $\cos \frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{v}{c}$ в той системе отсчета, в которой скорость π^0 -мезона равна v .

638*. Найти зависимость энергии γ -кванта, возникающего при распаде π^0 -мезона (ср. с задачей 635), от угла ϑ между направлениями распространения кванта и движения π -мезона. Определить энергетический спектр γ -квантов распада в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе покоя π^0 -мезона энергия γ -кванта $\mathcal{E}' = mc^2/2$ (m — масса π^0 -мезона).

639. Показать, что какова бы ни была форма энергетического спектра π^0 -мезонов, энергетический спектр γ -квантов распада в лабораторной системе отсчета будет иметь максимум при $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}' = \frac{mc^2}{2}$, где m — масса π^0 -мезона. Пусть \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — произвольные значения энергии γ -квантов распада, расположенные по разные стороны указанного максимума и отвечающие одинаковым значениям функции распределения. Выразить массу m π^0 -мезона через \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться энергетическим спектром γ -квантов, найденным в задаче 638*.

640. Определить массу m некоторой частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами m_1, m_2 . Из опыта известны величины импульсов p_1, p_2 частиц, образовавшихся при распаде, и угол ϑ между их направлениями. Вычислить массу заряженного π -мезона, распадающегося по схеме $\pi \rightarrow \mu + \nu$, если из опыта известно, что π -мезон до распада покоился, а μ -мезон получил после распада импульс $p_\mu = 29,8 \text{ Мэв/с}$. Масса μ -мезона приведена в таблице XI.1.

641. Определить массу m_1 некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой m и импульсом p . Импульс p_2 , масса m_2 и угол ϑ_2 вылета второй частицы, образовавшейся при распаде, также известны.

642. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m и скорость V образовавшейся частицы.

643. Покоящееся тело с массой m_0 распадается на две части с массами m_1 и m_2 . Вычислить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов распада. Найти распределение энергии распада в системе покоя распадающейся частицы между а) α -частицей и дочерним ядром при α -распаде U^{238} ; б) μ -ме-

зоном и нейтрино (ν) при распаде π -мезона ($\pi \rightarrow \mu + \nu$); в) γ -квантом и ядром отдачи при излучении γ -кванта.

644. Покоящаяся частица a распадается по схеме $a \rightarrow b + d$. Выразить энергию распада $Q_a = m_a - m_b - m_d$ ($c = 1$) через кинетическую энергию T_b одной из частиц распада и массы m_b, m_d . Вычислить энергию распада и массу Σ^+ -частицы, распадающейся по схеме $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$, пользуясь найденным из опыта значением $T_{\pi^+} = 91,7 \text{ Мэв}$ и массами нейтрона и π^+ -мезона, приведенными в табл. XI.1. Сделать то же самое для распада Σ^+ по другой схеме $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, если известна $T_p = 18,8 \text{ Мэв}$.

645. Покоящееся свободное возбужденное ядро (энергия возбуждения $\Delta \mathcal{E}$) излучает γ -квант. Найти его частоту ω . Масса возбужденного ядра m . В чем причина того, что $\omega \neq \Delta \mathcal{E} / \hbar$? Как изменится результат, если ядро жестко закреплено в кристаллической решетке (эффект Мёссбауэра)?

646*. Покоящаяся частица a с массой m распадается по схеме $a \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$ на три частицы с массами m_1, m_2, m_3 и кинетическими энергиями T_1, T_2, T_3 . Исследовать кинематику такого распада с помощью диаграммы Далица. Для этого ввести переменные $x = (T_2 - T_3) / \sqrt{3}$, $y = T_1$ и рассмотреть плоскость (x, y) . Каждому конкретному распаду отвечает определенная точка на этой плоскости.

а) Доказать, что закон сохранения энергии ограничивает на плоскости (x, y) область, имеющую форму равностороннего треугольника. Убедиться в том, что длины перпендикуляров, опущенных из точки, изображающей данный распад, на стороны треугольника, равны кинетическим энергиям образующихся частиц.

б) Убедиться в том, что двух введенных величин x и y достаточно для определения величин импульсов образующихся частиц и углов между импульсами в системе покоя распадающейся частицы.

в) Закон сохранения трехмерного импульса приводит к тому, что не все точки внутри треугольника отвечают истинным распадам. Найти на плоскости xy область, внутри которой распады кинематически возможны, для частного случая $m_2 = m_3 = 0$, $m_1 \neq 0$.

647. Построить диаграмму Далица (см. условие предыдущей задачи) для распадов μ - и K -мезонов:

$$\text{а) } \mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu, \quad \text{б) } K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu.$$

В последнем процессе электрон, как правило, рождается ультрарелятивистским, и его массой покоя можно пренебречь. Определить максимальные энергии частиц.

648. Построить диаграмму Далица (см. задачу 646*) для распада покоящегося K^+ -мезона по схеме

$$K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^+.$$

Энергия распада $Q = m_K - 3m_\pi \approx 75 \text{ Мэв} < m_\pi$ ($c = 1$), поэтому рождающиеся π -мезоны можно приближенно считать нерелятивистскими. Какова максимальная энергия каждой из частиц?

649. Построить диаграмму Далица (см. условие задачи 646*) для распада ω -мезона по схеме

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Считать массы трех мезонов одинаковыми, энергия распада $Q = m_\omega - 3m_\pi \approx 360 \text{ Мэв} > m_\pi$, $m_\omega \approx 780 \text{ Мэв}$ ($c = 1$). Какова наибольшая энергия каждого из мезонов?

650*. В условии задачи 646* изложены правила построения диаграммы Далица для распада трех частиц. Вероятность dW распада имеет вид

$$dW = \rho d\Gamma.$$

Здесь ρ — величина, зависящая от сил взаимодействия, ответственных за распад, и от импульсов частиц, а $d\Gamma$ — элемент фазового объема Γ , определяемого интегралом

$$\Gamma = \int \frac{(d\mathbf{p}_1)}{\mathcal{E}_1} \frac{(d\mathbf{p}_2)}{\mathcal{E}_2} \frac{(d\mathbf{p}_3)}{\mathcal{E}_3} \delta(p_i - p_{1i} - p_{2i} - p_{3i}),$$

где p_i — 4-импульс распадающейся частицы ($p_i = (m, 0)$ при распаде из состояния покоя), $p_{\alpha i} = (\mathcal{I}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ — 4-импульсы образующихся частиц, $(d\mathbf{p}_\alpha)$ — элемент объема импульсного пространства α -й частицы. Четырехмерная δ -функция выражает собой закон сохранения 4-импульса при распаде и показывает, что интегрирование производится только по тем значениям импульсов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, которые совместимы с законами сохранения энергии и импульса.

Выразить $d\Gamma$ через dx, dy и показать, что фазовый объем Γ выражается в соответствующем масштабе площадью разрешенной области на диаграмме Далица. Доказательство произвести для общего случая $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq 0$.

651. Частица с массой m налетает на покоящуюся частицу с массой m_1 . Происходит реакция, в которой рождается ряд частиц с общей массой M . Если $m + m_1 < M$, то при малых кинетических энергиях налетающей частицы реакция не идет — она запрещена законом сохранения энергии. Найти минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы (энергетический порог T_0 реакции), начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

652. Найти энергетические пороги T_0 следующих реакций: а) рождение π -мезона при столкновении двух нуклонов ($N + N \rightarrow N + N + \pi$); б) фоторождение π -мезона на нуклоне ($N + \gamma \rightarrow N + \pi$); в) рождение K -мезона и Λ -гиперона при столкновении π -мезона с нуклоном ($\pi + N \rightarrow \Lambda + K$); г) рождение пары протон–антипротон при столкновении протона массы m_p с ядром массы m . Рассмотреть, в частности, столкновение с протоном. Оценить порог для рождения антипротона на ядре с массовым числом A , считая $m \approx m_p A$.

653. Найти приближенное выражение энергетического порога T_0 реакций, в которых изменение ΔM массы сталкивающихся частиц составляет малую часть их общей массы M («реакция между нерелятивистскими частицами»). Применить полученную формулу к нахождению энергетического порога T_0 реакций: а) фоторасщепление дейтерия (реакция $\gamma + \text{H}_1^2 \rightarrow p + n$); б) реакция $\text{He}_2^4 + \text{He}_2^4 \rightarrow \text{Li}_3^7 + p$. Сравнить полученные приближенные значения с точными (см. задачу 651).

654. Доказать, что рождение пары электрон–позитрон γ -квантом возможно только, если в реакции участвует частица с массой покоя $m_1 \neq 0$ (с этой частицей не происходит никаких изменений; ее роль состоит в том, что она принимает часть энергии и импульса, делая возможным выполнение законов сохранения). Найти порог T_0 реакции рождения пары.

655. Доказать, что законом сохранения энергии-импульса запрещена аннигиляция пары электрон–позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ -кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов.

656. Частица с энергией \mathcal{E} и массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . Найти скорость v центра инерции относительно лабораторной системы отсчета при таком столкновении.

657*. Частица с массой m_1 и энергией \mathcal{E}_0 испытывает упругое соударение с неподвижной частицей, масса которой m_2 . Выразить углы рассеяния ϑ_1, ϑ_2 частиц в лабораторной системе отсчета через их энергии $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ после столкновения.

658. Основываясь на решении предыдущей задачи, выразить энергию частиц, испытавших упругое рассеяние, через углы рассеяния в лабораторной системе отсчета.

659. Ультррелятивистская частица с массой m и энергией \mathcal{E}_0 упруго рассеивается на неподвижном ядре с массой $M \gg m$. Определить зависимость конечной энергии \mathcal{E} частицы от угла ϑ ее рассеяния.

660. Решить предыдущую задачу для случая неупругого рассеяния частицы на ядре. Энергия возбуждения ядра ΔE в системе его покоя удовлетворяет неравенству $mc^2 \ll \Delta E \ll Mc^2$.

661. Частица с массой m испытывает упругое столкновение с неподвижной частицей такой же массы. Выразить кинетическую энергию T_1 рассеянной частицы через кинетическую энергию T_0 налетающей частицы и угол рассеяния ϑ_1 .

662. Используя результаты задачи 658, найти в нерелятивистском случае зависимость кинетических энергий T_1 и T_2 частиц, испытавших упругое соударение, от начальной кинетической энергии T_0 первой частицы и углов рассеяния ϑ_1 и ϑ_2 в лабораторной системе отсчета (вторая частица до столкновения покоилась).

663. Частицы с массами m_1 и m_2 испытывают упругое столкновение. Их скорости в системе ц. и. v'_1 и v'_2 угол рассеяния ϑ' , скорость системы ц. и. относительно лабораторной системы V . Определить угол χ разлета частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, случай $m_1 = m_2$.

664. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на равномерно движущемся свободном электроне. Вектор импульса электрона \mathbf{p}_0 составляет угол ϑ_0 с направлением движения кванта. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от направления его движения. Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился (эффект Комптона). Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился.

665. Фотон с энергией $\hbar\omega_0$ рассеивается на ультррелятивистском электроне с массой m и энергией $\mathcal{E}_0 \gg \hbar\omega_0$. Найти максимальную энергию $\hbar\omega$ рассеянного фотона.

666. Найти изменение энергии электрона при столкновении его с фотоном. Начальная энергия электрона \mathcal{E}_0 , фотона $\hbar\omega_0$, угол между их импульсами ϑ . Исследовать результат. При каких условиях электроны будут ускоряться под действием фотонных ударов?

667. Выразить инвариантные переменные s, t, u (XI.13) для случая упругого рассеяния одинаковых частиц через массу m , абсолютную величину импульса q и угол рассеяния ϑ в системе ц. и.

668. Пусть в лабораторной системе частица b покоится. Выразить энергию \mathcal{E}_a частицы a в лабораторной системе, а также энергии $\mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b$ частиц в системе ц. и. через инвариантную переменную s (см. (XI.13)). Сделать то же самое для абсолютных величин трехмерных импульсов p_a, p'_a ($p'_a = p'_b = p'$). Использовать систему единиц, в которой скорость света $c = 1$.

669. Выразить энергии $\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_d$ частиц, возникающих в результате двухчастичной реакции, через инвариантные переменные (XI.13). Энергии $\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_d$ относятся к лабораторной системе отсчета.

670. Выразить угол θ между трехмерными импульсами p_a, p_c в лабораторной системе при двухчастичной реакции через инвариантные переменные s, t, u (XI.13). Выразить через эти же переменные угол θ' между импульсами p'_a, p'_c в системе ц. и.

671. Построить область допустимых значений переменных s и t (см. (I.13)) для реакции $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ (фоторождение π^0 -мезона на протоне). Какая точка этой области соответствует порогу реакции? Каково пороговое значение T_0 энергии γ -кванта в лабораторной системе отсчета? Какую кинетическую энергию T_π имеет в лабораторной системе π^0 -мезон при пороговой энергии γ -кванта?

672. Два γ -кванта превращаются в пару электрон – позитрон. Энергия одного из них задана и равна \mathcal{E}_0 . При каких значениях \mathcal{E}_2 энергии второго кванта и угла ϑ между их импульсами возможна эта реакция? Изобразить эти значения на плоскости переменных $\mathcal{E}_2, \cos \vartheta$. Найти также область допустимых значений переменных s, t (XI.13). Энергию записывать в единицах mc^2 , где m – масса электрона.

673. Построить на кинематической плоскости переменных s, t (XI.13) физические области, соответствующие следующим трем процессам:

- а) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ – упругое рассеяние,
- б) $\pi^- + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \bar{p}$ – упругое рассеяние античастиц,
- в) $\pi^+ + \pi^- \rightarrow p + \bar{p}$ – рождение пары протон – антипротон.

Массы всех мезонов и всех нуклонов одинаковы (m и M соответственно).

674. Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Исходить из закона сохранения энергии-импульса.

675. Доказать, что при равномерном движении заряженной свободной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ (масса частицы m , заряд e , скорость v) может происходить излучение электромагнитных волн (эффект Вавилова – Черенкова)¹. Выразить угол ϑ между направлением распространения волны и направлением скорости v частицы через v , ω , $n(\omega)$ (ср. с задачей 827*).

УКАЗАНИЕ. В покоящейся среде с показателем преломления $n(\omega)$ фотон обладает энергией $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и импульсом $p = n(\omega)\frac{\hbar\omega}{c}$.

676. Доказать, что свободный электрон, движущийся в среде со скоростью v , может поглощать электромагнитные волны, частоты ω которых удовлетворяют неравенству $v > \frac{c}{n(\omega)}$, где $n(\omega)$ — показатель преломления среды.

677. Частица, имеющая, вообще говоря, сложную структуру и содержащая внутри себя электрические заряды (например, атом), движется равномерно со скоростью v в среде с показателем преломления $n(\omega)$ и находится в возбужденном состоянии. При переходе в нормальное состояние частица излучает квант с частотой ω_0 (в системе покоя). Этот квант наблюдается в лабораторной системе отсчета под углом ϑ к направлению движения частицы. Какая частота ω наблюдается в лабораторной системе (эффект Доплера в преломляющей среде)? Рассмотреть, в частности, случай $\omega \rightarrow 0$.

УКАЗАНИЕ. Члены второго порядка по \hbar не учитывать, считать, что $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, где m — масса частицы.

678. Частица, рассмотренная в задаче 677, движется равномерно через среду, находясь в своем нормальном состоянии (остальные условия задачи 677 сохраняются). Доказать, что при этом может происходить излучение, сопровождаемое возбуждением частицы. Выяснить, какие условия необходимы для возникновения такого излучения. Найти частоту ω этого излучения (сверхсветовой эффект Доплера).

679. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что черенковское излучение одного кванта частоты ω невозможно, если показатель преломления среды $n(\omega) \leq 1$ (см. задачу (676)). В частности, невозможно одноквантовое черенковское излучение достаточно жестких фотонов, так как при больших частотах $n(\omega) < 1$. Показать, что при равномерном движении быстрой заряженной частицы с энергией \mathcal{E}_0 через среду может

¹ Аналогичный эффект может иметь место также при прохождении через вещество нейтральной частицы, обладающей электрическим или магнитным моментом.

происходить излучение сразу двух фотонов, один из которых (с частотой ω_2) может быть жестким, так что для него $n(\omega_2) \rightarrow 1$. Выяснить, каким условиям должны удовлетворять частота ω_1 другого фотона и скорость v_0 частицы ($\hbar\omega_1 \ll cp_0$), чтобы был возможен такой процесс (жесткое излучение Вавилова–Черенкова). Какова наибольшая энергия жесткого кванта?

680. Рассмотреть кинематику жесткого излучения Вавилова–Черенкова (см. предыдущую задачу), считая электрон ультрарелятивистским, $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$, а угол ϑ_2 вылета жесткого кванта малым. Определить максимальное значение $(\hbar\omega_2)_{\max}$ энергии жесткого кванта, которого можно достичь в этом случае; рассмотреть характерные частные случаи.

681. Кристаллическая решетка способна принимать импульс только дискретными порциями $\mathbf{q} = 2\pi\hbar\mathbf{g}$, где \mathbf{g} — вектор обратной решетки. В случае кристаллической решетки, элементарная ячейка которой имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3 , вектор $\mathbf{g} = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3}\right)$, где n_1, n_2, n_3 — любые целые числа. Считая, что кристалл, имеющий очень большую массу, не может принимать от частицы энергию, выяснить, какой характер будет иметь угловое распределение частиц, рассеиваемых на монокристалле.

682. Учитывая связь $p_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$ между импульсом p_0 частицы и соответствующей длиной волны λ_0 , вывести условие Брэгга–Вульфа: $2a \sin \frac{\vartheta}{2} = n\lambda_0$, где a — расстояние между кристаллическими плоскостями, ϑ — угол рассеяния частицы.

683. Выяснить, какой характер будет иметь энергетический спектр тормозных квантов, возникающих при рассеянии заряженных частиц на монокристалле (ср. с задачей 681). Угол между направлением распространения тормозного кванта и первоначальным импульсом частицы фиксирован и мал, $\vartheta \ll 1$. Частица ультрарелятивистская, $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$.

§ 2. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

В электромагнитном поле \mathbf{E}, \mathbf{H} на точечную частицу с зарядом e , движущуюся со скоростью \mathbf{v} , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (\text{XI.16})$$

За единицу времени кинетическая энергия частицы меняется на величину

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (\text{XI.17})$$

где \mathcal{E} — энергия частицы (см. § 1).

Магнитное поле не совершает работы над частицей, так как магнитная сила перпендикулярна скорости. Из величин \mathbf{F} и $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ можно составить 4-вектор (вектор силы Минковского):

$$F_i = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, i \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (\text{XI.18})$$

4-сила выражается через тензор электромагнитного поля F_{ik} : $F_i = \frac{e}{c} F_{ik} u_k$, где u_k — 4-скорость частицы.

Дифференциальное уравнение движения частицы в четырехмерной записи имеет вид:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = eF_i \quad \text{или} \quad m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \quad (\text{XI.19})$$

Проектируя эти уравнения на пространственную и временную оси, получим уравнения движения в трехмерной форме и закон сохранения энергии:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \dot{T} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{XI.20})$$

Здесь $T = \mathcal{E} - mc^2$ — кинетическая энергия частицы, \mathbf{p} — ее импульс, точкой обозначено дифференцирование по времени t . Формулы (XI.20) применимы при произвольной скорости частицы.

Функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле с потенциалами φ , \mathbf{A} имеет вид:
в релятивистском случае

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U; \quad (\text{XI.21})$$

в нерелятивистском случае

$$L = \frac{mv^2}{2} - U, \quad (\text{XI.22})$$

где

$$U = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\varphi. \quad (\text{XI.23})$$

Величина U играет роль потенциальной энергии взаимодействия частицы с внешним полем. Уравнения движения частицы могут быть записаны в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{XI.24})$$

где q_i, \dot{q}_i — обобщенные координаты и скорости.

Ток, возникающий при вращательном (орбитальном) движении точечной заряженной частицы вокруг некоторого центра, характеризуется магнитным моментом¹

$$\mathbf{m} = \kappa \mathbf{l}, \quad (\text{XI.25})$$

где $\kappa = \frac{e}{2mc}$ — гиромангнитное отношение, m — масса частицы, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ — момент импульса. Во внешнем магнитном поле \mathbf{H} на частицу действует вращательный момент $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$, под действием которого момент импульса \mathbf{l} изменяется со временем по закону $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{N}$. Согласно (XI.25), зависимость магнитного момента \mathbf{m} от времени определяется уравнением:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \kappa \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (\text{XI.26})$$

Кроме механического и магнитного моментов, связанных с орбитальным движением, микрочастицы обладают также собственным (спиновым) механическим \mathbf{s} и магнитным \mathbf{m}_0 моментами, направленными параллельно или антипараллельно:

$$\mathbf{m}_0 = \kappa_0 \mathbf{s}. \quad (\text{XI.27})$$

Для электрона $\kappa_0 = \frac{e}{mc} < 0$, где e — заряд электрона, m — его масса. Изменение со временем момента \mathbf{m}_0 описывается уравнением (XI.26), в котором κ заменяется на κ_0 и \mathbf{m} на \mathbf{m}_0 .

Нейтрон не имеет электрического заряда, но обладает, тем не менее, спиновым моментом \mathbf{m}_0 . Этот момент благодаря квантовым эффектам может ориентироваться во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ только двумя способами: по полю или против него, причем первоначальная ориентация сохра-

¹Классическая теория, излагаемая ниже, применима к микрочастицам лишь с оговорками. Последовательная теория движения элементарных магнитных моментов должна быть квантовой.

няется, если выполнено определенное условие¹. В этом случае движение нейтронов с магнитным моментом, ориентированным по полю (или против него), можно рассматривать как движение классических частиц в силовом поле с потенциальной энергией

$$U = \mp m_0 H, \quad (\text{XI.28})$$

где

$$H = |\mathbf{H}(\mathbf{r})|.$$

Энергия U обычно очень мала, поэтому магнитное поле оказывает влияние практически лишь на движение очень медленных («холодных») нейтронов.

684. Написать релятивистское уравнение движения частицы под действием силы \mathbf{F} , выразив импульс явным образом через скорость \mathbf{v} частицы. Рассмотреть, в частности, случай, когда скорость а) меняется только по величине; б) меняется только по направлению; в) $v \ll c$.

685. Выразить друг через друга вектор силы, действующей на частицу в лабораторной системе (\mathbf{F}) и в системе покоя (\mathbf{F}'). Скорость частицы \mathbf{v} .

686. Какая сила F действует с точки зрения наблюдателя в мгновенно сопутствующей системе на тело массы m , находящееся в ракете и неподвижное относительно нее, если ракета движется с релятивистской скоростью v по круговой орбите радиуса R ?

687. Два заряда e и e' движутся параллельно оси x с равными постоянными скоростями v . Используя результаты задачи 610, показать, что электромагнитная сила, действующая между зарядами, может быть получена из так называемого конвекционного потенциала² $\psi = (1 - \beta^2) \frac{e}{R}$, где

$$R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1 - \beta^2)[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]},$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы зарядов, по формуле $\mathbf{F} = -e' \text{grad } \psi$. Что происходит с этой силой при $v \rightarrow c$?

¹Условие адиабатичности, состоящее в том, что угол поворота поля за единицу времени в той системе, где нейтрон покоится, мал по сравнению с частотой прецессии $\omega_L = \frac{2m_0 H}{\hbar}$ магнитного момента m_0 в поле \mathbf{H} .

²Конвекционным потенциалом движущейся как целое системы зарядов называется функция координат, дифференцирование которой дает компоненты лоренцовой силы, действующей в лабораторной системе на единичный пробный заряд, движущийся вместе с этой системой зарядов.

688. Найти конвекционный потенциал ψ бесконечно длинного прямого равномерно заряженного провода. Линейная плотность заряда равна λ в той системе отсчета, где провод покоится. Провод перемещается поступательно со скоростью v под углом α к своей длине (в лабораторной системе отсчета). Рассмотреть, в частности, случаи $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

689. Бесконечно длинная равномерно заряженная прямая с линейной плотностью заряда λ в системе, где прямая покоится, перемещается вдоль своей длины равномерно со скоростью v . На расстоянии r от нее находится точечный заряд, движущийся параллельно прямой с той же скоростью. Найти электромагнитную силу F , действующую на заряд; скорость v произвольна.

690. Распределение электронов в параллельном пучке обладает аксиальной симметрией и характеризуется объемной плотностью заряда ρ в системе отсчета, связанной с электронами. Электроны ускорены разностью потенциалов V . Полный ток в пучке равен \mathcal{I} . Найти величину электромагнитной силы F , приложенной к одному из электронов пучка в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 689.

691. Найти уширение Δa пучка электронов, рассмотренного в предыдущей задаче, на пути L вследствие взаимного отталкивания электронов. Сечение пучка — круг радиуса a . Считать уширение малым ($\Delta a \ll L$).

692*. Частица с зарядом e и массой m движется с произвольной скоростью в однородном постоянном электрическом поле \mathbf{E} . В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс \mathbf{p}_0 . Определить трехмерные координаты и время t частицы в лабораторной системе, в функции ее собственного времени τ . Исключив τ , представить трехмерные координаты частицы в зависимости от t .¹ Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

693. Найти траекторию заряженной частицы с зарядом e и массой m в однородном постоянном электрическом поле \mathbf{E} , используя результаты задачи 692*. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский случай.

694. Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e , массой m и начальной энергией \mathcal{E} в тормозящем однородном электрическом поле E , параллельном начальной скорости частицы.

¹Задача может быть решена также непосредственно путем интегрирования уравнений движения частицы в трехмерной форме.

695*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле \mathbf{H} . В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке с радиусом-вектором \mathbf{r}_0 , обладая импульсом \mathbf{p}_0 . Определить закон движения частицы.

696*. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m движется в скрещенных постоянных однородных электрическом $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$ и магнитном $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ полях. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела скорость $\mathbf{v} = (v_{0x}, 0, v_{0z})$. Определить зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, начертить возможные траектории частицы.

УКАЗАНИЕ. Для упрощения интегрирования ввести $u = x + iy$.

697. Релятивистская частица движется в параллельных однородных постоянных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \parallel z$). При $t = 0$ частица находилась в начале координат, обладая импульсом $\mathbf{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Определить зависимость x , y , z , t от собственного времени частицы τ .

698. Определить закон движения частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях. Сделать это двумя способами: а) используя преобразование Лоренца и считая известным движение частицы в чисто электрическом или чисто магнитном поле (см. задачи 692* и 695*) и б) интегрируя уравнения (XI.19).

699. Найти кинетическую энергию T частицы в функции собственного времени τ для случаев движения, рассмотренных в задачах 692*, 697, 698.

700. Частица, начальная скорость v_0 которой мала ($v_0 \ll c$), движется в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, $E \ll H$. Определить закон движения частицы, используя преобразования Лоренца и считая известным движение частицы в параллельных электрическом и магнитном полях (см. задачу 697). При решении использовать результаты задачи 603. Ответ сравнить с задачей 696*.

701. Определить закон движения частицы с зарядом e и массой m в поле плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E}(t'), \quad \mathbf{H}(t'),$$

где $t' = t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}$, \mathbf{n} — орт распространения волны. В начальный момент частица покоилась в начале координат.

УКАЗАНИЕ. Обратит внимание на то, что собственное время τ частицы совпадает с аргументом t' плоской волны.

702. Нерелятивистская заряженная частица с зарядом e и массой m проходит через двумерное электростатическое поле с потенциалом $\varphi = k(x^2 - y^2)$, где $k = \text{const} > 0$ (линза с сильной фокусировкой). В момент времени $t = 0$ частица находится в точке с координатами x_0, y_0, z_0 ; начальная скорость v_0 параллельна оси z . Определить движение частицы.

703. Найти дифференциальные уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле исходя из функции Лагранжа в цилиндрических координатах.

УКАЗАНИЕ. При вычислении производной по времени в уравнениях Лагранжа нужно учитывать, что эта производная берется вдоль траектории частиц, так что r, α, z должны рассматриваться как функции времени.

704*. Между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами a и b ($a < b$) поддерживается разность потенциалов V . В пространстве между обкладками имеется аксиально симметричное магнитное поле, напряженность которого параллельна оси конденсатора. Из внутренней обкладки, играющей роль катода, вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Найти критическое значение тока магнитного поля $\Phi_{\text{кр}}$ между обкладками, при котором электроны перестанут попадать на анод вследствие искривления их траекторий в магнитном поле.

705. Длинный прямой цилиндрический катод радиуса a , по которому течет равномерно распределенный ток \mathcal{I} , испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала V к длинному коаксиальному аноду радиуса b . Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов $V_{\text{кр}}$ между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на заворачивающее действие магнитного поля тока \mathcal{I} ?

706. По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса a течет ток \mathcal{I} . С поверхности провода срывается электрон начальной скоростью v_0 которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние b , на которое электрон может удалиться от оси проводника.

707. Решить задачу 705, используя преобразование Лоренца к системе отсчета, в которой имеется только одно поле (\mathbf{E} или \mathbf{H}).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами задач 606 и 706.

708*. Релятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze . Найти уравнение траектории частицы. Исследовать возможные траектории в случае, когда момент импульса $K > \frac{Ze^2}{c}$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнениями, полученными в задаче 703.

709. Исследовать возможные траектории частицы, рассмотренной в предыдущей задаче, в том случае, когда $K \leq \frac{Ze^2}{c}$.

710*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в поле тяжелого одноименного точечного заряда Ze . Найти траекторию частицы и исследовать решение.

711. Показать, что при движении частицы в кулоновом поле притяжения (см. задачу 708*) скорость частицы стремится к c при $r \rightarrow 0$ ($Ze^2 \geq Kc$).

712. Найти траекторию относительного движения нерелятивистских частиц с зарядами e, e' , массами m_1, m_2 и энергией \mathcal{E} . Исследовать решение.

713*. Найти дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ нерелятивистских частиц с зарядом e в поле неподвижного точечного заряда e' . Скорость частиц вдали от рассеивающего центра равна v_0 .

714. Определить угол θ отклонения релятивистской заряженной частицы с зарядом e , энергией $\mathcal{E} > mc^2$ и моментом импульса $K > \frac{|ee'|}{c}$, пролетающей в кулоновом поле тяжелого неподвижного заряда e' (см. задачи 708* и 710*).

715. Релятивистская частица с зарядом e , массой m и скоростью на бесконечности v_0 рассеивается на малый угол кулоновым полем неподвижного заряда e' . Определить дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

716. Электрон с зарядом e и массой m пролетает в вакууме над плоской незаряженной поверхностью диэлектрика с проницаемостью ϵ . Вначале электрон двигался параллельно поверхности диэлектрика со скоростью v и находился от нее на расстоянии a . На каком расстоянии x от проекции начального положения электрона на поверхность диэлектрика электрон врежется в диэлектрик?

717*. В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон э. д. с. индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток Φ , пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_0 , который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило «2: 1»).

718*. Показать, что с точностью до членов $\frac{v^2}{c^2}$ энергия запаздывающего взаимодействия двух заряженных частиц имеет вид:

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] \right\},^1$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор относительного положения частиц, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 — скорости частиц. Все величины в правой части равенства берутся в момент t .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться разложениями потенциалов Лиенара–Вихерта, найденными ниже в задаче 757*, оставив в них только те члены, которые не зависят от ускорений и их производных. Произвести градиентное преобразование потенциалов таким образом, чтобы скалярный потенциал принял форму кулонова потенциала.

719. Найти приближенное выражение функции Лагранжа двух взаимодействующих частиц с зарядами e_1 , e_2 и массами m_1 , m_2 , учитывая эффект запаздывания с точностью до поправочных членов порядка $\frac{v^2}{c^2}$.

720. Частица с магнитным моментом \mathbf{m} и гиромагнитным отношением κ находится во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{H} . Определить характер движения магнитного момента частицы.

721*. Частица с зарядом e и массой m , имеющая внутренние (спиновые) механический \mathbf{s} и магнитный

$$\mathbf{m} = \frac{e}{mc} \mathbf{s}$$

моменты, совершает нерелятивистское движение во внешнем электростатическом центрально-симметричном электростатическом поле $\varphi(r)$. Вычислить энергию взаимодействия U спина с внешним полем в первом исчезающем приближении по v/c , приняв во внимание томасовскую прецессию мгновенно сопутствующей системы с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{2c^2}.$$

Происхождение прецессии Томаса поясняется в задаче 567.

¹Это выражение носит название формулы Брейта. Аналогичное выражение используется при приближенном квантовом описании запаздывающего взаимодействия.

УКАЗАНИЕ. Скорости изменения произвольного вектора \mathbf{A} в неподвижной и вращающейся системах координат связаны соотношением

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{исподв}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{вращ}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения (см. [64]).

722. Решить предыдущую задачу в предположении, что частица движется в потенциальном поле $V(r)$, но поле не электрическое. В связи с этим в сопутствующей системе отсчета магнитное поле отсутствует.

723. Нейтрон с магнитным моментом m_0 и кинетической энергией \mathcal{E}_0 влетает из пустоты в магнитное поле с напряженностью $H = \text{const}$, имеющее плоскую границу. При каком условии нейтрон отражается от поля?

724. Рассмотреть возможные траектории холодного нейтрона (масса m , магнитный момент m_0) в поле бесконечного прямого провода с током \mathcal{I} .

725. Поток холодных нейтронов (скорость v_0 , магнитный момент m_0 , масса m) рассеивается на магнитном поле бесконечного прямого провода с током \mathcal{I} .

Определить дифференциальную поперечную длину рассеяния

$$l(\alpha) = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|,$$

где $s(\alpha)$ — прицельное расстояние, при котором нейтрон рассеивается на угол α .

УКАЗАНИЕ. Использовать схему решения задачи 713*.

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [64, 65], Фок В. А. [107], Френкель Я. И. [111], Гуревич Л. Э. [49], Бергман П. Г. [13], Паули В. [87], Беккер Р. [12], Спитцер Л. [98], Джексон Дж. [52], Челлен Г. [114], Окунь Л. Б. [83], Балдин А. М., Гольданский В. И., Розенталь И. Л. [8], Зоммерфельд А. [56], Ливингстон М. С. [73], Гринберг А. П. [45], Кельман В. М., Явор С. Я. [58], Моррисон Ф. [80], Скачков С. В. и др. [92], Тамм И. Е. [102], Франк И. М. [108], Гинзбург В. Л., Франк И. М. [37], Компанец А. С. [60], Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. [6], Голдстейн Г. [41].

ГЛАВА XII

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Вектор Герца и разложение по мультиполям

Задача нахождения переменного электромагнитного поля в вакууме по заданному распределению зарядов $\rho(\mathbf{r}', t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ может быть решена путем вычисления запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (\text{XII.1})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (\text{XII.2})$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения поля, \mathbf{r}' — радиус-вектор источника поля, dV' — элемент объема источника поля. Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям Даламбера:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (\text{XII.3})$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (\text{XII.4})$$

и связаны между собой условием Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.5})$$

Количество неизвестных функций может быть уменьшено, если вместо потенциалов $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$, связанных между собой уравнением (XII.5),

ввести одну векторную функцию $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$ (вектор Герца, и поляризационный потенциал), через которую \mathbf{A} и φ выражаются формулами:

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}, \quad (\text{XII.6})$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \quad (\text{XII.7})$$

Распределение зарядов и токов при этом целесообразно описывать с помощью одной векторной функции $\mathbf{P}(\mathbf{r}', t)$, связанной с ρ и \mathbf{j} соотношениями:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (\text{XII.8})$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (\text{XII.9})$$

Такое определение величины \mathbf{P} обеспечивает выполнение уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Величина \mathbf{P} называется поляризацией (не следует смешивать эту величину с поляризацией диэлектрика).

Вектор Герца \mathbf{Z} удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$\Delta \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{P}. \quad (\text{XII.10})$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через \mathbf{Z} формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z} - 4\pi \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{Z}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.11})$$

Чтобы найти электромагнитное поле по заданным ρ и \mathbf{j} , используя вектор Герца, нужно сначала определить с помощью формул (XII.8) и (XII.9) вектор поляризации \mathbf{P} . Вследствие аналогии между уравнениями (XII.3)–(XII.4) и (XII.10) вектор Герца выражается затем через \mathbf{P} так же, как запаздывающие потенциалы φ и \mathbf{A} через ρ и \mathbf{j} :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \quad (\text{XII.12})$$

Если система зарядов и токов заключена в ограниченной области, размеры которой имеют порядок a , а порядок величины длин волн, существенных в спектральных разложениях потенциалов, составляет λ , то при

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{r} \ll 1 \quad (\text{XII.13})$$

можно произвести разложение подынтегральных функций по степеням $\frac{a}{\lambda}$ и $\frac{a}{r}$.

Если ограничиться первым членом такого разложения, то

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t')}{r}, \quad (\text{XII.14})$$

где $t' = t - \frac{r}{c}$ — ретардированное время центра системы.

Величина

$$\mathbf{p}(t') = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') dV' \quad (\text{XII.15})$$

представляет собой электрический дипольный момент распределения зарядов (ср. с задачами 741, 742). Соответствующие выражения для \mathbf{A} и φ будут тогда следовать из (XII.6) и (XII.7).

Особый интерес представляет рассмотрение поля на таких больших расстояниях r от системы зарядов, что наряду с (XII.13) выполняется неравенство

$$r' \ll \lambda \ll r \quad (\text{XII.16})$$

(волновая зона). В этом случае для нахождения поля можно воспользоваться разложением векторного потенциала по степеням $\frac{A}{\lambda}$, которое с точностью до $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t')}{2c^2r} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t') \times \mathbf{n}}{cr}. \quad (\text{XII.17})$$

Здесь $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — орт в направлении распространения электромагнитных волн,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' \quad (\text{XII.18})$$

— магнитный дипольный момент,

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta, \quad Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}', t') x'_\alpha x'_\beta dV' \quad (\text{XII.19})$$

— составляющие квадрупольного момента, точкой обозначается дифференцирование по t' .

Характерна зависимость векторного потенциала в волновой зоне от расстояния r до системы. Она обеспечивает (см. ниже) существование не исчезающего на бесконечности потока энергии в направлении от системы. Это значит, что таким векторным потенциалом описывается излучение электромагнитной энергии.

Второй (электрический квадрупольный) и третий (магнитный дипольный) члены в этом выражении меньше в $\frac{a}{\lambda}$ раз¹ первого (электрического дипольного) по порядку величины и могут быть отброшены, если только нет каких-либо особых причин, сильно уменьшающих первый член.

В волновой зоне поле в достаточно малых областях пространства имеет характер бегущей от источника плоской волны. Напряженности этого поля могут быть вычислены по формулам:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (\text{XII.20})$$

Угловое распределение излучения характеризуется количеством энергии, протекающей в единицу времени через единицу телесного угла:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2. \quad (\text{XII.21})$$

Полная интенсивность I излучения получается интегрированием (XII.21) по всем направлениям.

При использовании разложения (XII.17), получаем

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{p}})^2 + \frac{1}{60c^5} \left[3 \sum_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 - \left(\sum_{\beta} \ddot{Q}_{\beta\beta} \right)^2 \right] + \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{m}})^2. \quad (\text{XII.22})$$

В случае периодического движения зарядов обычно представляют основной интерес средние по времени за период величины \bar{I} и $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

726. Непосредственной подстановкой убедиться в том, что запаздывающие потенциалы удовлетворяют уравнению Даламбера и условию Лоренца.

727. Используя результаты задачи 32*, получить формулу (XII.22).

728. Записать уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы φ и \mathbf{A} , если вместо условия Лоренца (XII.5) наложить на них условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (так называемая кулонова калибровка).

¹Если излучающей системой является частица, движущаяся в ограниченной области со скоростью v , то $\frac{a}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$.

729. Показать, что в волновой зоне при выполнении условия Лоренца скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$.

730. Используя результаты задачи 620* (формулы (2) и (3)), найти выражение для потери момента импульса в единицу времени $-\frac{dK}{dt}$ системой, излучающей как электрический диполь.

731. Найти уравнения силовых линий электрического и магнитного полей точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t$. Проследить за качественным изменением картины поля в зоне, прилегающей к осциллятору, и в волновой зоне.

УКАЗАНИЕ. Если полярная ось направлена вдоль \mathbf{p}_0 , то электромагнитное поле осциллятора имеет вид:

$$E_r = \frac{2p_0 \cos \vartheta}{r^2} \left[\frac{\cos(kr - \omega t)}{r} + k \sin(kr - \omega t) \right],$$

$$E_\vartheta = \frac{p_0 \sin \vartheta}{r} \left[\left(\frac{1}{r^2} - k^2 \right) \cos(kr - \omega t) + \frac{k}{r} \sin(kr - \omega t) \right],$$

$$E_\alpha = H_r = H_\vartheta = 0;$$

$$H_\alpha = -\frac{p_0 k^2}{r} \sin \left[\cos(kr - \omega t) + \frac{p_0 k}{r^2} \sin(kr - \omega t) \right].$$

732. Найти электромагнитное поле \mathbf{H} , \mathbf{E} заряда e , движущегося равномерно по окружности радиуса a . Движение нерелятивистское, угловая скорость ω . Расстояние до точки наблюдения $r \gg a$. Найти средние по времени угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения, а также исследовать его поляризацию.

733. Исследовать влияние интерференции на излучение электромагнитных волн системой зарядов в следующем примере: два одинаковых электрических заряда e движутся равномерно с нерелятивистской скоростью и с частотой ω по круговой орбите радиуса a , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Найти поляризацию, угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и интенсивность \bar{I} излучения. Как изменится интенсивность излучения, если убрать один из зарядов (ср. с результатом задачи 732).

734. Насколько расположение зарядов в предыдущей задаче должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного и квадрупольного излучений были равны?

735. Колебания двух электрических дипольных осцилляторов имеют одинаковую частоту ω , но сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p_0 и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти поле \mathbf{H} в волновой зоне, угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

736. Исследовать состояние поляризации поля излучения системы осцилляторов, рассмотренных в предыдущей задаче, используя методику, изложенную в решении задачи 399.

737*. Найти среднюю по времени плотность $\bar{\gamma}$ потока энергии на больших расстояниях от заряда, рассмотренного в задаче 732, учитывая члены порядка $\frac{1}{r^3}$. Найти вращательный момент \mathbf{N} , приложенный к полностью поглощающему сферическому экрану большого радиуса, около центра которого движется этот заряд.

738. Равномерно намагниченный шар радиуса a с намагниченностью \mathbf{M} вращается с постоянной частотой ω вокруг оси, проходящей через центр шара и составляющей угол φ с направлением \mathbf{M} . Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} и исследовать характер поляризации. Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

739. Равномерно заряженная по объему капля пульсирует с неизменной плотностью. Поверхность капли при этом описывается уравнением

$$R(\vartheta) = R_0[1 + aP_2(\cos \vartheta) \cos \omega t],$$

где $a \ll 1$. Заряд капли q . Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

740. Электрический заряд q распределен сферически симметричным образом в ограниченной области и совершает радиальные пульсации. Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} вне распределения зарядов.

741. Найти выражения электрических дипольного Z_p и квадрупольного Z_Q , а также магнитного дипольного Z_m членов разложения вектора Герца, справедливые при произвольной зависимости токов и зарядов от времени, на расстояниях $r \gg a$, $\lambda \gg a$ (выполнение условия $r \gg \lambda$ не обязательно).

742. Найти в векторной форме выражения для напряженностей электромагнитных полей электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных осцилляторов на расстояниях от них, больших по сравнению с их размерами.

УКАЗАНИЕ. При дифференцировании по r учитывать, что моменты \mathbf{p} и \mathbf{m} должны быть взяты в ретардированный момент $t' = t - \frac{r}{c}$ и, следовательно, зависят от r .

743. Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения от открытого резонатора, рассмотренного: а) в задаче 532; б) в задаче 533.

УКАЗАНИЕ. Эти резонаторы можно рассматривать как совокупность электрического и магнитного диполей, колеблющихся с резонансной частотой ω_0 .

744. Моменты двух одинаковых электрических диполей направлены по одной прямой и осциллируют в противофазе с частотой ω (амплитуда p_0). Расстояние между центрами a , $\lambda \gg a$. Найти электромагнитное поле на расстояниях $r \gg a$. Найти угловое распределение излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ и его полную интенсивность \bar{I} .

745*. В линейной антенне длиной l возбуждена стоячая волна тока \mathcal{I} с амплитудой \mathcal{I}_0 , частотой ω и узлами на концах антенны. Число полуволн тока, укладываемых на длине антенны, равно m . Найти угловое распределение излучения $\frac{dI}{d\Omega}$.

746. Найти полное излучение \bar{I} и сопротивление излучения $R = \frac{2\bar{I}}{\mathcal{I}_0^2}$ антенны, рассмотренной в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Результат выражается через интегральный косинус

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt,$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера (см. справочник [90], 8.230).

747. В линейной антенне длиной l распространяется бегущая волна¹ тока $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}$, где $k = \frac{\omega}{c}$, ξ — координата точки на антенне. Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

748*. В круглой проволочной петле радиуса a возбуждена стоячая волна тока вида $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin n\alpha' e^{-i\omega t}$. Найти электромагнитное поле \mathbf{H} , \mathbf{E} в волновой зоне.

749*. Центры двух электрических дипольных осцилляторов с частотой ω и одинаковой амплитудой $\mathbf{p}_0 \parallel x$ находятся на оси z , на равных расстояниях от начала координат и на расстоянии $a = \frac{\lambda}{4}$ друг от друга. Колебания в осцилляторах сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

750. Отражение системы B зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ в плоскости $z = 0$ состоит в том, что а) каждая точка $\mathbf{r} = (x, y, z)$ переходит в положение $\mathbf{r}' = (x, y, -z)$; б) плотность заряда меняет знак: $\rho(\mathbf{r}, t) = -\rho'(\mathbf{r}', t)$, где ρ' — плотность заряда в отраженной системе B' . Выяснить, как при отражении преобразуются плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, электрические \mathbf{p} , \mathbf{Q} и магнитный \mathbf{m} моменты системы, а также электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} .

751. Доказать, что электромагнитное поле произвольной системы B зарядов вблизи идеально проводящей плоскости может быть получено как суперпозиция полей системы B и системы B' , отраженной в этой плоскости (см. предыдущую задачу). Рассмотреть, в частности, излучение электрического дипольного осциллятора с моментом $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 f(t)$ ($|\mathbf{p}_0| = 1$, $f(t)$ — произвольная функция), находящегося на расстоянии $b \ll \lambda$ от такой плоскости и образующего с ней угол $\varphi_0 = \text{const}$ (ограничиться электрическим дипольным приближением).

752. Электрический диполь с амплитудой момента \mathbf{p}_0 и частотой ω находится на расстоянии $\frac{a}{2}$ от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор \mathbf{p}_0 параллелен плоскости). Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} на расстояниях $r \gg \lambda$ и угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

¹Нагрузки на концах антенны должны быть подобраны таким образом, чтобы отраженной волны не возникало.

753. а) Показать, что если функция $u(r, \vartheta, \alpha)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, то потенциал Герца для монохроматического поля электрического типа ($H_r = 0$) с частотой $\omega = kc$ в свободном от источников поля пространстве может быть представлен в форме: $\mathbf{Z} = ur + \text{grad } \chi$, $\chi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial r}(ru)$; б) найти выражения составляющих напряженности электромагнитного поля \mathbf{H} , \mathbf{E} по осям сферической системы координат через $u(r, \vartheta, \alpha)$ (функция u называется потенциалом Дебая).

УКАЗАНИЕ. Доказывая, что $\Delta \mathbf{Z} + k^2 \mathbf{Z} = 0$, обратить внимание на то, что существует соотношение $\Delta \chi + k^2 \chi + 2u = 0$.

754. Показать, что поле точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$, находящегося в точке \mathbf{r}_0 ($\mathbf{r}_0 \parallel p_0$), может быть описано потенциалом Дебая (см. задачу 654) вида $u = \frac{p_0}{r_0} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

УКАЗАНИЕ. Вектор Герца $\mathbf{Z} = ur + \text{grad } \chi$, соответствующий потенциалу u , отличается от выражения $\frac{p_0}{R} e^{ikR}$ (см. (XII.14)), но приводит к тем же выражениям \mathbf{E} и \mathbf{H} .

755. Точечный электрический дипольный осциллятор с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$ находится на расстоянии b от центра идеально проводящего шара радиуса a . Момент направлен вдоль линии, соединяющей диполь с центром шара. Воспользовавшись потенциалом Дебая u (см. задачу 753), найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . Найти угловое распределение излучения $\frac{dI}{d\Omega}$.

§ 2. Электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольным образом

Точечный заряд e , движущийся со скоростью $\mathbf{v}(t')$ и находящийся в момент времени t' в точке $\mathbf{r}_0(t')$, возбуждает электромагнитное поле, потенциалы которого в точке \mathbf{r} в момент времени t определяются формулами Лиенара – Вихерта:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{c(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_{t'}, \quad (\text{XII.23})$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Ретардированное время t' определяется уравнением

$$c(t - t') = |\mathbf{R}|. \quad (\text{XII.24})$$

Из потенциалов Лиенара – Вихерта можно получить напряженности поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3 R^2} + \frac{e\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3 R} \Big|_{t'}, \quad (\text{XII.25})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{t'},$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Первый член \mathbf{E} и соответствующий ему член \mathbf{H} описывают поле, убывающее с расстоянием по закону $\frac{1}{R^2}$ (квазистационарное поле), которое движется вместе с зарядом, не отрываясь от него. Второй член в \mathbf{E} и соответствующий ему член в \mathbf{H} описывают поле, убывающее с расстоянием по закону $\frac{1}{R}$ (поле излучения); поток энергии этого поля не зависит от R . Это означает, что поле излучения отрывается от породившего его заряда. На большом расстоянии от заряда (в волновой зоне) квазистационарное поле пренебрежимо мало по сравнению с полем излучения. Как видно из (XII.25), условием возникновения поля излучения является наличие ускорения $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$.

Интенсивность излучения в направлении $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ выражается через напряженность электрического поля \mathbf{E} в волновой зоне:

$$\frac{dI_{\mathbf{n}}(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) R^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^6} \right]. \quad (\text{XII.26})$$

Если скорость v заряда мала по сравнению со скоростью света, то поле излучения может быть разложено по мультиполям, и для его вычисления можно воспользоваться формулами (XII.17)–(XII.22).

В результате излучения ускоренно движущаяся частица теряет свою энергию \mathcal{E} и импульс \mathbf{p} , передавая их электромагнитному полю. Потерю i -й составляющей 4-вектора энергии-импульса частицы $p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$ в единицу

собственного времени τ можно выразить через 4-скорость u_i и 4-ускорение ω_i частицы:

$$-\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_k^2 u_i. \quad (\text{XII.27})$$

Потеря энергии частицей в единицу времени в лабораторной системе отсчета $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$ (скорость потери энергии) отличается от четвертой составляющей (XII.27) множителем $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, так как $dt' = \gamma d\tau$. Интенсив-

ность излучения, определяемая с помощью (XII.26), не совпадает, в свою очередь, со скоростью потери энергии (см. задачи 762*–768).

Поле $\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t)$ заряда, совершающего периодическое движение по замкнутой орбите $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t')$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$, может быть разложено в ряд Фурье $\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_l e^{-i\omega_0 l t}$. Компонента Фурье \mathbf{A}_l , поля на больших расстояниях от орбиты выражается формулой:

$$\mathbf{A}_l = e \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_0}}{cR_0 T} \oint e^{i[l\omega_0 t' - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0(t')]} \mathbf{v}(t') dt', \quad (\text{XII.28})$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \mathbf{k} = \frac{l\omega_0}{c} \mathbf{n}.$$

Интеграл распространен по всей траектории заряда.

Заряженные частицы при столкновении движутся с ускорением и, вследствие этого, излучают электромагнитную энергию. Закон движения сталкивающихся частиц и, следовательно, излучаемая ими при столкновении энергия определяется видом взаимодействия и прицельным расстоянием s (если потенциальная энергия взаимодействия сталкивающихся частиц зависит только от расстояния между ними). Энергию, излучаемую во всех направлениях при рассеянии потока частиц, удобно характеризовать полным эффективным излучением

$$\kappa = 2\pi \int_0^{\infty} \Delta W(s) s ds, \quad (\text{XII.29})$$

где $\Delta W(s)$ — энергия, излучаемая при одиночном столкновении двух частиц, s — прицельное расстояние.

Распределение излучения по направлениям характеризуется дифференциальным эффективным излучением $d\kappa_n$, которое определяется выражением:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{d[\Delta W_n(s)]}{d\Omega} s ds. \quad (\text{XII.30})$$

Здесь $\frac{d[\Delta W_n(s)]}{d\Omega}$ — энергия, излучаемая в направлении n в единицу телесного угла при одиночном столкновении с прицельным расстоянием s , усредненная по азимуту в плоскости, перпендикулярной потоку частиц. Аналогичной формулой определяется дифференциальное эффективное излучение на единичный интервал частот $\frac{d\kappa_\omega}{d\omega}$. Если главную роль при столкновении играет дипольное излучение, то (XII.30) принимает вид:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} [A + B P_2(\cos \vartheta)]. \quad (\text{XII.31})$$

где $P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$ — полином Лежандра (см. приложение 2), ϑ — полярный угол между направлением n излучения и направлением z потока падающих частиц,

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \int_0^{\infty} 2\pi s ds \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{p}}^2 dt, \\ B &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} 2\pi s ds \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{p}}^2 - 3\dot{p}_z^2) dt. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.32})$$

Спектральное разложение излучения при столкновении, продолжительность которого τ , в области малых частот $\omega\tau \ll 1$ может быть найдено по формуле

$$\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} \left[\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 \right], \quad (\text{XII.33})$$

где сумма берется по всем сталкивающимся частицам, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости частиц до и после столкновения ($v_1, v_2 \ll c$).

756*. Получить потенциалы Лиенара – Вихерта (см. (XII.23)) из общих формул для запаздывающих потенциалов.

УКАЗАНИЕ. Распределение заряда в точечной частице характеризуется объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}', t) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)]$, где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t , e — ее заряд. При вычислении объемного интеграла по $dV' = dx' dy' dz'$ нужно перейти к новой переменной $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$.

757*. Произведя разложение по степеням R/c в общих формулах записывающих потенциалов ((XII.1), (XII.2)), найти разложение потенциалов Лиенара–Вихерта по степеням $1/c$.

758. Получить потенциалы поля равномерно движущегося точечного заряда из потенциалов Лиенара–Вихерта, выразив в последних ретардированное время t' через время t наблюдения поля (ср. с задачами 610 и 811*).

759. Найти напряженности поля равномерно движущегося точечного заряда, воспользовавшись для этого общими формулами (XII.25). Выразить поле через время t его наблюдения, исключив ретардированное время t' (ср. с задачей 610).

760. Заряд e движется с малой скоростью v и ускорением \dot{v} ограниченной области. Найти приближенные выражения электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} частицы в точках, расстояние r до которых частицы велико по сравнению с размерами области движения заряда. Определить положение границы квазистационарной и волновой зон.

761. Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ излучения заряда, рассмотренного в предыдущей задаче. Найти полное излучение I .

762*. Частица теряет в единицу времени за счет излучения в некотором направлении энергию $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt' d\Omega}\right)$ (скорость потерь энергии на единицу телесного угла в данном направлении). Выразить эту величину через интенсивность излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ в данном направлении определяемую вектором Пойнтинга. Решить задачу двумя способами: а) аналитическим — рассмотреть связь ретардированного времени t' с временем наблюдения t ; б) геометрическим — рассмотреть форму области пространства, в которой локализована электромагнитная энергия, излученная частицей за время dt' .

763. Доказать, что если частица совершает периодическое движение, то средняя за период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

764. Доказать формулу (XII.26).

765. Найти суммарную по всем направлениям скорость потерь энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$ излучающей заряженной частицей, выразив ее а) через скорость $\mathbf{v}(t')$ и ускорение $\dot{\mathbf{v}}(t')$, б) через скорость $\mathbf{v}(t')$ и напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} внешнего электромагнитного поля, вызывающего ускоренное движение частицы. Масса частицы m , заряд e .

766. Выразить скорость потери импульса $\left(-\frac{d\mathbf{p}}{dt'}\right)$ излучающей заряженной частицей через суммарную по всем направлениям скорость потери энергии.

767. Излучающую частицу наблюдают из двух систем отсчета, движущихся равномерно друг относительно друга. Сравнить суммарные по всем направлениям скорости потери энергии частицей в этих системах отсчета.

768. Скорость \mathbf{v} релятивистской частицы в некоторый момент ретардированного времени t' параллельна ее ускорению $\dot{\mathbf{v}}$. Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\Omega}$, полную мгновенную интенсивность излучения I , а также суммарную по всем направлениям скорость потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$. Какой характер имеет угловое распределение интенсивности излучения в ультрарелятивистском случае?

769. Скорость частицы убывает от v_0 до 0 в течение промежутка времени τ . Найти угловое распределение тормозного излучения, испущенного за все время движения частицы, считая ускорение постоянным. Какая длительность Δt импульса будет зарегистрирована покоящимся прибором?

770. Релятивистская частица с зарядом e , массой m и импульсом \mathbf{p} движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} . Радиус орбиты $a = \frac{cp}{eH}$. Найти суммарную по всем направлениям скорость потери энергии частицей $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$.

771. Ультрарелятивистский электрон движется в однородном магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} по винтовой линии. Его скорость \mathbf{v} составляет угол θ с вектором \mathbf{H} . Найти энергию $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$, теряемую электроном в единицу времени. Найти также поток энергии излучения I через неподвижную сферу большого радиуса, окружающую электрон.

772. Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ релятивистской частицы, скорость которой в ретардированный

момент времени перпендикулярна ее ускорению. Начертить полярную диаграмму для случаев $v \ll c$ и $v \sim c$. Определить направления, в которые не происходит излучения.

773*. Частица с зарядом e и массой m движется со скоростью v по окружности в постоянном однородном магнитном поле H . Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ интенсивности излучения, усредненное по периоду обращения частицы в магнитном поле. Какой характер принимает это угловое распределение в ультрарелятивистском случае $v \sim c$?

УКАЗАНИЕ. Использовать результаты предыдущей задачи. Перейти к сферическим координатам с полюсом в центре круговой траектории и полярной осью вдоль H . При вычислении интеграла по азимутальному углу воспользоваться формулами 3.428 из справочника [90].

774*. Найти компоненты Фурье поля излучения A_n, H_n заряда e , движущегося по круговой орбите радиуса a с релятивистской скоростью v . Исследовать характер поляризации компонент Фурье.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулы (П3.11) и (П3.9).

775. Объяснить наличие высших гармоник в спектре поля заряда, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите (см. предыдущую задачу). Как будут меняться интенсивности этих гармоник, когда $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$? Какой вид будет иметь поле излучения в этом случае?

776*. Заряд e движется по окружности радиуса a со скоростью $v = \beta c$. Найти спектральное разложение интенсивности излучения $\frac{dI_n}{d\Omega}$ в данном направлении.

777*. На круговой орбите одновременно находится N электронов (см. задачу 774*). Рассмотреть влияние интерференции полей, создаваемых этими электронами, на интенсивность излучения n -й гармоники Фурье. Рассмотреть частные случаи: а) совершенно беспорядочного расположения электронов; б) правильного расположения электронов на угловом расстоянии $\frac{2\pi}{N}$ друг от друга; в) расположения электронов в виде сгустка, размеры которого малы по сравнению с радиусом орбиты (результат в этом случае существенно зависит от отношения длины волны к размерам сгустка).

778*. Две частицы с зарядами e_1, e_2 и массами m_1, m_2 ($\frac{e_1}{m_1} \neq \frac{e_2}{m_2}$) совершают эллиптическое движение (см. задачу 712). Найти полную, усредненную по времени, интенсивность излучения \bar{I} .

779. Найти среднюю за период потерю момента импульса $\overline{\frac{dK}{dt}}$ системой двух частиц, совершающих эллиптическое движение (см. предыдущую задачу).

УКАЗАНИЕ. Общая формула для потери момента импульса была получена в задаче 730.

780*. Найти дифференциальное эффективное излучение $\frac{dx_n}{d\Omega}$ при рассеянии потока частиц с зарядами e_1 , массами m_1 и скоростью v_0 на одноименно заряженной частице с зарядом e_2 и массой m_2 .

УКАЗАНИЕ. При вычислении интегралов A и B , входящих в формулу (XII.31), перейти от интегрирования по dt к интегрированию по dr , $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$, где $\dot{r} =$

$= \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{s^2}{r^2}}$, s — прицельное расстояние, $2a$ — минимальное расстояние, на которое могут сближаться частицы (оно достигается при $s = 0$). Интегрировать сначала по ds , затем по dr . При вычислении B необходимо использовать уравнение траектории относительного движения, которое можно найти в ответе к задаче 712.

781*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с другой частицей, масса которой много больше m , а заряд e_2 ; прицельное расстояние s . Кинетическая энергия налетающей частицы велика по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц $\frac{e_1 e_2}{r}$. Вследствие этого скорость v налетающей частицы может считаться постоянной в течение всего столкновения; она не обязательно мала по сравнению со скоростью света. Найти угловое распределение полного излучения $\frac{d\Delta W_n}{d\Omega}$. Рассмотреть, в частности, случай $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться общей формулой для углового распределения полного излучения (XII.26). Ускорение частицы \dot{v} выразить через действующую на нее кулонову силу и скорость v частицы с помощью формул $\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathbf{p}} = e_1 e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

782. Определить полное излучение энергии ΔW и импульса $\Delta \mathbf{p}$ частицей, рассмотренной в предыдущей задаче, за все время ее движения. Сделать это как непосредственно — путем интегрирования углового, распределения, найденного в предыдущей задаче, так и с помощью формул, полученных в задачах 765, 766.

783*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с тяжелой частицей, заряд которой e_2 . Прицельное расстояние s велико, так что мистическая энергия частицы в течение всего времени движения велика сравнению с ее потенциальной энергией. Скорость частицы $v \ll c$. Найти спектр тормозного излучения частицы $\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega}$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (П3.15).

784. Поток частиц с зарядом e и скоростью $v \ll c$ рассеивается на абсолютно твердой сфере радиуса a . Найти эффективное излучение $d\kappa_\omega$ в интервале частот $d\omega$. Чему равно полное эффективное излучение κ ?

785*. Поток частиц с зарядами e_1 и массами m_1 рассеивается на частице с зарядом e_2 и массой m_2 ($\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$). Выразить дифференциальное эффективное излучение $\frac{d\kappa_n}{d\Omega}$ через компоненты $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного момента системы. Результат представить в форме, аналогичной (XII.31), (XII.32).

786*. Найти полное эффективное излучение κ при рассеянии потока заряженных частиц (заряд e , масса m , скорость v_0) одинаковой с ними частицей.

§ 3. Взаимодействие заряженных частиц с излучением

Излучающая система частиц, передавая энергию и импульс полю излучения, испытывает со стороны этого поля обратное воздействие (реакция излучения). Если излучение имеет электрический дипольный характер, то на каждую частицу с зарядом e действует сила лучистого торможения (лучистого трения):

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}, \quad (\text{XII.34})$$

где \mathbf{p} — электрический дипольный момент всей системы.

В частном случае одного заряда, скорость которого $v \ll c$,

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (\text{XII.35})$$

В ультрарелятивистском случае $v \approx c$ сила лучистого трения может быть представлена в виде

$$f_x = -\frac{2e^4}{3(mc^2)^4} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2] \mathcal{E}^2; \quad (\text{XII.36})$$

ось x выбрана вдоль направления скорости частицы, E , H — компоненты внешнего поля, в котором движется излучающая частица $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ — энергия частицы.

Сила лучистого трения, определяемая формулами (XII.34)–(XII.36), не вполне корректным образом учитывает реакцию излучения. Понятием силы лучистого трения можно пользоваться только тогда, когда эта сила мала по сравнению с другими силами, действующими на частицу в ее системе покоя. Это условие выполняется при движении частицы с зарядом e и массой m в заданном электромагнитном поле E , H , если

$$\lambda \gg r_0, \quad (\text{XII.37})$$

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3} = \frac{e}{r_0^2}, \quad (\text{XII.38})$$

где λ — длина волны, излучаемая частицей, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ — классический радиус электрона. Условия (XII.37) и (XII.38) означают, что классическая электродинамика становится внутренне противоречивой на очень малых расстояниях (больших частотах) и в слишком сильных полях¹.

Электромагнитная волна, падающая на систему зарядов, вызывает ускоренное их движение. Вследствие этого, система становится источником вторичных волн — рассеивает падающую волну. Процесс рассеяния характеризуется дифференциальным и полным сечениями рассеяния, определение которых дано в § 2 гл. VIII.

Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы обладает энергией, импульсом и, следовательно, массой (электромагнитная масса частицы). Вопрос об электромагнитной массе элементарных частиц не может быть решен на основе классической электродинамики. Однако классическая теория хорошо поясняет саму идею электромагнитной массы. Задачи 787*–790* иллюстрируют основные положения этой теории, а также возникающие в ней трудности.

787*. Найти импульс электромагнитного поля частицы с зарядом e , движущейся равномерно со скоростью v . Частицу рассматривать в ее системе покоя S' как твердый шарик с радиусом r_0 (в системе, где скорость

¹Следует отметить, что благодаря квантовым эффектам классическая электродинамика становится неприменимой раньше, чем обнаруживается ее внутренняя противоречивость. Это происходит на расстояниях порядка $\lambda_0 = \frac{\hbar}{mc} = 137r_0$ и в полях $H \sim \frac{e}{\lambda_0 r_0} = \frac{m^2 c^4}{137e^3}$.

частицы равна v , имеет место лоренцово сокращение). Ввести электромагнитную массу m_0 покоя частицы, связанную соотношением Эйнштейна с энергией ее поля в состоянии покоя. Какие при этом возникают трудности?

788. Найти энергию W_m магнитного поля, а также полную электромагнитную энергию W частицы, рассмотренной в предыдущей задаче.

789*. Найти силу F , с которой заряженная сферически симметричная частица действует сама на себя (сила самодействия) при ускоренном поступательном движении с малой скоростью $v \ll c$. Запоздывание и лоренцово сокращение не учитывать.

УКАЗАНИЕ. Вычислить равнодействующую сил, приложенных к малым элементам de заряда частицы, воспользовавшись выражением для напряженности поля точечного заряда (XII.25).

790*. Найти уточненное выражение для силы F самодействия заряженной сферически симметричной частицы (см. предыдущую задачу). При решении учитывать эффект конечной скорости распространения взаимодействия с точностью до первого порядка по времени $t' - t$ распространения взаимодействия между элементами частицы. Рассмотреть, в частности, предельный случай точечной частицы. Оценить вклад отбрасываемых членов более высокого порядка по $t' - t$ в этом предельном случае.

791. Какое время T прожил бы резерфордовский атом водорода, если бы электрон в атоме двигался и излучал как классическая частица? Считать, что электрон, теряя энергию, движется к протону по пологой спирали, так что в каждый момент времени он излучает как заряд на круговой орбите (радиус орбиты медленно меняется со временем). При каком условии справедливо это предположение? Начальный радиус атома $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см.

792. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле H , теряя энергию на излучение. Найти закон изменения энергии и радиуса орбиты со временем $\mathcal{E}(t)$ и $r(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ энергия частицы равна \mathcal{E}_0 (ср. с задачей 791).

793. Электрон в бетатроне разгоняется на орбите постоянного радиуса a вихревым электрическим полем. Последнее индуцируется переменным магнитным полем частоты ω . Найти критическое значение энергии электрона $\mathcal{E}_{кр}$, при котором потери на излучение равняются с энергией, приобретаемой электроном за счет работы вихревого электрического поля.

794*. Частица с зарядом e и массой m притягивается к некоторому центру квазиупругой силой $-m\omega_0^2 r$. В некоторый момент времени $t = 0$

в этом гармоническом осцилляторе возникают свободные колебания. Учитывая реакцию излучения, но считая ее малой, найти закон затухания этих колебаний. Определить форму спектра такого осциллятора и ширину спектральной линии («естественная ширина»). Как связаны между собой неопределенность энергии $\hbar\omega$ излучаемых фотонов и время жизни осциллятора?

795. Газ состоит из атомов с массой m . Неподвижный атом этого газа излучает свет с частотой ω_0 (естественной шириной линии испускания пренебрегаем). Из-за теплового движения атомов и эффекта Доплера наблюдатель, неподвижный относительно сосуда с газом, регистрирует частоту, отличающуюся от ω_0 . Найти форму $\frac{dI_\omega}{d\omega}$ спектра излучения газа, нагретого до температуры T .

УКАЗАНИЕ. Скорости атомов газа распределены по закону Максвелла

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где $\frac{dN}{N}$ — доля молекул, скорость v которых заключена в промежутке $dv_x dv_y dv_z$, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана. Так как выполняется условие $v \ll c$, можно в формуле, выражающей доплеровское изменение частоты (см. задачу 574), отбросить все члены, порядок которых выше $\frac{v}{c}$.

796. Излучающий атом, описываемый моделью гармонического осциллятора, движется в газе; при этом атом испытывает столкновения с другими атомами, скачком меняющие характер его колебаний. Вероятность того, что время свободного движения атома имеет продолжительность от τ до $\tau + d\tau$ выражается формулой $dW(\tau) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma\tau}{2}} d\tau$ (среднее значение промежутка времени между столкновениями $\bar{\tau} = \frac{2}{\Gamma}$). Найти, пренебрегая естественной шириной линии, форму спектра излучения такого осциллятора $\frac{dI_\omega}{d\omega}$.

797*. На трехмерный изотропный осциллятор падает группа волн, характеризующаяся спектральным распределением интенсивности S_ω и полной интенсивностью $S = \int_0^\infty S_\omega d\omega$ (S — количество энергии, протекающее через 1 см^2 за все время прохождения группы). Ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной спектральной

линии осциллятора γ . Скорость электрона $v \ll c$. Найти энергию, поглощенную осциллятором из световой волны, учитывая торможение излучением. Как сказывается на результате характер поляризации и направление распространения волн, входящих в группу?

798. Найти полное количество энергии ΔW , поглощенной одномерным осциллятором с собственной частотой ω_0 из группы волн со спектральным распределением S_ω , в следующих трех случаях: а) линейно поляризованная плоская группа волн, у которой направление колебаний вектора \mathbf{E} составляет угол ϑ с осью осциллятора; б) неполяризованная плоская группа волн, распространяющаяся под углом θ к оси осциллятора; в) изотропное поле излучения (на осциллятор с равной вероятностью падают плоские волны с любым направлением поляризации и любым направлением распространения).

799*. Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния волны с учетом силы лучистого трения. Рассмотреть, в частности, случаи сильно связанного и слабо связанного электрона.

800. Плоская электромагнитная волна, поляризованная по кругу, рассеивается свободным зарядом. Определить рассеянное поле \mathbf{H} , исследовать характер его поляризации. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния.

801. Неполяризованная плоская волна рассеивается свободным зарядом. Найти степень ρ деполяризации рассеянной волны в зависимости от угла ϑ рассеяния.

802*. Линейно поляризованная волна рассеивается свободным зарядом. Заряд движется с релятивистской скоростью v в направлении распространения волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния. Рассмотреть также случай рассеяния неполяризованной волны.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (XII.26) и выразить \dot{v} через \mathbf{E} , \mathbf{H} .

803*. Изотропный гармонический осциллятор с частотой ω_0 , зарядом e и массой m помещен в слабое однородное постоянное магнитное поле \mathbf{H} . Определить движение осциллятора. Исследовать характер поляризации излучения осциллятора¹.

¹Такой гармонический осциллятор представляет собой модель атома во внешнем магнитном поле. В задаче, таким образом, предлагается развить классическую теорию эффекта Зеемана.

§ 4. Разложение электромагнитного поля на плоские волны

Электромагнитное поле есть функция независимых переменных \mathbf{r} , t . При рассмотрении многих вопросов удобно пользоваться разложениями Фурье для поля. Встречаются разложения следующих типов:

1. Разложение на монохроматические волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{XII.39})$$

$$f_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{XII.39}')$$

2. Разложение на плоские волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int f_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{k}), \quad (\text{XII.40})$$

$$f_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{r}). \quad (\text{XII.40}')$$

Здесь f — какая-либо из компонент поля, $(d\mathbf{k}) = dk_x dk_y dk_z$.

3. Разложение на плоские монохроматические волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int f_{\mathbf{k}\omega} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{k}) d\omega, \quad (\text{XII.41})$$

$$f_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{r}) dt. \quad (\text{XII.41}')$$

Из уравнений Максвелла следует, что частота ω является функцией волнового вектора \mathbf{k} . Уравнение, выражающее зависимость $\omega = \omega(\mathbf{k})$, называется дисперсионным уравнением. Вещественность компонент поля $f(\mathbf{r}, t)$ приводит к соотношениям:

$$f_{\omega} = f_{-\omega}^*, \quad f_{\mathbf{k}} = f_{-\mathbf{k}}^*, \quad f_{\mathbf{k}\omega} = f_{-\mathbf{k}, -\omega}^*. \quad (\text{XII.42})$$

Формулами (XII.40), (XII.41) описывается поле во всем бесконечном пространстве. Соответственно этому, интегралы в этих формулах распространяются на все пространство волновых векторов и на все координатное

пространство. Другая употребительная форма разложения на плоские волны, при которой рассматривается поле в ограниченном объеме V , излагается во многих руководствах, например, в [65], стр. 167 или в [29], гл. 1.

При использовании разложений Фурье весьма полезны бывают соотношения (П 1.15) и (П 1.14) из теории δ -функции. В частности, с помощью соотношения (П 1.15) и формул (XII.42) могут быть доказаны формулы:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= 4\pi \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathbf{r}, t) (d\mathbf{r}) &= (2\pi)^3 \iiint |f_{\mathbf{k}}|^2 (d\mathbf{k}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.43})$$

Разложение на плоские монохроматические волны играет большую роль в квантовой электродинамике. Каждой такой волне в квантовой теории сопоставляются фотоны — частицы, движущиеся со скоростью света c . Энергия \mathcal{E} и импульс \mathbf{p} фотонов связаны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} соотношениями:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (\text{XII.44})$$

804. Доказать формулы (XII.43).

805. Найти связь между компонентами Фурье полей \mathbf{E} , \mathbf{H} и потенциалов \mathbf{A} , φ (рассмотреть все три варианта разложений Фурье).

806. Записать уравнения Максвелла относительно компонент Фурье для трех вариантов разложения Фурье. Пространство заполнено однородной изотропной диспергирующей средой с параметрами $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\varepsilon)$, вообще говоря, зависящими от частоты.

807. Записать уравнения Даламбера и условие Лоренца относительно компонент Фурье для потенциалов $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Рассмотреть все три варианта разложений Фурье. Пространство заполнено однородной изотропной средой с параметрами $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

808*. Разложить по плоским волнам потенциал φ кулонова поля неподвижного точечного заряда.

809. Разложить по плоским волнам напряженность электрического поля \mathbf{E} неподвижного точечного заряда e .

810. Точечный заряд движется в вакууме со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$. Разложить поле φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} заряда на плоские монохроматические волны.

811*. Найти потенциалы $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ поля равномерно движущегося точечного заряда e (см. ответ к задаче 610), используя разложения этих потенциалов по плоским волнам, полученные в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Для вычисления интеграла по $(d\mathbf{k})$ сделать замену переменных $k_x \rightarrow \frac{k_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $k_y \rightarrow k_y$, $k_z \rightarrow k_z$ (ось $x \parallel v$) и воспользоваться разложением поля неподвижного точечного заряда на плоские волны (см. задачу 808*).

812*. Нейтральная точечная система зарядов движется в вакууме равномерно со скоростью v . Найти электромагнитное поле $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, воспользовавшись разложением Фурье по плоским монохроматическим волнам, если электрический \mathbf{p} и магнитный \mathbf{m} дипольные моменты в лабораторной системе отсчета заданы.

УКАЗАНИЕ. Плотности электрического заряда и тока системы выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= c \operatorname{rot}[\mathbf{m}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)], \\ \rho &= -\operatorname{div}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)]. \end{aligned}$$

813. Получить потенциалы поля равномерно движущегося магнитного диполя (момент \mathbf{m}_0 в системе покоя диполя). Скорость диполя v . Ограничиться двумя частными случаями: а) когда $\mathbf{m}_0 \parallel v$, б) когда $\mathbf{m}_0 \perp v$. Воспользоваться формулами преобразования моментов, полученными в задаче 613.

814. Получить поле равномерно движущегося электрического диполя (момент \mathbf{p}_0 в системе покоя) с помощью результатов задачи 812* (см. ответ к задаче 612).

815. Показать, что компоненты Фурье разложения безвихревого вектора на плоские волны параллельны \mathbf{k} (продольны), а компоненты Фурье соленоидального вектора — перпендикулярны \mathbf{k} (поперечны).

816*. Записать уравнения, которым удовлетворяют в вакууме безвихревая и соленоидальная части векторов электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Показать, что безвихревая часть электрического поля $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ описывает мгновенное (незапаздывающее) кулоново поле, определяемое распределением зарядов в тот же момент времени, для которого определяется \mathbf{E}_{\parallel} .

817*. Разложить свободное ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) электромагнитное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в вакууме на плоские волны (в этом случае $\varphi = 0$). Поле занимает неограниченное пространство. Представить амплитуды Фурье этих

волн в виде $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{c}{\pi\sqrt{2}}q_{\mathbf{k}\lambda}(t)\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$, где $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ — орт, характеризующий направление поляризации данной поперечной волны, так что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ (см. начало § 1 гл. VIII). При этом каждому \mathbf{k} , очевидно, соответствуют два независимых орта поляризации ($\lambda = 1, 2$). Орты $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}$, взаимно ортогональны: $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}^* = \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2} = 0$. Найти уравнения, которым в общем случае удовлетворяют комплексные «координаты» $q_{\mathbf{k}\lambda}(t)$. Выразить напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} , энергию W и импульс \mathbf{G} поля через $q_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}$.

818*. Используя результаты предыдущей задачи, ввести вещественные осцилляторные координаты

$$Q_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\omega t} + a_{\mathbf{k}\lambda}^*e^{i\omega t}$$

и выразить векторы поля \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} через эти координаты. Найти также энергию W и импульс \mathbf{G} поля в координатах $Q_{\mathbf{k}\lambda}$.

819*. Электромагнитное поле излучения описывается осцилляторными координатами $q_{\mathbf{k}\lambda}$ (см. задачу 817*). Написать дифференциальные уравнения, которыми описывается взаимодействие поля излучения в переменных $q_{\mathbf{k}\lambda}$ с заряженной нерелятивистской частицей.

820*. Найти изменение в единицу времени энергии $\frac{dW}{dt}$ поля излучения в результате взаимодействия частицы с полем. Выразить эту величину через осцилляторные координаты $q_{\mathbf{k}\lambda}$ и силы $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ (см. решение предыдущей задачи).

821*. Частица с зарядом e совершает простое гармоническое колебание по заданному закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \sin \omega_0 t$, где $\mathbf{r}_0 = \text{const}$. Используя метод осцилляторов поля (см. задачу 819*), найти угловое распределение и полную интенсивность I излучения¹.

822. Заряд e движется с постоянной угловой скоростью ω_0 по окружности радиуса a_0 . Используя метод осцилляторов поля, исследовать характер поляризации поля излучения заряда, найти угловое распределение и полную интенсивность излучения (ср. с задачей 732).

823*. Линейно поляризованная волна с частотой ω падает на гармонический осциллятор, собственная частота которого ω_0 . Используя метод осцилляторов поля, найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния (лучистое трение не учитывать). Исследовать поляризацию рассеянного излучения.

¹Задача, конечно, может быть решена значительно проще (см. § 1 этой главы). Предлагаемый метод решения интересен своей тесной связью с методом решения аналогичной задачи в квантовой электродинамике.

824. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния линейно поляризованной, поляризованной по кругу и неполяризованной монохроматических волн на свободном заряде, используя метод осцилляторов поля (ср. с задачами 799* и 800).

825. На свободном заряде рассеивается: а) неполяризованная волна с частотой ω ; б) волна, поляризованная по кругу. Исследовать характер поляризации поля излучения, используя метод осцилляторов поля (см. задачи 799* и 800).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65], Стрэттон Дж. А. [100], Джексон Дж. [52], Гуревич Л. Э. [49], Френкель Я. И. [111], Пановский В., Филипс М. [86], Смайт В. [93], Иваненко Д. Д., Соколов А. А. [57], Власов А. А. [25], Беккер Р. [12], Гринберг Г. А. [46], Вайнштейн Л. А. [23], Компанец А. С. [60], Зоммерфельд А. [54], Тихонов А. Н., Самарский А. А. [104], Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. [20], Горелик Г. С. [43], Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. [6], Гайтлер В. [29], Паули В. [87]. Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И. [35], Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. [36].

ГЛАВА XIII

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ВЕЩЕСТВОМ

В этой главе методами классической макроскопической электродинамики рассматриваются различные процессы потерь энергии быстрых частиц в веществе.

Макроскопическая теория, не учитывающая пространственной дисперсии электрической и магнитной проницаемостей, применима, если вещество можно рассматривать как сплошную среду, т. е. если пролетающая частица взаимодействует одновременно со многими атомами. Это означает, что с помощью макроскопических уравнений можно правильно определить энергию, передаваемую частицей только тем электронам вещества, которые находятся на достаточно больших расстояниях r от ее траектории, $r \gg a$, где a — величина порядка межатомного расстояния; в конденсированных средах a совпадает с линейным размером атома ($\approx 10^{-8}$ см).

Скорость частицы v должна удовлетворять условию $v \gg v_{am}$, где v_{am} — средняя скорость атомных электронов. При меньших скоростях частица в основном передает энергию электронам, находящимся вблизи ее траектории, где макроскопическое рассмотрение неприменимо.

Потери энергии, вызванные ионизацией и возбуждением атомов среды, называются ионизационными потерями. Если частица движется через плазму, то значительная часть теряемой ею энергии идет на возбуждение колебаний электронного газа как целого (продольные плазменные волны, см. задачу 443).

Вещество существенно влияет и на излучение поперечных электромагнитных волн частицами. Если заряженная частица движется в непоглощающем диэлектрике с постоянной скоростью, превышающей фазовую скорость света, то она излучает поперечные электромагнитные волны (излучение Вавилова–Черенкова; теория этого явления была дана И. Е. Таммом и И. М. Франком [103]).

Электромагнитное поле, создаваемое в среде движущейся частицей, определяется из уравнений Максвелла; плотности заряда и тока в этих

уравнениях удобно записывать в виде $\rho = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$, $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{r}}_0\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$, где e — заряд частицы, $\mathbf{r}_0(t)$ — ее радиус-вектор. Интегрирование уравнений Максвелла в общем случае диспергирующей среды производится путем разложения искомых величин (векторов поля) в интеграл Фурье по координатам и времени. При этом для определения компонент Фурье получается система алгебраических уравнений (см., например, задачу 826*).

Чтобы найти энергию излучения Вавилова — Черенкова на единице пути частицы, нужно определить электромагнитное поле, создаваемое частицей в среде, и подсчитать поток энергии через цилиндрическую поверхность единичной длины и бесконечного радиуса, окружающую траекторию частицы. Интеграл по времени от указанного потока энергии и даст полную энергию, излучаемую частицей на единице пути в виде электромагнитных волн.

Если радиус цилиндрической поверхности будет конечным (a), то интеграл по времени от потока энергии будет включать не только энергию излучения Вавилова — Черенкова, но и ту энергию, которая передается электронам среды, находящимся на расстояниях $r > a$ от траектории частицы.

826*. Частица с зарядом e движется со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$ в однородной и изотропной среде. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon(\omega)$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Определить составляющие электромагнитного поля, создаваемого движущейся частицей.

827*. Частица движется в непоглощающем диэлектрике с постоянной скоростью $v = \beta c$. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать создаваемое частицей поле на больших расстояниях от ее траектории. Показать, что достаточно быстрая частица будет излучать поперечные электромагнитные волны (эффект Вавилова — Черенкова). Найти условия возникновения этого излучения и полную величину черенковских потерь $\omega_{\text{В-Ч}}$ на единице пути.

828. Частица с зарядом e движется с постоянной скоростью через вещество, диэлектрическую проницаемость которого можно приближенно описать формулой

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Определить энергию излучения Вавилова — Черенкова на единице пути $\omega_{\text{В-Ч}}$, если скорость частицы удовлетворяет условию $v^2\epsilon_0 > c^2$, где ϵ_0 — статическое значение диэлектрической проницаемости. В каком интервале углов сконцентрировано излучение? Сделать численную оценку, положив

$$\omega_0 = 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}, \quad \epsilon_0 = 2, \quad v = c.$$

829. Получить условие $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$, определяющее направление излучения Вавилова–Черенкова, из рассмотрения интерференции отдельных волн, испускаемых частицей в разных точках ее траектории.

830. Черенковское излучение частицы можно рассматривать как следствие резонанса между собственными колебаниями среды и вынуждающей силой, связанной с движущейся частицей. Получить условие, возникновения эффекта Вавилова–Черенкова из сравнения частот собственных колебаний среды и вынуждающей силы.

831. Релятивистская частица, имеющая скорость v , проходит через диэлектрическую пластинку толщиной l перпендикулярно ее плоскости. Показатель преломления пластинки n , дисперсию не учитывать. Найти длительность τ вспышки черенковского излучения, которую регистрирует неподвижный относительно пластинки наблюдатель. Определить поток энергии I черенковского излучения через поверхность пластинки во время вспышки. Краевым эффектом пренебречь.

832. Показать, что минимальная скорость движения частицы v_{\min} , при которой возникает излучение Вавилова–Черенкова в данном направлении, удовлетворяет условию

$$v_{\min} \cos \theta = v_g(\omega_m),$$

где v_g — групповая скорость электромагнитных волн в диэлектрике, ω_m — частота, при которой показатель преломления имеет максимум, θ — угол между направлениями излучения и скорости частицы. Диэлектрик считается непоглощающим.

833*. Частица движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в недиспергирующей среде с проницаемостями ϵ , μ . Определить электромагнитные потенциалы φ и A . Рассмотреть два случая $v < v_\varphi$ и $v > v_\varphi$, где v_φ — фазовая скорость электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

834. Прямолинейный провод, параллельный оси x , перемещается вдоль оси y со скоростью $v = \text{const}$ в непоглощающей среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$. В лабораторной системе отсчета провод электронейтрален, по нему течет ток \mathcal{I} в направлении оси x .¹ Найти условие, при котором возникает излучение Вавилова–Черенкова. Определить полную энергию излучения $\omega_{B-ч}$ с единицы длины провода на единице пути. Подсчитать тормозящую силу f , действующую на единицу длины провода со стороны созданного им поля.

¹Быстро перемещающиеся токонесущие пучки частиц могут существовать в ускорителях и при некоторых видах разряда.

УКАЗАНИЕ. Векторный потенциал имеет одну компоненту $A_x(y, z, t)$. При выполнении обратного преобразования Фурье использовать правило обхода полюсов, сформулированное в задаче 833*.

835. Два точечных заряда e_1 и e_2 движутся с одинаковыми постоянными скоростями v вдоль одной прямой на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu = 1$ (l измерено в лабораторной системе отсчета). Найти энергию излучения Вавилова–Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути. Рассмотреть два случая: а) $e_1 = e_2 = e$; б) $e_1 = -e_2 = e$. Путем предельного перехода получить черепковские потери энергии точечного электрического диполя, ориентированного вдоль направления движения.

836*. Два точечных заряда $+e$ и $-e$ движутся с одинаковыми постоянными скоростями v на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu = 1$. Линия, соединяющая заряды, составляет угол α с направлением скорости (l и α измерены в лабораторной системе). Методом, использованным в предыдущей задаче, найти энергию излучения Вавилова–Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути, считая l весьма малым.

837*. Магнитный диполь¹ движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в непоглощающей среде, проницаемости которой $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Магнитный момент, измеренный в лабораторной системе, имеет величину m и ориентирован вдоль скорости. Определить потери энергии на излучение Вавилова–Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути.

УКАЗАНИЕ. С помощью преобразования Фурье проинтегрировать уравнения для потенциалов. Движущийся магнитный момент создает ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c \operatorname{rot} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$.

838*. Быстрая частица с зарядом e движется через непоглощающий диэлектрик с проницаемостью

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$. Определить потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)$ в расчете на единицу пути на расстояниях от траектории частицы, превышающих межатомные расстояния a (параметр a должен быть выбран так, чтобы в области $r > a$ было справедливо макроскопическое рассмотрение). Выяснить физический смысл отдельных членов в выражении потерь энергии.

¹Нейтральная система (сгусток) частиц, имеющая магнитный момент, излучает как магнитный диполь, если длина волны в среде много больше размеров сгустка.

839*. Заряженная частица движется со скоростью $v = \beta c$ через плазму, диэлектрическая проницаемость которой (см. задачу 312*)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$. Найти потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)$ на единице пути за счет «далеких» столкновений. Под далекими нужно понимать столкновения с параметром удара $r > a$, где a — расстояние, на котором становится справедливым макроскопическое рассмотрение.

840*. Точечный заряд e движется в вакууме нормально к границе идеального проводника. Определить спектральное и угловое распределение излучения, возникающего при переходе заряда из вакуума в проводник, пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения. Скорость заряда $v = \beta c$.

УКАЗАНИЕ. Поле в вакууме создается зарядом и его изображением, движущимися навстречу друг другу с равными постоянными скоростями. Когда частица пересекает границу проводника, ее заряд мгновенно экранируется свободными электронами проводника, что эквивалентно внезапной остановке заряда и его изображения в одной и той же точке на границе проводника.

841*. Точечный заряд e имеет скорость $v = \beta c$ и движется в вакууме нормально к границе непоглощающего диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ ($\mu = 1$). При переходе заряда из вакуума в диэлектрик возникает излучение. Пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения, определить спектральное и угловое распределение излучения в вакуум (т. е. в область $z > 0$, см. рис. 133).

УКАЗАНИЕ. Плотности заряда и тока, создаваемые движущейся частицей, заменить эквивалентным набором гармонических осцилляторов. Для определения поля в волновой зоне использовать теорему взаимности (см. [66], § 69): $\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{E}_A(B) = \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{E}_B(A)$. Здесь $\mathbf{E}_B(A)$ — поле, создаваемое в точке A дипольным гармоническим осциллятором \mathbf{p}_B , находящимся в точке B ; $\mathbf{E}_A(B)$ — поле, создаваемое в точке B осциллятором \mathbf{p}_A , находящимся в точке A . Так как точка наблюдения A находится на большом расстоянии от точки встречи заряда с диэлектриком (в волновой зоне), то при вычислении $\mathbf{E}_A(B)$ можно воспользоваться формулами Френеля.

ЛИТЕРАТУРА

Тамм И. Е., Франк И. М. [103], Ферми Э. [105], Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Болотовский Б. М. [14], Гинзбург В. Л. [32], Гинзбург В. Л., Франк И. М. [37], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Джелли Дж. [53], Маркс Г., Дьёрдьи Г. [77], Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. [36].

ГЛАВА XIV

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

§ 1. Движение отдельных частиц в плазме

На движение заряженных частиц в плазме большое влияние оказывают электрические и магнитные поля. Они создаются электронами и ионами плазмы, а также внешними источниками. Если столкновения частиц в плазме происходят редко, то в течение промежутков времени, много меньших времени между столкновениями, каждая отдельная частица движется под действием существующих в плазме макроскопических полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , и ее движение описывается уравнениями механики (XI.20) и (XI.1). В случае неоднородных и переменных полей интегрирование точных уравнений движения является, как правило, сложной математической задачей.

Картина движения частиц существенно упрощается, если магнитное поле велико и медленно меняется в пространстве и во времени, а электрическое поле мало (см. неравенства (XIV.6)–(XIV.6'')). При этом действие электрического поля, а также пространственных и временных неоднородностей магнитного поля можно учесть по методу возмущений. Движение частицы происходит следующим образом: в каждый момент времени частица быстро вращается вокруг направления магнитных силовых линий с циклотронной частотой ceH/\mathcal{E} , где e — заряд частицы, \mathcal{E} — ее энергия. Центр, вокруг которого вращается частица (ведущий центр), движется вдоль магнитной силовой линии, а также медленно перемещается в поперечном направлении под действием электрического поля и неоднородностей магнитного поля. Наряду с этим происходит медленное изменение по абсолютной величине поперечного и продольного импульсов частицы.

Приближение, соответствующее такой картине движения частицы, называется приближением ведущего центра или дрейфовым приближением, а движение ведущего центра поперек магнитных силовых линий называется дрейфом. Уравнения движения в дрейфовом приближении выводятся путем усреднения точных уравнений движения по быстрому вращению частицы вокруг магнитной силовой линии с учетом неравенств (XIV.6)–(XIV.6'').

Система дрейфовых уравнений движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{2} v_{\perp} R_{\perp} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla H}{H} \right] + v_{\parallel} R_{\parallel} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}], \quad (\text{XIV.1})$$

$$\dot{p}_{\parallel} = +\frac{1}{2} p_{\perp} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h} + e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{h}), \quad (\text{XIV.2})$$

$$\dot{p}_{\perp} = -\frac{1}{2} p_{\parallel} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}. \quad (\text{XIV.3})$$

Здесь p_{\parallel} проекция импульса частицы на направление магнитного поля \mathbf{H} , p_{\perp} — абсолютная величина поперечной относительно \mathbf{H} составляющей импульса, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ — единичный вектор в направлении магнитного поля,

$$R_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{eH}, \quad R_{\parallel} = \frac{cp_{\parallel}}{eH},$$

$$v_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{m}, \quad v_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{m}, \quad m = m_0 / \sqrt{1 - (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/c^2};$$

m_0 и e — масса и заряд частицы. Все напряженности поля в правых частях уравнений (XIV.1)–(XIV.3) берутся в точке, в которой находится ведущий центр, $\dot{\mathbf{r}}$ — скорость ведущего центра.

Первый член $v_{\parallel} \mathbf{h}$ в правой части уравнения (XIV.1) описывает движение ведущего центра вдоль магнитной силовой линии, второй член — поперечное движение под действием электрического поля (электрический дрейф). Третье и четвертое слагаемые дают соответственно поперечные дрейфы за счет изменения магнитного поля по величине и по направлению. Если на частицу, кроме электрического и магнитного полей, действует неэлектромагнитная сила \mathbf{F} , то в правую часть уравнения (XIV.1) следует добавить слагаемое $\frac{c}{eH^2} [\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$, а в правую часть (XIV.2) — член $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{h})$.

Уравнения (XIV.2) и (XIV.3) позволяют найти изменение полной энергии частицы во времени:

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{h})v_{\parallel}. \quad (\text{XIV.4})$$

Из них следует также, что

$$p_{\perp}^2/H = \text{const}, \quad (\text{XIV.5})$$

т. е. величина $I = p_{\perp}^2 / H$ является интегралом движения. Но это не точный, а приближенный интеграл движения, обусловленный малостью электрического поля и медленностью изменения магнитного поля. Такие приближенные интегралы движения называются адиабатическими инвариантами.

Уравнения (XIV.1)–(XIV.3) являются приближенными уравнениями движения частицы, справедливыми при медленном изменении E и H в пространстве:

$$\left| R_{\parallel} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \ll H, \quad \left| R_{\perp} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \ll H, \quad \left| R_{\parallel} \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll E, \quad \left| R_{\perp} \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll E, \quad (\text{XIV.6})$$

где координата x может отсчитываться вдоль любого направления. Кроме того, должно выполняться условие малости электрического поля

$$cE/H \ll v \quad (\text{XIV.6}')$$

и условие медленности изменения электрического и магнитного полей во времени

$$\omega \ll ceH/\mathcal{E}, \quad (\text{XIV.6}'')$$

где ω — характерная частота изменения поля.

842. На нерелятивистскую частицу с зарядом e и массой m действуют однородное магнитное поле \mathbf{H} и постоянная сила \mathbf{F} , ориентированная произвольным образом. Показать, что составляющая силы \mathbf{F} , перпендикулярная \mathbf{H} , вызывает равномерное движение (дрейф) частицы с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{eH^2} [\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$$

поперек магнитных силовых линий.

Пояснить качественно происхождение дрейфа, рассмотрев траекторию движения частицы и силы, действующие на нее в разных точках траектории.

843. Прямым расчетом доказать адиабатическую инвариантность величины p_{\perp}^2 / H для случая однородного и постоянного по направлению, но медленно меняющегося по абсолютной величине магнитного поля $H(t)$. Для этого вычислить электрическое поле и проинтегрировать уравнение, описывающее изменение поперечного импульса частицы p_{\perp} во времени, считая, что в течение одного циклотронного периода траекторию частицы можно считать окружностью, совпадающей с силовой линией электрического поля.

844. Система одинаковых невзаимодействующих частиц находится в однородном магнитном поле H и имеет изотропное распределение по импульсам. Все частицы имеют одинаковую энергию \mathcal{E}_0 . Затем магнитное поле адиабатически возрастает до величины nH . Найти угловое распределение $d\omega(\vartheta)$ и среднее значение квадрата энергии частиц $\overline{\mathcal{E}^2}$ в конечном состоянии.

845*. Пусть магнитное поле, оставаясь постоянным по направлению, слабо меняется в пространстве по абсолютной величине. Показать, что эта неоднородность поля в первом приближении приводит к дрейфу частицы поперек поля со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{v_{\perp} R_{\perp}}{2H^2} [\mathbf{H} \times \nabla H],$$

где v_{\perp} — составляющая скорости частицы, перпендикулярная направлению поля, $R_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{eH}$ — ларморов радиус частицы (ср. с общей формулой (XIV.1)).

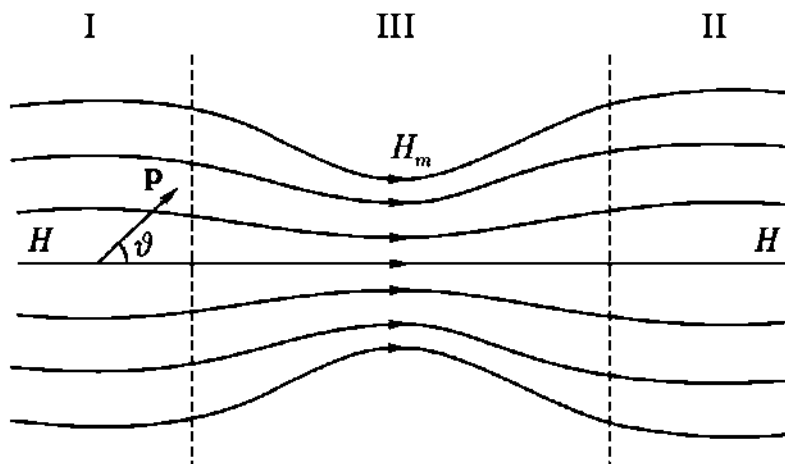


Рис. 43

846. Исходя из инвариантности величины $I = p_{\perp}^2/H$ показать, что в дрейфовом приближении сохраняются магнитный поток через орбиту циклотронного вращения частицы и магнитный момент нерелятивистской частицы, создаваемый ее циклотронным вращением. При каких дополнительных условиях сохраняется магнитный момент релятивистской частицы?

847. Частица движется в слабо неоднородном постоянном магнитном поле. Пользуясь инвариантностью величины $I = p_{\perp}^2/H$ и законом сохранения энергии, показать, что в дрейфовом приближении на частицу действует

сила F , направленная вдоль магнитной силовой линии, и найти величину этой силы. Выразить ее через магнитный момент циклотронного вращения частицы.

848. Между областями I и II, в которых статическое магнитное поле однородно и равно H , находится область III, в которой поле усилено («магнитная пробка»). Максимальное значение поля равно H_m , схематический вид силовых линий показан на рис. 43. В области I движется частица, импульс p которой в некоторый момент времени составляет угол ϑ с направлением силовой линии. Считая изменение поля медленным, найти соотношение между ϑ , H и H_m , при котором частица отразится от области с сильным полем.

849. Структура магнитного поля в адиабатической ловушке с аксиально-симметричным полем имеет вид, схематически изображенный на рис. 44. В среднюю часть ловушки, где напряженность поля равна H , впрыснута порция частиц с изотропно распределенными скоростями. Какая доля частиц R удержится в ловушке в течение длительного времени?

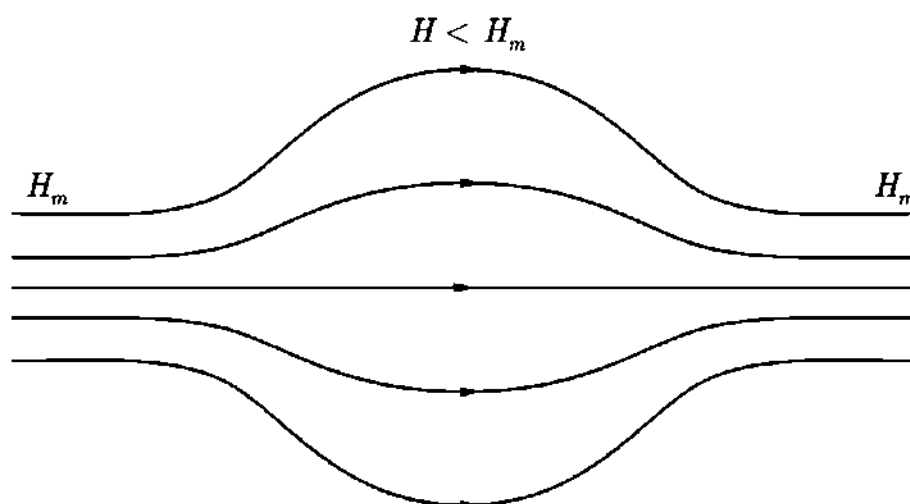


Рис. 44

850. В ловушку с аксиально-симметричным полем, изображенную на рис. 44, захвачена порция частиц. Частицы проводят большую часть времени в средней части ловушки, где поле почти однородно. Пусть поле ловушки медленно нарастает во времени таким образом, что форма магнитных силовых линий не меняется. Найти, как изменяется расстояние ведущего центра каждой из частиц до оси ловушки.

851. В однородном магнитном поле с напряженностью H находится неподвижный точечный заряд q . Частица с зарядом e и массой m , имеющая

на бесконечности продольную составляющую скорости $v_{||}$, рассеивается на заряде q . Считая применимым дрейфовое приближение и пренебрегая изменением продольной скорости при рассеянии, найти, по какой силовой линии будет двигаться ведущий центр частицы после рассеяния. До рассеяния он двигался по силовой линии, уравнение которой в цилиндрических координатах с осью z , проходящей через заряд q и ориентированной вдоль поля, имеет вид $r = l, \varphi = 0$.

852. Магнитное поле Земли можно представить приближенно как поле точечного диполя с магнитным моментом $\mu = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс \cdot см³. Протон с энергией $\mathcal{E} = 50$ Мэв в некоторый момент времени находится в плоскости магнитного экватора на расстоянии двух земных радиусов от центра Земли и движется поперек магнитных силовых линий. Найти в дрейфовом приближении закон движения ведущего центра протона. За какое время T он совершит полный оборот вокруг земного шара? Каков ларморов радиус R протона? Радиус земного шара $r_* = 6380$ км, его масса $M = 6 \cdot 10^{27}$ г.

853*. Протон находится в плоскости геомагнитного экватора (см. условие предыдущей задачи) на расстоянии r от центра Земли, его импульс составляет угол α с направлением магнитной силовой линии. а) Пренебрегая гравитационным полем, показать, что ведущий центр протона, наряду с движением вдоль магнитных силовых линий, будет испытывать азимутальный дрейф, и найти угловую скорость дрейфа ω_d , выразив ее через r и геомагнитную широту λ . б) Указать значения λ_m , соответствующие точкам отражения частиц в земном магнитном поле. в) Найти условия, при которых протон может достичь поверхности Земли.

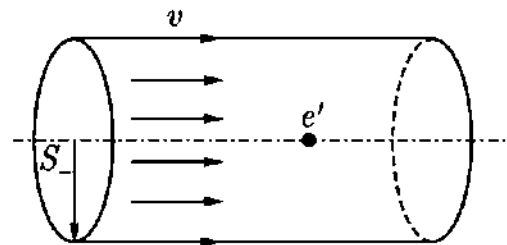


Рис. 45

854. На неподвижную частицу с зарядом e' налетает ограниченный стационарный поток одинаковых нерелятивистских частиц с зарядами e , массами m и скоростями v (рис. 45). Концентрация частиц в потоке n . Вычислить силу, действующую на неподвижную частицу, пренебрегая взаимодействием налетающих частиц друг с другом. Объяснить причину того, что при радиусе пучка $s_m \rightarrow \infty$ эта сила обращается в бесконечность. Сохраняется ли для силы бесконечное значение, если заряд e' является одним из зарядов нейтральной плазмы?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 713*.

855. «Пробная» частица с зарядом e и массой m движется со скоростью v в газе, состоящем из одинаковых заряженных частиц. Их массы m' ,

заряды e' , концентрация n' , распределение по скоростям описывается функцией $f(\mathbf{v})$ ($\int f(\mathbf{v})(d\mathbf{v}) = n'$). Записать выражение для средней силы $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{v})$, действующей на «пробную» частицу.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат, полученный при решении предыдущей задачи. Зависимостью кулонова логарифма от скорости пренебречь.

856. Пробная частица с зарядом e и массой m движется в среде, состоящей из беспорядочно распределенных неподвижных бесконечно тяжелых одинаковых частиц с зарядом e' и концентрацией n . Как меняется во времени энергия и импульс пробной частицы под действием средней силы со стороны среды?

857. Частицы среды имеют одинаковые по абсолютной величине скорости v_0 , распределенные сферически симметрично, заряды e и массы m . Вычислить среднюю силу $\bar{\mathbf{F}}$, действующую на пробную частицу с зарядом e' и массой m' , которая движется со скоростью \mathbf{v} .

858. Решить предыдущую задачу для случая, когда частицы среды движутся с одинаковой по величине и направлению скоростью v_0 .

859*. Электроны в плазме совершают беспорядочное тепловое движение и, кроме того, имеют упорядоченную составляющую скорости, которая возникает под действием однородного электрического поля \mathbf{E} , созданного внешним источником. Произвести порядковую оценку зависимости средней силы трения \bar{F} от упорядоченной скорости u , считая, что трение вызвано столкновениями с неподвижными ионами. Показать, что \bar{F} как функция u имеет максимум, и оценить величину \bar{F}_{\max} . Как будет вести себя электронный газ под действием электрического поля E при $E < \bar{f}_{\max}/e$ и $E > \bar{f}_{\max}/e$.

§ 2. Коллективные движения в плазме

Плазма, т. е. ионизованный газ или проводящая жидкость, состоит из свободных зарядов. При наложении на такую систему электрического и магнитного полей могут возникать макроскопические движения вещества. В свою очередь макроскопические движения приводят к возникновению электромагнитного поля. Поэтому плазма, как правило, представляет собой систему сильно взаимодействующих между собой вещества и электромагнитного поля. Анализ поведения такой системы очень сложен, цельная и законченная теория поведения реальной плазмы в настоящее время отсутствует.

Если свободный пробег частиц плазмы много меньше характерных размеров области, в которой плазма движется, то ее движение можно описывать с помощью уравнений гидродинамики, в которых учтены электромагнитные силы. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла в пренебрежении током смещения по сравнению с током проводимости, что справедливо при достаточно медленном изменении поля во времени. Такое приближение называется магнитогидродинамическим. Оно применимо для достаточно плотной среды, в которой малость свободного пробега обеспечивается частыми столкновениями частиц друг с другом. Но гидродинамическое приближение можно применять и для описания движения бесстолкновительной (разреженной) плазмы поперек сильного магнитного поля. Роль длины свободного пробега в этом случае играет радиус циклотронного вращения частиц вокруг магнитных силовых линий.

Уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой проводящей жидкости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{XIV.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\rho} \Delta \mathbf{H}, \quad (\text{XIV.8})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{XIV.9})$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (\text{XIV.10})$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическая (усредненная) скорость движения вещества; $\rho = \text{const}$ — его плотность; p — давление; σ — проводимость; η — коэффициент вязкости.

Плотность тока и электрическое поле в движущейся жидкости могут быть найдены из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и закона Ома, который в движущейся среде принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (\text{XIV.11})$$

При очень высокой проводимости ($\sigma \rightarrow \infty$) последний член в уравнении (XIV.8) играет малую роль, и оно принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (\text{XIV.12})$$

Силовые линии магнитного поля в этом случае «вморожены» в вещество: при движении вещества они движутся вместе с находящимися на них частицами вещества. Поэтому магнитный поток через любой контур, перемещающийся вместе с жидкостью, остается постоянным.

Если проводимость низкая или скорость v мала, то в уравнении (XIV.8) можно пренебречь членом $\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$, и оно примет вид (VII.12).

При больших частотах изменения поля становятся существенными процессы разделения зарядов в плазме и токи смещения. Диэлектрическая проницаемость плазмы в пренебрежении потерями электромагнитной энергии имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad (\text{XIV.13})$$

где величина

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \quad (\text{XIV.14})$$

(n — концентрация электронов, e и m — их заряд и масса) называется ленгмюровской частотой, или частотой плазменных колебаний. Она характеризует частоту колебаний электронов относительно ионов. Такие колебания возникают при любом разделении зарядов в плазме (см. задачу 871). Корректное описание плазмы в случае быстропеременных полей производится с помощью уравнений Максвелла и кинетического уравнения Больцмана, рассмотрение которого, однако, выходит за рамки этой книги.

860*. Вязкая несжимаемая проводящая жидкость движется между двумя неподвижными параллельными плоскостями в направлении оси z под действием постоянного градиента давления $\frac{dp}{dz} = \text{const}$. Проводимость жидкости σ , коэффициент вязкости η , расстояние между плоскостями $2a$. Перпендикулярно плоскостям в направлении оси x приложено постоянное и однородное внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . Вычислить зависимость скорости жидкости от x и добавочное магнитное поле, возникающее в движущейся жидкости. Проанализировать результат для больших и малых значений H_0 .

861. Вязкая несжимаемая жидкость находится между параллельными плоскостями $x = \pm a$. Плоскость $x = -a$ движется со скоростью $-v_0$, а плоскость $x = a$ — со скоростью v_0 в направлении оси z . Градиент давления отсутствует, электропроводность жидкости σ и коэффициент вязкости η заданы. Перпендикулярно плоскостям приложено однородное магнитное поле H_0 . Вычислить скорость жидкости и добавочное магнитное поле в ней.

862. Вдоль цилиндрического столба горячей плазмы, радиус которого a , течет ток \mathcal{I} , распределенный по сечению с плотностью $j(r)$. Как зависит от r давление плазмы, если оно уравнивается магнитным давлением, создаваемым текущим вдоль столба током?

Пусть плазма является изотермической и удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Выразить силу тока \mathcal{I} через температуру T плазмы

и полное число N частиц одного знака, приходящихся на единицу длины столба плазмы. Вязкостью пренебречь, рассмотреть стационарное состояние плазмы с $v = 0$.

863. Как должен быть распределен ток по сечению плазменного столба (см. условие предыдущей задачи), чтобы давление плазмы было постоянным по сечению?

864. Плазма испускается изотропно во все стороны с поверхности шара радиуса a , вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью Ω . Скорость плазмы v постоянна по величине и направлена по радиусу. Вблизи поверхности шара существует магнитное поле, которое в системе, вращающейся вместе с шаром, имеет значение $\mathbf{H}(a, \vartheta, \alpha) = \mathbf{H}_0(\vartheta, \alpha)$, где α отсчитывается в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Плотность энергии плазмы велика по сравнению с плотностью энергии магнитного поля, так что влиянием поля на движение плазмы можно пренебречь. Предполагая магнитное поле замороженным в плазму, найти его зависимость от координат и времени в области $r > a$ в неподвижной системе отсчета¹.

865. Найти вид силовых линий межпланетного магнитного поля в модели Паркера, рассмотренной в предыдущей задаче. Определить величину магнитного поля и угол θ между силовой линией и радиальным направлением на орбите Земли, задавшись следующими значениями параметров: радиус Солнца $a = 0,7 \cdot 10^6$ км; среднее магнитное поле на поверхности Солнца $H_0 \approx 1$ э; радиус орбиты Земли $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^8$ км; угловая скорость вращения Солнца $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-6}$ рад/сек; скорость солнечного ветра $v = 300$ км/сек.

866. На плазменный цилиндр действует однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное вдоль оси цилиндра, и радиальное электрическое поле \mathbf{E} . Вычислить ту часть энергии системы, которая связана с электрическим полем, приняв во внимание электрический дрейф плазмы. С помощью полученного выражения для энергии определить поперечную диэлектрическую проницаемость ϵ_{\perp} плазмы, находящейся в магнитном поле.

867. Квазинейтральная плазма находится между плоскостями $x = \pm d$. Пусть в некоторый момент времени произошло разделение зарядов, в результате которого все электроны оказались в плоскости $x = d$, а все ионы — в плоскости $x = -d$. Из-за электростатических сил заряды станут совершать колебания. Пренебрегая столкновениями частиц, найти частоту ω этих колебаний, если средняя концентрация частиц одного знака равна n .

¹ Модель, рассматриваемая в этой задаче, использовалась Паркером для описания межпланетного магнитного поля, создаваемого потоками солнечной плазмы (солнечным ветром).

868. Найти глубину проникновения электромагнитного поля в плазму при разных частотах. Для этого рассмотреть нормальное падение электромагнитной волны на плоскую границу плазмы, вычислить коэффициент отражения R и поперечное электрическое поле в плазме $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Диэлектрическую проницаемость взять в виде (XIV.13).

869*. Найти диэлектрическую проницаемость бесстолкновительной плазмы с учетом теплового движения электронов. Для этого проинтегрировать уравнение движения электрона во внешнем поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, вычислить плотность тока, создаваемого одной частицей, и произвести усреднение по начальному равновесному распределению координат и скоростей, считая его максвелловским. Ограничиться линейным приближением по напряженности электрического поля \mathbf{E} , движения ионов не учитывать. Заданы средняя концентрация электронов n и температура плазмы T (температура измеряется в энергетических единицах).

870. Диэлектрическая проницаемость плазмы для продольного поля при учете теплового движения частиц имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2}{\omega^2} v_{\parallel}^2 \right),$$

где $v_{\parallel}^2 = T/m$, второй член в скобках мал по сравнению с единицей. Вычислить фазовую и групповую скорости продольных плазменных волн.

871. В момент $t = 0$ в плазме нарушилась нейтральность заряда, в результате чего возник объемный заряд с плотностью $\rho(\mathbf{r}, 0)$.

а) Вычислить плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$ для $t > 0$, используя значение диэлектрической проницаемости плазмы (XIV.13).

б) Как изменится качественно результат, если учесть тепловое движение частиц плазмы? Провести конкретный расчет для ε_{\parallel} , приведенной в условии предыдущей задачи, выбрав

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0 \frac{x}{x_0} \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right], \quad \text{где } \rho_0 = \text{const}, \quad x_0 = \text{const}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Джексон Дж. [52], Лонгмайр К. [74], Франк-Каменецкий Д. А. [109], Нортроп Т. [82], Вопросы теории плазмы [28], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. [2].

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Векторная и тензорная алгебра. Преобразования векторов и тензоров

1. $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\alpha - \alpha')$.

3. Так как b_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты вектора, то при повороте системы координат $b'_i = \alpha_{ik} b_k$. Подставив b'_i в равенство $a'_i b'_i = \text{inv}$ и сравнив с $a_k b_k = \text{inv}$, получим $a_k = \alpha_{ik} a'_i$, т. е. a_k преобразуются при поворотах как компоненты вектора. Поскольку инвариант (скаляр) при отражениях не меняет знака, компоненты a_i и b_i , либо одновременно должны менять знак (полярные векторы либо не менять его (псевдовекторы)).

10. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_0 = i(a_{-1}b_{+1} - a_{+1}b_{-1}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_{\pm 1} = \pm i(a_0 b_{\pm 1} - a_{\pm 1} b_0),$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{\mu=1}^{\mu=-1} (-1)^\mu a_{-\mu} b_\mu, \quad r_\mu = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r Y_{1\mu}.$$

11. Тензор, обратный данному, удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon_{ik} \varepsilon_{kl}^{-1} = \delta_{il}. \quad (1)$$

Это — алгебраические уравнения относительно компонент ε_{ik}^{-1} обратного тензора. Их решения имеют вид

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = \frac{\Delta_{ki}}{|\varepsilon|}, \quad (2)$$

где Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента ε_{ik} в определителе $|\varepsilon|$. Из формулы (2) следует, что для существования обратного тензора необходимо, чтобы $|\varepsilon| \neq 0$. Учитывая известное свойство определителя $\Delta_{ki} \varepsilon_{kl} = \delta_{il} |\varepsilon|$,

убеждаемся, что обратный тензор удовлетворяет, наряду с (1), также условиям

$$\varepsilon_{ik}^{-1} \varepsilon_{kl} = \delta_{il}. \quad (3)$$

Если ε_{ik} — симметричный тензор, заданный в главных осях: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(i)} \delta_{ik}$ (здесь суммировать по i не нужно), то

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^{(i)}} \delta_{ik}.$$

14. T_{ik} образуют тензор II ранга.

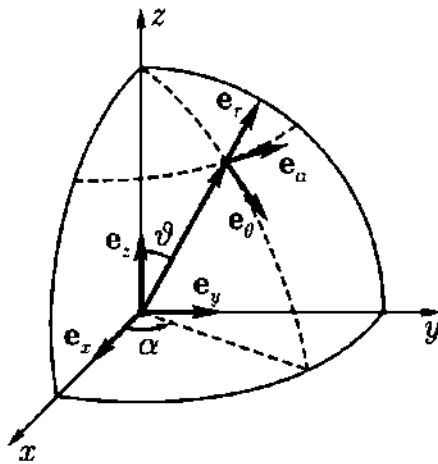


Рис. 46

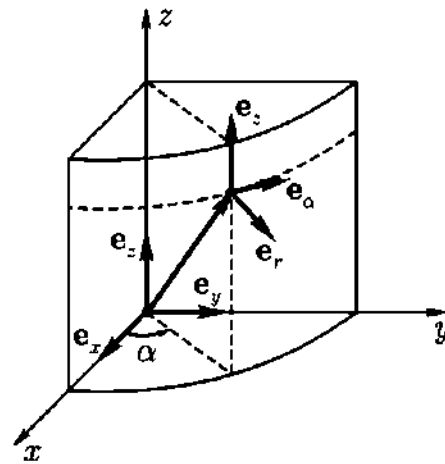


Рис. 47

15. При преобразовании $e_i \rightarrow e'_i$ по формулам $e'_i = \alpha_{ik} e_k$, коэффициенты $\alpha_{ik} = e'_i \cdot e_k$ имеют смысл проекций новых ортов на старые. Выполняя проектирование (рис. 46, 47), получим следующие матрицы преобразования:

при переходе от декартовых координат к сферическим,

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & -\sin \vartheta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

при переходе от декартовых координат к цилиндрическим,

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Обозначив через \hat{g} матрицу, связывающую компоненты вектора в системах S' и S ($A'_i = g_{ik}A_k$), имеем:
в случае отражения,

$$\hat{g}_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

в случае поворота,

$$\hat{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Направление отсчета угла α и направление оси z удовлетворяют правилу правого винта.

17. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, получим

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha_1\theta\alpha_2) &= \hat{g}(\alpha_2)\hat{g}(\theta)\hat{g}(\alpha_1) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \sin \alpha_2; & \sin \theta \sin \alpha_2 \\ -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \cos \alpha_2; & \sin \theta \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \theta & -\sin \theta \cos \alpha_1 & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18.

$$\hat{D}(\alpha_1\theta\alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}; & -\frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_2}; & -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ -\frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_1}; & \cos \theta; & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin \theta e^{-i\alpha_1} \\ -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}; & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin \theta e^{-i\alpha_2}; & \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \end{pmatrix}.$$

19. Так как матрица поворота на нулевой угол (тождественное преобразование) равна $\hat{1}$, то при повороте на малый угол $|\varepsilon_{ik}| \ll 1$. Для доказательства соотношения $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ воспользуемся инвариантностью $r^2 = \delta_{ik}x_i x_k$ относительно вращений. Поскольку $x'_i = \alpha_{ik}x_k = x_i + \varepsilon_{ik}x_k$, то с точностью до малых величин первого порядка имеем $r'^2 = r^2 + 2\varepsilon_{ik}x_i x_k$. Из инвариантности r^2 следует, что $\varepsilon_{ik}x_i x_k = 0$ при произвольных x_i , а это возможно только при $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$. Введем вектор $\delta\varphi$ с компонентами $\delta\varphi_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{kl}$. Тогда $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\varphi \times \mathbf{r}$, откуда видно, что $\delta\varphi$ представляет собой вектор малого угла поворота, направление которого указывает ось вращения, а величина — угол поворота.

22. Доказательство одинаково для любого числа измерений. Пусть матрица коэффициентов преобразования $\hat{\alpha}$, а ее определитель $|\hat{\alpha}|$. В силу ортогональности матрицы $\hat{\alpha}$ имеют место n^2 равенств $\alpha_{ik}\alpha_{lk} = \delta_{il}$. Замечая, что в левых частях этих равенств стоят элементы определителя, равного произведению двух определителей $|\hat{\alpha}|$, получим $|\hat{\alpha}| \cdot |\hat{\alpha}| = |\hat{1}| = 1$ или $|\hat{\alpha}|^2 = 1$. Отсюда следует, что $|\hat{\alpha}| = \pm 1$.

Докажем, что при поворотах $|\hat{\alpha}| = +1$. Если поворот производится на нулевой угол (тождественное преобразование), то $|\hat{\alpha}| = |\hat{1}| = 1$; поскольку элементы матрицы $\hat{\alpha}$ являются непрерывными функциями параметров, задающих поворот (например, углов Эйлера, см. ответ задачи 17), то и при повороте на конечный угол $|\hat{\alpha}| = 1$.

При отражениях определитель $|\hat{\alpha}|$ имеет вид

$$|\hat{\alpha}| = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pm 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Знак минус имеют те диагональные элементы определителя, которые соответствуют отраженным осям. Ясно, что $|\hat{\alpha}| = +1$ при четном числе таких осей и -1 при нечетном их числе.

24. Из 27 величин e_{ikl} отличны от нуля только шесть. Остальные имеют хотя бы два одинаковых индекса и в силу антисимметрии обращаются в нуль ($e_{iik} = -e_{iik} = 0$). Отличные от нуля компоненты равны

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = -e_{321} = -e_{213} = -e_{132} = 1.$$

Составим выражение $\alpha_{1i}\alpha_{2k}\alpha_{3l}e_{ikl}$. Вспомнив определение детерминанта третьего порядка и используя определение e_{ikl} , запишем это выражение в виде $\alpha_{1i}\alpha_{2k}\alpha_{3l}e_{ikl} = |\hat{\alpha}| = +1 = e'_{123}$. Переставив теперь слева два индекса, например, 1 и 2, получим

$$\alpha_{2i}\alpha_{1k}\alpha_{3l}e_{ikl} = -\alpha_{1k}\alpha_{2i}\alpha_{3l}e_{kil} = -e'_{123} = e'_{213} \dots$$

Из этих равенств видно, что e_{ikl} преобразуются при поворотах как тензор III ранга. При отражениях величины e_{ikl} не меняются, поэтому совокупность их образует аксиальный тензор III ранга. Он обладает любопытным свойством: его компоненты во всех координатных системах одинаковы.

25. Запишем тензор A_{ik} в виде таблицы:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_{23} = A_1$, $A_{31} = A_2$, $A_{12} = A_3$. Эти три равенства можно записать как $A_i = \frac{1}{2} e_{ikl} A_{kl}$, где e_{ikl} — совершенно антисимметричный единичный тензор III ранга, введенный в предыдущей задаче. Но поскольку e_{ikl} является тензором III ранга, а A_{kl} — тензором II ранга, величины A_i ($i = 1, 2, 3$) образуют вектор. A_i называется вектором, дуальным тензору A_{ik} .

26. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = e_{ikl} A_k B_l$, $\text{rot}_i \mathbf{A} = e_{ikl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}$. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и $\text{rot} \mathbf{A}$ можно рассматривать как антисимметричные тензоры II ранга или как дуальные им векторы, компоненты которых не меняют знака при отражениях (псевдовекторы).

$$28. \text{ а) } a^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}); \quad \text{б) } [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot [(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \times \mathbf{c}'].$$

$$30. (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}')(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}') + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}')(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}') + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}')(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}') - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}')(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}') - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}')(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}') - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}')(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}')(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}').$$

31. Проведем доказательства для вектора и тензора II ранга.

а) Так как компоненты вектора по условию должны быть одинаковы во всех системах отсчета, то при любом повороте $A'_i = a_i$, т. е.

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \quad (1)$$

Повернем систему координат вокруг оси z на угол π . Из формул преобразования компонент вектора при вращениях $A'_i = \alpha_{ik} A_k$ получим, что

$$A'_x = -A_x, \quad A'_y = -A_y, \quad A'_z = A_z. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) совместимы только в том случае, если $A_x = A_y = 0$. Произведя поворот вокруг оси x на угол π , точно так же докажем, что $A_z = 0$, т. е. вектор $\mathbf{A} = 0$, если его компоненты не зависят от выбора системы отсчета, что и требовалось доказать.

б) Любой тензор II ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров: $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$. Антисимметричный тензор эквивалентен некоторому псевдовектору (см. задачу 25) и, в силу доказанного выше свойства вектора, его компоненты не зависят от системы отсчета только тогда, когда они равны нулю. Поэтому рассмотрим симметричный тензор S_{ik} .

Выберем систему координат, в которой S_{ik} имеет диагональный вид $\lambda^{(i)} \delta_{ik}$. Если $\lambda^{(i)}$ не равны друг другу, то компоненты тензора будут зависеть от выбора осей, т. е. от того, какой цифрой (1, 2 или 3) обозначена данная ось. Только при $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$ компоненты тензора не будут зависеть от выбора осей. При этом тензор будет иметь вид $\lambda \delta_{ik}$, что и требовалось доказать.

32. Искомые средние значения равны соответствующим интегралам:

$$\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi} \int n_i d\Omega, \quad \overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi} \int n_i n_k d\Omega \dots \quad (1)$$

Однако вместо прямого вычисления интегралов в этой задаче удобнее применить другой метод, основанный на использовании трансформационных свойств рассматриваемых величин. Очевидно, что величины $\overline{n_i}$, $\overline{n_i n_k}$ и т. д. являются тензорами соответственно I, II, III, IV рангов. С другой стороны, из их определения (1) следует, что эти величины должны быть одинаковыми в любой системе отсчета. Поэтому они будут выражаться через такие тензоры, компоненты которых не зависят от выбора системы отсчета.

Рассмотрим с этой точки зрения $\overline{n_i}$. Поскольку нет вектора, кроме нулевого, компоненты которого не зависели бы от системы отсчета (см. задачу 31), то $\overline{n_i} = 0$.

Тензор $\overline{n_i n_k}$ должен выражаться через симметричный тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах отсчета. Таким тензором является только δ_{ik} . Поэтому можно написать

$$\overline{n_i n_k} = \lambda \delta_{ik}. \quad (2)$$

Для определения λ свернем¹ тензор по двум значкам:

$$\overline{n_i n_i} = \overline{n^2} = 1 = 3\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем

$$\begin{aligned} \overline{n_i n_k n_l} &= 0, \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} &= \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}). \end{aligned} \quad (3)$$

33. $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\frac{1}{3}\mathbf{a}$, $\frac{2}{3}a^2$, $\frac{2}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;

$$\frac{1}{15}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})].$$

34. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$, $(\mathbf{n} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{l}$.

35. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{l}$, $\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)$.

¹Под операцией свертывания тензора понимается суммирование тензора по двум одинаковым значкам.

§ 2. Векторный анализ

$$36. \nabla_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\alpha} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{i}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

$$\nabla_0 = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

$$37. \operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{l}, \quad (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{l}.$$

$$38. \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

$$41. \operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \varphi'; \quad \operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{r} = 3\varphi + r\varphi'; \quad \operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{r} = 0;$$

$$(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi(r) \mathbf{r} = \mathbf{l} \varphi + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})}{r} \varphi'.$$

$$42. \varphi(r) = \frac{\operatorname{const}}{r^3}.$$

$$43. \operatorname{div}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}, \quad \operatorname{div} \varphi(r) (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \varphi(r) (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (2\varphi + r\varphi') \mathbf{a} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}{r} \varphi', \quad \operatorname{div} \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 3(\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$$

$$44. \operatorname{grad} \mathbf{A}(r) \mathbf{r} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'), \quad \operatorname{grad} \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'),$$

$$\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{A}(r) = \frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'), \quad \operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{A}(r) = \frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}'),$$

$$(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi(r) \mathbf{A}(r) = \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}{r} (\varphi' \mathbf{A} + \varphi \mathbf{A}').$$

$$45. -\operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3} \right); \quad \text{проекции этого вектора на базисные орты } \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\alpha \text{ равны соответственно}$$

$$\frac{3p \cos \vartheta}{r^3}, \quad \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \quad 0.$$

Векторные линии образуются пересечением двух семейств поверхностей: $\alpha = C_1$, $r = C_2 \sin^2 \vartheta$, а также особое решение $\vartheta = 0, \pi$.

¹Здесь и далее в этом параграфе штрихом обозначено дифференцирование по r .

47.

$$(\Delta A)_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta A)_\vartheta = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta A)_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha}.$$

48.

$$(\Delta A)_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta A)_\alpha = \Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha},$$

$$(\Delta A)_z = \Delta A_z.$$

49. $\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV = \oint (\mathbf{A} \times \text{grad } \varphi) d\mathbf{S} = \int \varphi \text{rot } \mathbf{A} dS.$

50. Здесь, как и в ряде других случаев, удобно рассмотреть скалярное произведение интеграла на произвольный постоянный вектор \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \oint \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS &= \oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) a_n dS = \int \text{div}[(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] dV = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \int dV = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})V. \end{aligned}$$

Поскольку \mathbf{c} — произвольный вектор, то отсюда следует, что, $\int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{r} dS = \mathbf{a}V$. Таким же способом получим $\oint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} dS = \mathbf{a}V$.

51. $\oint \mathbf{n}\varphi dS = \int \text{grad } \varphi dV, \quad \oint (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dS = \int \text{rot } \mathbf{a} dV,$

$$\oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} dS = \int (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} dV = \int (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} dV + \int \mathbf{a}(\text{div } \mathbf{b}) dV.$$

55. Используя метод задачи 50, получим $\oint \varphi d\mathbf{l} = \int (\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi) dS$, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

56. $\int (\text{grad } u \times \text{grad } f) \cdot \mathbf{n} dS.$

61. а) $A + \frac{B}{r}$; б) $A + B \ln \text{tg } \frac{\vartheta}{2}$; в) $A + B\alpha$.

62. а) $A + B \ln r$; б) $A + B\alpha$; в) $A + Bz$.

64.

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ y &= \pm \left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ z &= \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{\frac{1}{2}}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2R_\eta}, \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_\zeta},$$

$$\Delta = \frac{4}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)} \left[(\eta - \zeta)R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + (\zeta - \xi)R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right],$$

где $R_u = \sqrt{(u + a^2)(u + b^2)(u + c^2)}$.

Из формул (1) видно, что каждой тройке значений ξ, η, ζ , соответствуют восемь троек x, y, z .

Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат можно, найдя $\text{grad } \xi, \text{grad } \eta, \text{grad } \zeta$ и составив скалярные произведения $\text{grad } \xi \cdot \text{grad } \eta$ и т. д., которые оказываются равными нулю. $\text{grad } \xi, \text{grad } \eta, \text{grad } \zeta$ можно найти непосредственно из уравнений, определяющих ξ, η, ζ , беря градиент от обеих частей каждого из этих уравнений и используя (1).

$$65. \quad z = \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r = \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi - \eta}}{R_\xi}, \quad h_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi - \eta}}{R_\eta}, \quad h_3 = r,$$

где $R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + c^2)}$, $R_\eta = \sqrt{(\eta + a^2)(-\eta - c^2)}$;

$$\Delta = \frac{4}{\xi - \eta} \left[R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

$$66. \quad x = \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r = \pm \left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{R_\xi}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi - \zeta}}{R_\zeta},$$

где $R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)}$, $R_\zeta = \sqrt{(\zeta + a^2)(-\zeta - b^2)}$;

$$\Delta = \frac{4}{\xi - \zeta} \left[R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

$$67. \quad h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad h_\alpha = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta};$$

$$\Delta = \frac{(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^3}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right].$$

68. Поверхности $\rho = \operatorname{const}$ — тороиды:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{cth} \rho)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \rho} \right)^2;$$

поверхности $\xi = \operatorname{const}$ — сферические сегменты:

$$(z - \operatorname{arctg} \xi)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sin \xi} \right)^2;$$

$$h_\rho = h_\xi = \frac{a}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}, \quad h_\alpha = \frac{a \operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch} \rho - \cos \xi}.$$

ГЛАВА II

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

69. $\varphi_1 = -2\pi z^2, \quad \mathbf{E}_1 = -4\pi\rho z \mathbf{e}_z \quad \left(|z| < \frac{a}{2}\right),$
 $\varphi_2 = -\frac{1}{2}\pi\rho a(4|z| - a), \quad \mathbf{E}_2 = -2\pi\rho a \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z \quad \left(|z| > \frac{a}{2}\right).$

Ось z направлена по нормали к поверхности плиты.

70. $\varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z.$

71. При $z > 0$: $\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} e^{-\lambda z} \sin \alpha x \sin \beta y;$
 при $z < 0$: $\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} e^{\lambda z} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$

Экспоненциальное убывание потенциала вдоль оси z объясняется тем, что плоскость содержит разноименно заряженные участки.

72. Самый простой метод решения — с помощью электростатической теоремы Гаусса. При решении методом интегрирования уравнения Пуассона необходимо воспользоваться выражением оператора Лапласа цилиндрической системе координат и использовать тот факт, что вследствие симметрии системы φ зависит только от r .

При объемном распределении заряда:

$$\varphi_1 = \int_r^R \frac{2\kappa r}{R^2} dr = \kappa \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad E_1 = \frac{2\kappa r}{R^2} \quad (r \leq R);$$

$$\varphi_2 = \int_r^R \frac{2\kappa}{r} dr = -2\kappa \ln \frac{r}{R}, \quad E_2 = \frac{2\kappa}{r} \quad (r \geq R).$$

При поверхностном распределении заряда $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = -2\kappa \ln \frac{r}{R}.$

$$73. \quad \varphi = -2\kappa \ln r, \quad E = \frac{2\kappa}{r},$$

где κ — заряд на единицу длины. Произвольная постоянная в потенциале выбрана так, что $\varphi = 0$ при $r = 1$.

$$74. \quad \varphi(x, y, z) = -\frac{q}{2a} \ln \left| \frac{z - a + \sqrt{(z - a)^2 + x^2 + y^2}}{z + a + \sqrt{(z + a)^2 + x^2 + y^2}} \right|.$$

75. Введем обозначения

$$z_1 = z + a, \quad z_2 = z - a, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{1,2}^2}, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}.$$

Из результата предыдущей задачи следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{C + 1}{C - 1} = \text{const} \quad (1)$$

(нужно учесть, что $z_1 - z_2 = 2a$).

Равенство (1) показывает, что эквипотенциальные поверхности представляют собой эллипсоиды вращения, фокусы которых совпадают с концами отрезка.

$$76. \quad \varphi_1(r) = \frac{q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), \quad E_1 = \frac{qr}{R^3} \quad (r \leq R);$$

$$\varphi_2(r) = \frac{q}{r}, \quad E_2 = \frac{qr}{r^3} \quad (r \geq R).$$

$$77. \quad \varphi_1(r) = \frac{q}{R}, \quad E_1 = 0 \quad (r < R);$$

$$\varphi_2(r) = \frac{q}{r}, \quad E_2 = \frac{qr}{r^3} \quad (r > R).$$

78. Электрическое поле в полости однородно:

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r - \frac{4}{3}\pi\rho(r - a) = \frac{4}{3}\pi\rho a.$$

79. $q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$;

$$E_1 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{q}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{при } r \leq R_1;$$

$$E_2 = \frac{q(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{R_2 - R_1} \left(1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$E_3 = \frac{q}{r^2}; \quad \varphi_3 = \frac{q}{r} \quad \text{при } r \geq R_2.$$

При $R_2 \rightarrow R_1 \equiv R$ и фиксированном значении заряда q , получаем поле сферы, равномерно заряженной по поверхности.

80. $W = \frac{3q^2}{5R}$, $W = \frac{q^2}{2R}$, $W = \frac{q^2}{R_2 - R_1} - \frac{q^2 R_1}{(R_2 - R_1)^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$ — соответственно для распределений зарядов, указанных в задачах 76, 77 и 79.

Из сравнения вкладов в энергию W , выражаемых интегралами \int_0^R и \int_R^∞ видно, что бóльшая часть энергии поля локализована вне распределения заряда (83% в случае шара, заряженного по объему).

$$\mathbf{81.} \quad \varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr';$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4\pi r}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

83. Поле электронного облака в атоме:

$$\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r} \left(1 - e^{-\frac{2r}{a}}\right) + \frac{e_0}{a} e^{-\frac{2r}{a}};$$

$$E_{er} = -\frac{e_0}{r^2} \left[1 - \left(\frac{2r}{a} + 1\right) e^{-\frac{2r}{a}}\right] + \frac{2e_0}{a^2} e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Потенциал полного электрического поля в атоме

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r}.$$

84. Напряженность поля максимальна на поверхности ядра:

$$E_{\max} = \frac{Ze_0}{R^2} = 6,4 \cdot 10^{18} \frac{Z}{A^{2/3}} \text{ в/см.}$$

85. Воспользоваться тем, что плотность σ поверхностно распределенного заряда может быть записана в виде

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \sigma(\vartheta, \alpha) \delta(r - a).$$

$$\mathbf{86.} \quad q_{1,2} = \frac{R\sqrt{R^2 + a^2}}{qa^2} (\sqrt{R^2 + a^2} A_{1,2} - RA_{2,1}).$$

$$87. \quad \varphi = \frac{2q}{R^2} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|);$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2q}{R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right),$$

где z — координата точки наблюдения, отсчитываемая от плоскости диска.

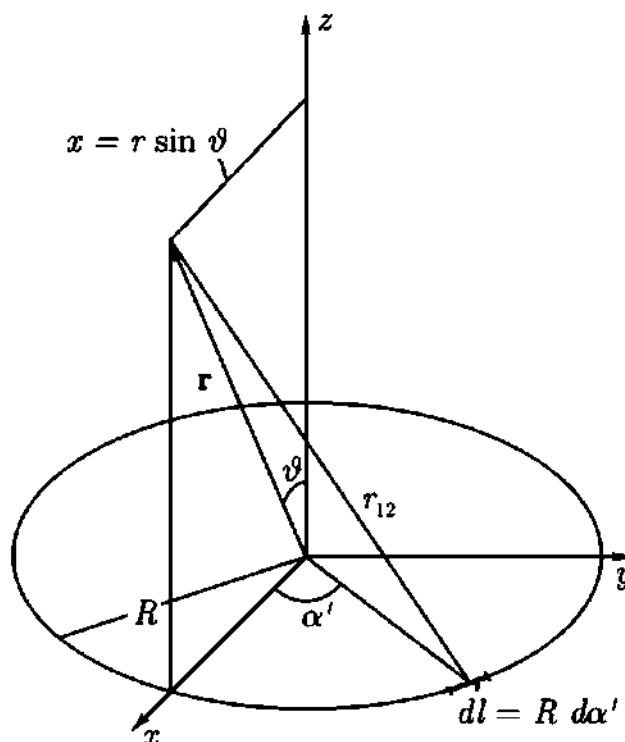


Рис. 48

88. Если положительно заряженное полукольцо занимает область $x > 0$ в плоскости xy , то при $x, y \ll \frac{R^2 + z^2}{R}$ получаем, разлагая подынтегральную функцию в интеграле $\int \frac{\kappa}{r_{12}} dl$ в ряд:

$$\varphi = \frac{4qRx}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$E_x = -\frac{4qR}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{12qRxz}{\pi(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

При $z \gg R$ получается поле электрического диполя, момент которого направлен по оси x и равен $\frac{4}{\pi}qR$.

89. Вследствие симметрии системы потенциал φ не будет зависеть от азимутального угла α , поэтому можно без нарушения общности провести плоскость xz через точку наблюдения. Тогда (рис. 48)

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta \cos \alpha'}$$

и

$$\varphi(r, \vartheta) = 2\kappa R \int_0^\pi \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta \cos \alpha'}}$$

где $\kappa = \frac{q}{2\pi R}$.

Произведя подстановку $\alpha' = \pi - 2\beta$ и введя обозначение

$$k^2 = \frac{4rR \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}},$$

получим

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{4\kappa R}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{2k\kappa}{\sqrt{rR \sin \vartheta}} K(k).$$

90. а) $\varphi = \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$, где z — расстояние от плоскости кольца до точки наблюдения.

б) $\varphi = \frac{q}{r}$.

в) Обозначив через r' расстояние от точки наблюдения до нити кольца, получим при $r' \ll R$:

$$1 - k^2 \approx \frac{r'^2}{4R^2}, \quad K(k) = \ln \frac{8R}{r'}, \quad \text{и} \quad \varphi(r) = -2\kappa \ln r' + \text{const},$$

как и должно быть в случае линейного заряда.

$$\mathbf{91.} \quad \varphi_1 = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos \vartheta \quad (r \leq R),$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sigma_0 R^3}{r^2} \cos \vartheta \quad (r \geq R).$$

Внутри сферы — однородное электрическое поле с напряженностью $E_{1z} = -\frac{4\pi\sigma_0}{3}$. Вне сферы — поле диполя с моментом $\frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3}$.

92. Вследствие аксиальной симметрии поля уравнение Лапласа, записанное в цилиндрических координатах (полярная ось направлена вдоль оси симметрии системы), принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в форме степенного ряда по r :

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n, \quad a_0(z) = \varphi(0, z) \equiv \Phi(z), \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ — потенциал на оси симметрии системы.

Подставив (2) в (1), перегруппировав члены и приравняв нулю коэффициенты получившегося ряда, найдем рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $a_n(z)$, откуда:

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \Phi^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \dots,$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{r}{2} \Phi''(z) + \dots,$$

$$E_\alpha = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\Phi'(z) + \dots$$

93. Нужно вычислить мультипольные моменты

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \kappa R^l Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R d\alpha,$$

$$Q'_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\kappa}{R^{l+1}} Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) R d\alpha.$$

Используя формулы (П 2.1), (П 2.5) приложения 2, найдем:

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \quad \text{при } r > R,$$

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) \quad \text{при } r < R.$$

Обе формулы справедливы также при $r = R$ ($\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$).

94. а) $\varphi \approx qa^2 \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = 2qa^2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}$;

б) $\varphi \approx \frac{3qa^2 \sin^2 \vartheta \cos \alpha \sin \alpha}{r^3}$.

95. а) $\varphi \approx \frac{6qa^3 P_3(\cos \vartheta)}{r^4} = qa^3 \frac{15 \cos^3 \vartheta - 9 \cos \vartheta}{r^4}$;

б) $\varphi \approx \frac{15qabcxyz}{r^7} = \frac{15qabc \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \alpha \cos \alpha}{r^4}$.

96. $\varphi(r, \vartheta, \alpha) = q \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0) Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ при $r < r_0$;

$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = q \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0, \alpha_0) Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ при $r > r_0$.

97. $\varphi(x, y, z) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}$.

В случае эллипсоида вращения ($a = b$)

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{r} + q \frac{c^2 - a^2}{5} \cdot \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}.$$

В случае шара ($a = b = c$)

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

98. В сферических координатах с полярной осью вдоль оси симметрии системы и полюсом в центре колец

$$\varphi(r, \vartheta) = -\frac{q^2(a^2 - b^2)}{2} \cdot \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}.$$

Это — потенциал линейного квадруполья, у которого заряды $-q$ находятся на расстоянии $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$ от центрального заряда $2q$.

99. Вычислим мультипольные моменты:

$$q = - \int (\mathbf{p}' \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) dV = - \oint (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{n}) \delta(\mathbf{r}) dS = 0.$$

так как $\delta(\mathbf{r}) = 0$ всюду, кроме $\mathbf{r} = 0$;

$$p_\alpha = - \int x_\alpha (\mathbf{p}' \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) dV = - \int x_\alpha p'_n \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x_n} dV = \int p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \delta(\mathbf{r}) dV.$$

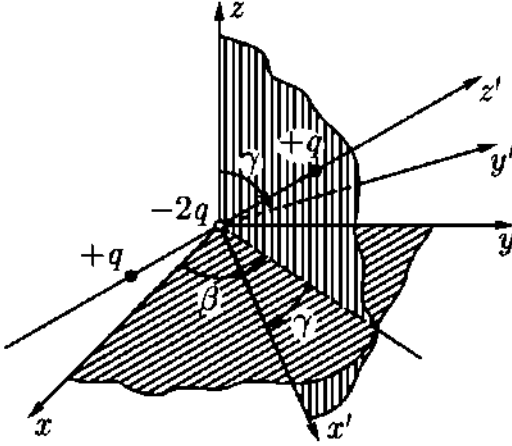


Рис. 49

Последнее преобразование состояло в интегрировании по частям. По повторяющемуся индексу n подразумевается суммирование. Возникший при этом поверхностный интеграл обращается в нуль, так как $\delta(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \neq 0$. По определению δ -функции

$$p_\alpha = p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} = p'_n \delta_{\alpha n} = p'_\alpha.$$

Все мультипольные моменты более высокого порядка пропорциональны компонентам \mathbf{r} при $\mathbf{r} = 0$ и поэтому обращаются в нуль. Рассмотрим, например, компоненты квадрупольного момента. Действительно,

$$Q_{\alpha\beta} = - \int x_\alpha x_\beta p'_n \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x_n} dV = \int \delta(\mathbf{r}) p'_n \frac{\partial x_\alpha x_\beta}{\partial x_n} dV = p'_\alpha x_\beta + p'_\beta x_\alpha \Big|_{\mathbf{r}=0} = 0.$$

100. После n -кратного интегрирования по частям получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = q(-1)^n \int \delta(\mathbf{r}') \prod_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = q \prod_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

101. Проще всего, воспользовавшись формулой $\varphi = \frac{qa^2(3z'^2 - r^2)}{r^5}$ (см. ответ к задаче 94), выразить в ней z' через x, y, z (рис. 49). Получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{qa^2}{r^5} [3(x \sin \gamma \cos \beta + y \sin \gamma \sin \beta + z \cos \gamma)^2 - r^2] = \\ &= \frac{qa^2}{r^3} [3(\cos \vartheta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\alpha - \beta))^2 - 1]. \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись тем, что совокупность компонент квадрупольного момента представляет собой тензор II ранга. В системе осей x', y', z' компоненты квадрупольного момента

$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0, \quad Q'_{zz} = 2qa^2.$$

Матрица коэффициентов преобразования имеет вид

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\sin \beta & \sin \gamma \cos \beta \\ \cos \gamma \sin \beta & \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

С помощью этой матрицы вычисляем компоненты $Q_{\alpha\beta}$ в системе xyz по формулам

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta} \alpha_{\alpha\gamma} \alpha_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta},$$

а затем используем формулу (II.8).

$$\begin{aligned} 102. \quad \varphi &= \frac{15qabcz}{2r^7} [(y^2 - x^2) \sin 2\beta + 2xy \cos 2\beta] = \\ &= \frac{15qabc}{2r^4} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin 2(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

$$103. \quad \varphi = \frac{qa^2}{4r^3} (3 \sin^2 \vartheta \sin 2\alpha - 3 \cos 2\vartheta - 1).$$

104. По принципу суперпозиции можно написать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \int \mathbf{P} \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Преобразуя это выражение с помощью теоремы Остроградского–Гаусса, получим что $\varphi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{P_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS$, где S – внутренняя поверхность поляризованного шара, а $P_n = P \cos \vartheta$. Используя результаты задачи 91, найдем:

$$\varphi_1 = \frac{4\pi Pr}{3} \cos \vartheta \quad (r \leq R),$$

$$\varphi_1 = \frac{4\pi PR^3}{3r^2} \cos \vartheta \quad (r \geq R).$$

$$105. \varphi(\mathbf{r}) = -2\kappa \ln r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha}{nr^n},$$

где $\kappa = \int \rho(\mathbf{r}') dS'$ — полный заряд единицы длины распределения, $A_n = \int \rho(\mathbf{r}') r'^n \cos n\alpha' dS'$ и $B_n = \int \rho(\mathbf{r}') r'^n \sin n\alpha' dS'$ — двумерные мультипольные моменты n -го порядка.

Из этих формул, в частности, следует, что потенциал диполя в двумерном случае имеет вид $\varphi = \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$, где $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dS'$ — дипольный момент распределения на единицу длины, \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости xy .

$$106. \varphi(r, \alpha) = -2\kappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{при } (r > r_0),$$

$$\varphi(r, \alpha) = -2\kappa \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\alpha - \alpha_0) \quad \text{при } (r < r_0).$$

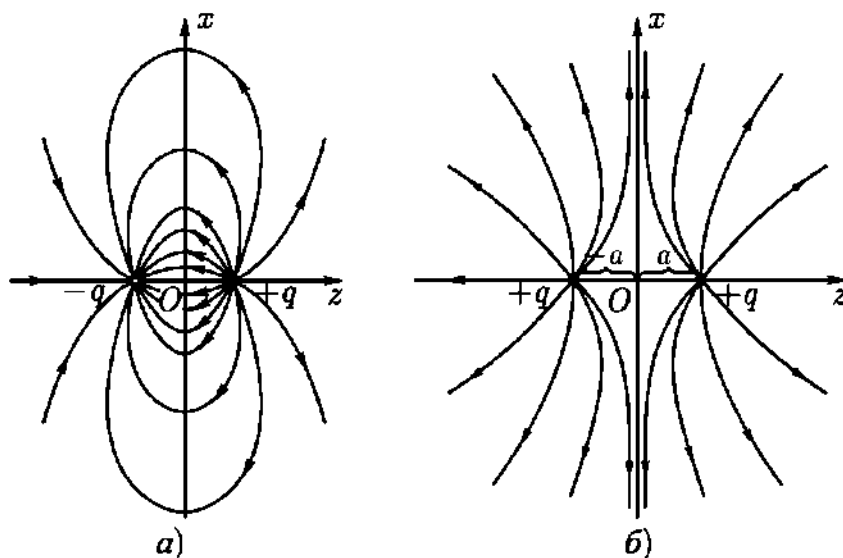


Рис. 50

$$107. \varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{2\kappa a}{r} \cos \alpha = \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2},$$

где \mathbf{p} — дипольный момент на единицу длины, \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости xy ($r \gg a$), ось z направлена вдоль одного из линейных зарядов.

108. На оси симметрии диска (ось z направлена от отрицательной стороны диска к положительной):

$$\varphi(z) = \tau\Omega = 2\pi\tau \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \frac{z}{|z|};$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi a^2 \tau z}{|z|(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

109. а) В цилиндрических координатах:

$$E_\alpha = \frac{2\tau}{r}, \quad E_r = E_z = 0;$$

б) $\varphi = 2\tau(\pi - \alpha), \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{2\tau}{r}; \quad E_r = E_z = 0.$

Поле E совпадает с магнитным полем прямолинейного тока $\mathcal{J} = \tau c$.

110. Уравнение силовых линий

$$(z+a)[(z+a)^2 + r^2]^{-1/2} \pm \pm (z-a)[(z-a)^2 + r^2]^{-1/2} = C,$$

где C — постоянная. На рис. 50а изображена картина силовых линий для случая разноименных зарядов. В случае одноименных зарядов в поле имеется нейтральная точка $r = 0, z = 0$ (рис. 50б).

111. Целесообразно перейти к сферическим координатам. Устремляя a к нулю, разлагая в ряд и отбрасывая члены порядка a^2 и выше, получим $r = C \sin^2 \vartheta$.

112. $r = C \sqrt{\sin^2 \vartheta |\cos \vartheta|}, \quad C = \text{const.}$

Не следует забывать, что в случае квадруполь конечных размеров, полученная формула пригодна только для больших расстояний (рис. 51).

114. $q_2 = \frac{\Phi + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\pi q}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\pi}.$

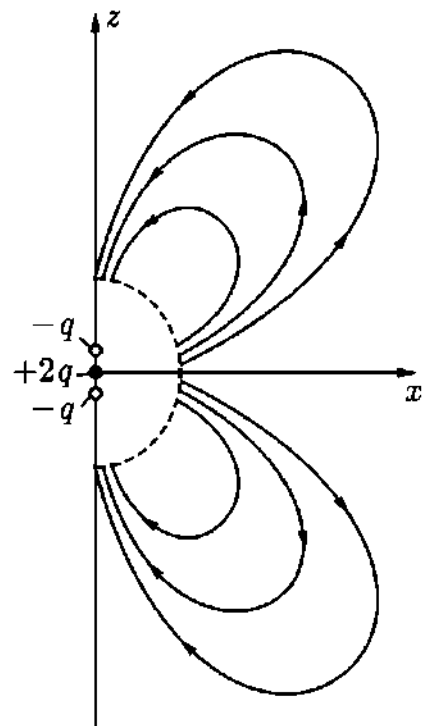


Рис. 51

115. Рассмотрим силовую трубку, полученную вращением некоторой силовой линии вокруг оси z . Применяв электростатическую теорему Гаусса к объему, ограниченному боковой поверхностью этой трубки и двумя плоскостями $z = \text{const}$, не содержащему внутри себя зарядов, найдем, что поток через любое нормальное к оси сечение трубки $\Phi(z) = \sum_i q_i \Omega_i(z)$ (см. задачу 113) не зависит от z (при изменении z между z_k и z_{k+1}). Здесь $\Omega_i(z) = 2\pi(\pm 1 - \cos \alpha_i)$ — телесный угол, под которым видна отрицательная сторона такого сечения из точки z_i , где находится заряд q_i ; α_i — угол между направлением оси z и радиусом-вектором точки контура нормального сечения с координатами (r, z) . Знак «+» нужно брать при $z > z_i$, знак «-» при $z < z_i$. Если при изменении z нормальное сечение трубки перейдет через заряд q_k , то $\Phi(z)$ скачком изменится на $\pm 4\pi q_k$, однако при этом не изменится $\sum_i q_i \cos \alpha_i$. Выразив $\cos \alpha_i$ через z , z_i и r , получим искомое уравнение семейства силовых линий:

$$\sum_i \frac{q_i(z - z_i)}{\sqrt{r^2 + (z - z_i)^2}} = C, \quad C = \text{const.}$$

117. Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра (рис. 52). Вместо условия $\varphi|_S = \text{const}$ на поверхности S цилиндра удобнее использовать вытекающее из него условие $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}|_S = 0$. В результате дифференцирования получим

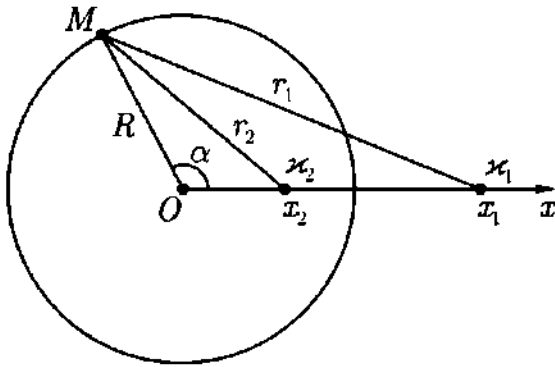


Рис. 52

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 x_1}{R^2 + x_1^2 - 2R x_1 \cos \alpha} &= \\ &= \frac{\kappa_2 x_2}{R^2 + x_2^2 - 2R x_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Освободимся от знаменателей и приравняем по отдельности члены с $\cos \alpha$ и без него. В результате получим, что при $\kappa_1 = \kappa_2$ эквипотенциальной поверхностью будет любая цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна заряженным нитям и лежит с ними в одной плоскости, а радиус удовлетворяет условию $R^2 = x_1 x_2$. При $x_1 = 0$ существует решение $\kappa_2 = 0$. Этот случай соответствует цилиндрическим эквипотенциальным поверхностям в поле одной нити.

118. Воспользуемся рис. 53. Радиус R искомой сферы и положение ее центра определяются уравнениями

$$R^2 = z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}.$$

Потенциал на поверхности этой сферы равен нулю.

$$\begin{aligned} 119. \quad \Delta\varphi &= q\Delta\frac{e^{-\alpha r}}{r} = q\Delta\frac{1}{r} + q\Delta\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} \\ &= -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}\right) = \\ &= -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеется точечный заряд q в начале координат и сферически симметрично распределенный объемный заряд с плотностью $\rho = -\frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r}$, $\int \rho dV = -q$.

120. Точечный заряд e_0 в начале координат, окруженный объемным зарядом с плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$. Такой вид имеет распределение заряда в атоме водорода (ср. с задачей 83)

$$121. \quad U = \int \frac{e_0}{r} \rho(r) dV = -\frac{e_0^2}{\pi a^3} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi dr = -\frac{e_0^2}{a}.$$

$$122. \quad U = \frac{5e_0^2}{4a}.$$

$$123. \quad U = \frac{q_1 q_2}{a}, \quad F = \frac{q_1 q_2}{a^2}.$$

$$124. \quad R = \frac{32\pi\alpha}{E_0^2}.$$

$$125. \quad U = \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 dl_1 dl_2}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 ab} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab dl_1 dl_2}{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}},$$

где интегрирование выполняется по всем элементам обоих колец dl_1 и dl_2 , α_1 и α_2 — углы, указывающие расположение элементов. Интегрируя по $d\alpha_2$

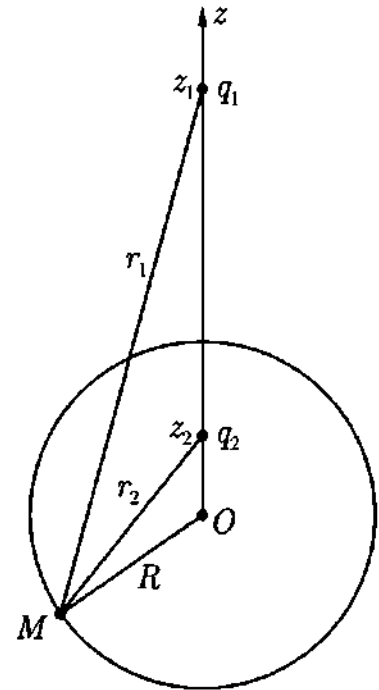


Рис. 53

и делая замену $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, получим

$$U = \frac{q_1 q_2 k}{\pi \sqrt{ab}} K(k),$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c^2 + (a+b)^2}}, \quad \text{а} \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

При вычислении силы $F = -\frac{\partial U}{\partial c} = -\frac{\partial U}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial c}$ нужно воспользоваться формулой

$$2k^2 \frac{dK(k)}{d(k^2)} = \frac{E(k)}{1 - k^2} - K(k)$$

(см. справочник [90], 8.112), где $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Окончательно,

$$F = \frac{q_1 q_2 c k^3}{4\pi (ab)^{3/2}} \cdot \frac{E(k)}{1 - k^2}.$$

$$126. \quad \mathbf{F} = -\frac{3qr(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{q\mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{N} = \frac{q\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

$$127. \quad U = p_1 p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3},$$

где $\vartheta_1 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$, $\vartheta_2 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$, φ — угол между плоскостями $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$,

$$F = 3p_1 p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^4}.$$

Сила максимальна при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varphi = 0$, т. е. при параллельных диполях.

$$128. \quad U_{21} = \int \rho(\mathbf{r}') \varphi_1(\mathbf{r}') dV' = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} \int r'^l Y_{lm}(\vartheta', \alpha') dV' = \\ = \sum_{l,m} a_{lm} Q_{lm}^*.$$

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 1. Основные понятия и методы электростатики

$$129. \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q}{r}, \quad \mathbf{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

$$130. \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\pi}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3} \cdot \frac{q}{r},$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{2\pi\varepsilon_i}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3} \cdot \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

131. Граничным условиям ($\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника и $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$) можно удовлетворить потенциалом вида $\varphi = \frac{C}{r}$; постоянная C определяется из условия $\oint_S \mathbf{D}_n dS = 4\pi q$, $C = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. Отсюда находим распределение поверхностных зарядов:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{q\varepsilon_1}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, & \sigma_2 &= \frac{q\varepsilon_2}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \\ \sigma_{1\text{св}} &= \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, & \sigma_{2\text{св}} &= \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned}$$

$$132. \quad C = \left[\frac{(\varepsilon - 1)\Omega}{4\pi} + 1 \right] \frac{ab}{b - a}.$$

$$133. \quad C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]^{-1}.$$

Связанные заряды находятся в местах неоднородности диэлектрика т. е. на сферах радиусов a, b, c :

$$\sigma_{a\text{св}} = -\frac{q}{4\pi a^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}, \quad \sigma_{b\text{св}} = -\frac{q}{4\pi b^2} \cdot \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}, \quad \sigma_{c\text{св}} = -\frac{q}{4\pi c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right),$$

где q — заряд внутренней обкладки конденсатора.

Полный связанный заряд в конденсаторе равен нулю.

135. Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma_{\text{св}} = -\sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \quad \text{при } x = 0,$$

$$\sigma_{\text{св}} = \sigma \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_0} \right) \quad \text{при } x = a.$$

Объемная плотность

$$\rho_{\text{св}} = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0 (x + a)^2}$$

($\sigma = \varepsilon V / (4\pi a \ln 2)$ — заряд обкладки при $x = 0$).

136.

$$\text{а) } f_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{V^2}{8\pi d^2};$$

$$\text{б) } f_0 = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f_0 \quad (\text{жидкий диэлектрик}),$$

$$f = \frac{D^2}{8\pi} = f_0 \quad (\text{твердый диэлектрик});$$

$$\text{в) } f = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \varepsilon f_0 \quad (\text{жидкий диэлектрик}),$$

$$f = \frac{(\varepsilon E)^2}{8\pi} = \varepsilon^2 f_0 \quad (\text{твердый диэлектрик}).$$

137. а)
$$F = \frac{(\varepsilon - 1)bh_2V^2}{8\pi\varepsilon h_1 \left[h_1 - \frac{h_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \right]}$$
;

б)
$$F = -\frac{2\pi q^2 h_1 h_2 [h_1 \varepsilon - h_2(\varepsilon - 1)](\varepsilon - 1)}{b[\varepsilon a h_1 - (\varepsilon - 1)h_2 x]^2}$$
. Общие знаки минус

говорят о втягивании диэлектрика в конденсатор (координата x стремится уменьшиться).

138. Сравним давление в точках A и B жидкости (рис. 54). В точке B давление равно атмосферному $p_{\text{атм}}$. Давление в точке A можно найти двумя способами. С одной стороны, по формуле (III.25), $p_A = p_{\text{атм}} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\tau \partial \varepsilon}{\partial \tau}$ (здесь $p_{\text{атм}} = p_0$, $E = \frac{V}{d}$). С другой стороны, p_A отличается от давления у поверхности жидкости в конденсаторе, определяемого формулой (III.23),

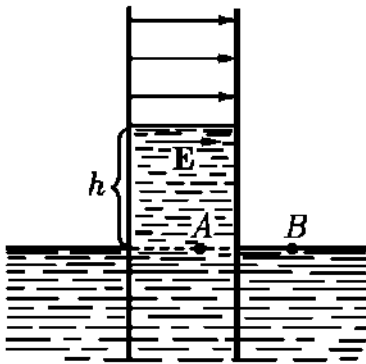


Рис. 54

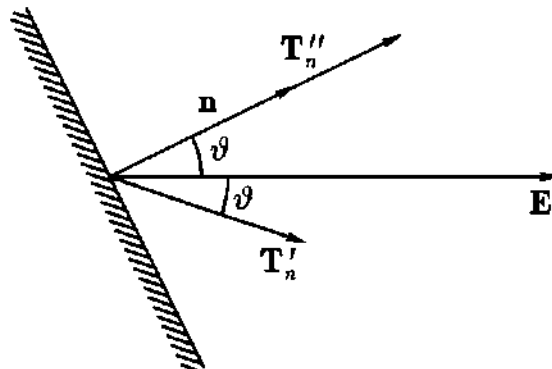


Рис. 55

на величину гидростатического давления $rg h$, $p_A = rgh + \tau \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2 + p_{\text{атм}}$. Сравнивая, получим

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi g \tau} E^2.$$

139. Тензор максвеллова натяжения \mathbf{T}'_n направлен так, что электрическое поле \mathbf{E} делит пополам угол между \mathbf{n} и \mathbf{T}'_n (рис. 55). $|\mathbf{T}'_n| = \omega = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ при любой ориентации площадки. Стрикционное натяжение $\mathbf{T}''_n = \frac{E^2 \tau \mathbf{n}}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$ имеет всегда характер «отрицательного давления» — оно направлено вдоль нормали \mathbf{n} к площадке.

140. а) Введем цилиндрические координаты, как показано на рис. 56а. На плоскости xy поле имеет радиальное направление, его величина $E = \frac{2qr}{\varepsilon(r^2 + a^2/4)^{3/2}}$. Для вычисления силы F , действующей на один из зарядов, например, на левый, нужно просуммировать напряжения, приложенные к элементам dS этой плоскости со стороны, обращенной к другому заряду:

$$T_z dS = -\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 dS = -\frac{\varepsilon q^2}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{(r^2 + a^2/4)^3 \varepsilon^2} dS,$$

если воспользоваться максвелловым тензором натяжений. Отсюда

$$F_z = \int T_z dS = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon q^2 \int_0^\infty \frac{r^2 2\pi r dr}{\varepsilon^2 (r^2 + a^2/4)^3} = -\frac{q^2}{\varepsilon a^2}.$$

Именно такое значение обычно принимается для силы, действующей между зарядами в однородном диэлектрике. Однако, если провести то же самое вычисление с полным тензором натяжений, то сила будет равна $F_z + \Delta F_z$,

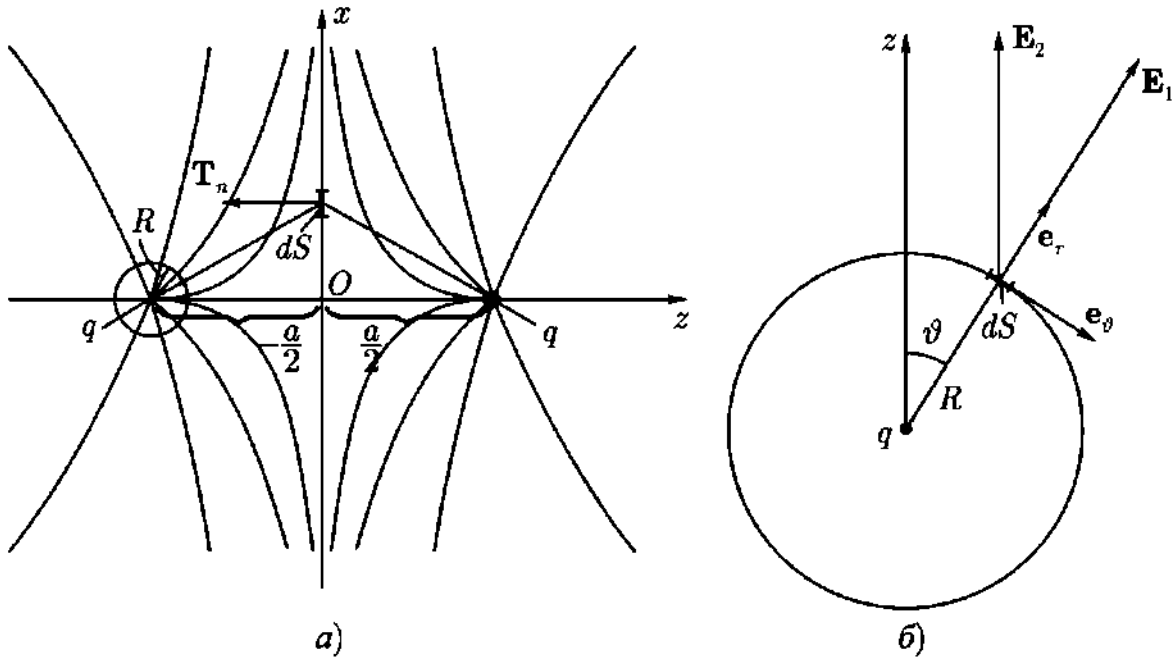


Рис. 56

где $\Delta F_z = q^2 \varepsilon^{-2} a^{-2} r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$ получается за счет стрикционного члена. Но в теории, учитывающей электрострикционные натяжения, нужно также учиты-

вать явление втягивания жидкости в поле и связанное с этим повышение гидростатического давления в жидкости на величину $\Delta p = \frac{E^2 \tau}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$, согласно (III.25). Результирующая гидростатическая сила $\Delta F_{zг} = -\frac{q^2 \tau}{\epsilon^2 a^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = -\Delta F_z$. Полная сила взаимодействия зарядов $F_z + \Delta F_z + \Delta F_{zг} = -\frac{q^2}{\epsilon \alpha^2}$ совпадает с той силой, которая получается без учета стрикционных сил и представляет собой, таким образом, результирующую электрических и механических сил.

б) Те же результаты получаются, если рассматривать действие натяжений на поверхности малой сферы радиуса R с центром в той точке, где находится заряд q , испытывающий действие силы (рис. 56б). Введем сферические координаты и рассмотрим максвелловы натяжения $\mathbf{T}'_n = \frac{\epsilon}{4\pi} \left(\mathbf{E} E_r - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{e}_r \right)$, где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1 = \frac{q}{\epsilon R^2} \mathbf{e}_r$ — поле заряда, испытывающего действие силы, $\mathbf{E}_2 = \frac{q}{\epsilon a^2} (\mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta - \mathbf{e}_r \cos \vartheta)$ — поле второго заряда, которое можно рассматривать как однородное, так как расстояние между зарядами $a \gg R$. Просуммировав натяжения, приложенные к поверхности сферы, получим

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{T}'_n dS = \frac{q}{\epsilon a^2} \mathbf{e}_z.$$

Рассмотрение стрикционных натяжений опять не дало бы ничего нового из-за гидростатической компенсации.

141. $\varphi_0 = \sqrt{\frac{8mg}{\epsilon - 1}},$

где g — ускорение силы тяжести.

142. При $z \geq 0$: $\varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \cdot \frac{q}{r^2};$

при $z \leq 0$: $\varphi = \varphi_2 = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{q}{r^1}.$

143. $\sigma_{св} = \frac{1}{4\pi} \left[(\epsilon_2 - 1) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - (\epsilon_1 - 1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = \frac{qa}{2\pi r^3} \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)},$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} = r_1 \Big|_{z=0} = r_2 \Big|_{z=0}.$$

При $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ получаем случай точечного заряда q , находящегося в диэлектрике ϵ_1 , у границы с плоским проводником. При этом $\sigma_{св} \rightarrow -\frac{qa}{2\pi r^3 \epsilon_1}.$

Эта предельная плотность на самом деле представляет собой сумму плотностей связанного заряда на границе диэлектрика и свободного заряда на поверхности проводника.

$$144. \quad F = \frac{q^2}{4a^2} \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

При $\epsilon_1 > \epsilon_2$ заряд отталкивается от границы диэлектриков, при $\epsilon_1 < \epsilon_2$ — притягивается. Заряд, находившийся вначале в среде с большим ϵ , отталкиваясь от границы, стремится уйти на бесконечность. Заряд, находившийся сначала в среде с меньшим ϵ , притягивается к границе, пересекает ее и затем, будучи уже в другой среде, отталкиваясь от границы удаляется на бесконечность. (Сказанное будет справедливо только в том случае, если пренебречь силой чтения, действующей на заряд со стороны среды.)

Приведенное значение силы F можно получить разными способами: а) рассматривая взаимодействие двух точечных зарядов q' и q'' ; б) вычисляя силу, действующую на точечный заряд со стороны связанных зарядов, находящихся на границе раздела диэлектриков; в) с помощью тензора напряжений Максвелла. В последнем случае удобно рассмотреть натяжения, приложенные либо к плоскости раздела диэлектриков, либо к поверхности малой сферы, окружающей заряд.

$$145. \quad F_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \cdot \frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2},$$

$$F_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \cdot \frac{q_2^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2}.$$

Неравенство сил, действующих на заряды q_1 и q_2 объясняется тем, что эти заряды сами по себе не образуют замкнутую механическую систему; имеются еще связанные заряды на границе раздела диэлектриков. Векторная сумма сил, приложенных к этой границе и к зарядам q_1 и q_2 , равна нулю, как и должно быть.

146. Если положить в металле $\varphi = 0$, то в диэлектрике $\varphi = q/\epsilon r_1 - q/\epsilon r^2$ (см. рис. 10: заряд q в точке A , заряд $-q$ в точке B ; $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \infty$). Член $-q/\epsilon r_2$, обусловленный наведенным зарядом проводника и связанными зарядами диэлектрика, имеет такой вид, как если бы он описывал поле точечного заряда $-q/\epsilon$, находящегося в точке с координатой $z = -a$. Заряд $-q/\epsilon$ называется изображением заряда q/ϵ относительно плоскости $z = 0$ (множитель $1/\epsilon$ учитывает влияние диэлектрика).

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi r^3}, \quad F = -\frac{q^2}{4a^2 \epsilon},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости $z = 0$.

147. Поле внутри двугранного угла создается системами зарядов, изображенными на рис. 57.

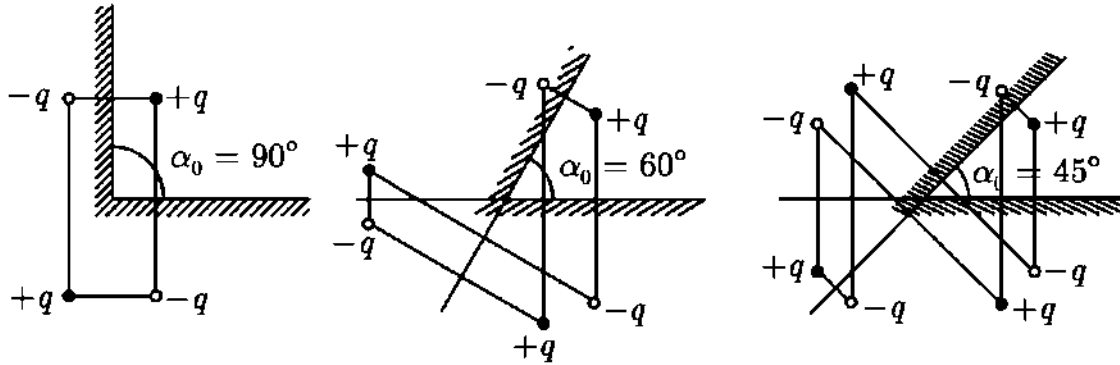


Рис. 57

148. Пусть диполь находится в точке $(0, 0, z)$. Если проекции дипольного момента \mathbf{p} на оси x, y, z равны $p \sin \alpha, 0, p \cos \alpha$, то проекции его изображения \mathbf{p}' на те же оси будут $-p \sin \alpha, 0, p \cos \alpha$.

$$U = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')r^2 - 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})}{2\epsilon r^5} = -\frac{p^2}{16z^2\epsilon}(1 + \cos^2 \alpha),^1$$

$$F = -\frac{3p^2}{16z^4\epsilon}(1 + \cos^2 \alpha), \quad N_\alpha = -\frac{p^2 \sin^2 \alpha}{16z^3\epsilon}.$$

При любой ориентации \mathbf{p} диполь притягивается к плоскости. Вращательный момент \mathbf{N} стремится установить диполь вдоль положительного или отрицательного направления оси z ($\alpha = 0, \pi$). Момент $N = 0$ также и при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, но это положение равновесия неустойчиво.

149. Введем полярные координаты, выбрав полюс в центре сферы и ось $z \parallel \mathbf{E}_0$. Потенциал можно искать в виде ряда по полиномам Лежандра

¹Множитель $\frac{1}{2}$ в выражении U возникает благодаря тому, что поле \mathbf{E}' дипольного момента \mathbf{p}' пропорционально \mathbf{p} . При увеличении \mathbf{p} на $d\mathbf{p}$ (и неизменной ориентации) энергия взаимодействия возрастает на $dU = -\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{p}$, откуда $U = \int_0^{\mathbf{p}} dU = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{p})$ (ср. с решением задачи 166).

(ср. с решением задачи 153). Окончательный результат:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \vartheta \quad \text{при } r < a,$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 a^3 \frac{\cos \vartheta}{r^2} \quad \text{при } r > a.$$

Внутри шара получается однородное электрическое поле, напряженность которого

$$E_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \begin{cases} > E_0 & \text{при } \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \\ < E_0 & \text{при } \varepsilon_2 < \varepsilon_1. \end{cases}$$

Вне шара на внешнее однородное поле E_0 накладывается поле электрического диполя, момент которого

$$p = E_0 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}.$$

Это вторичное поле вызвано связанными зарядами на поверхности диэлектрического шара:

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \vartheta, \quad \rho_{\text{св}} = 0.$$

Легко понять причину такого распределения зарядов, представив себе каждый малый элемент поляризованного диэлектрика в виде элементарного диполя.

150. Для диэлектрика с неизменной поляризацией $\mathbf{E} = \frac{4\pi\mathbf{P}}{3}$ (см. задачу 104).

Для обычного диэлектрика

$$\Delta\mathbf{E} = -\frac{12\pi\varepsilon}{(2\varepsilon + 1)(\varepsilon - 1)} \mathbf{P}.$$

151. $\varphi = -E_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (r \geq R),$

где $\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0$, R^3 — поляризуемость шара;

$$\sigma = \frac{3\varepsilon_0}{4\pi} E_0 \cos \vartheta.$$

152. Силу F , приложенную к заряду q , можно найти, помножив q_1 на напряженность поля, созданную вторым зарядом q_2 в полости, где находится q_1 . Так как полость мала, поле в ней будет однородным с напряженностью, равной

$$\frac{3\epsilon E_0}{2\epsilon + 1} = \frac{3q}{(2\epsilon + 1)a^2},$$

где $E_0 = \frac{q}{\epsilon a^2}$ — однородное поле в окрестности полости.

Отсюда

$$F = \frac{3q^2}{(2\epsilon + 1)a^2}.$$

Эта сила отличается от той, которая действовала бы между такими же зарядами в однородном жидком диэлектрике с тем же значением ϵ (см. задачу 140). Если бы мы аналогично задаче 140 попробовали найти силу, приложенную к плоскости симметрии, то получили бы при учете только максвелловых натя-

жений значение силы $F_1 = \frac{q^2}{\epsilon a^2}$, отличающееся как от силы F , приложенной к самому заряду, так и от полной электрической силы натяжений (не учтен стрикционный член, имеющий сложный вид в случае твердого тела). Такая же сила будет действовать на любую область диэлектрика, охватывающую полость с заключенным в ней зарядом. Часть этой силы $\frac{3q^2}{(2\epsilon + 1)a^2}$ приложена к точечному заряду q , другая часть $F' = x - \frac{(2\epsilon - 1)q^2}{(2\epsilon + 1)a^2\epsilon}$ — к связанным зарядам, наведенным на поверхности полости.

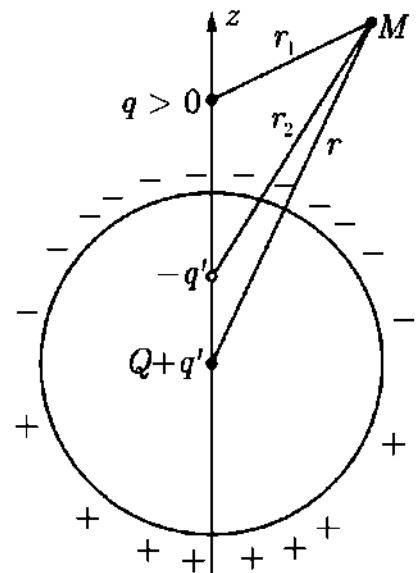


Рис. 58

153. Выберем полюс сферической системы координат в центре шара (рис. 58), полярную ось проведем через точечный заряд. Будем искать потенциал в форме

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{q}{\epsilon r_1} + \sum_{l,m} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\alpha}, \quad (1)$$

где r_1 — расстояние от q_1 до точки наблюдения. Ряд, входящий в (1), очевидно, описывает поле зарядов, индуцированных на шаре. Это поле должно

исчезать на бесконечности, поэтому $a_{lm} = 0$. Вследствие симметрии потенциал не зависит от угла α , поэтому члены с $m \neq 0$ также отсутствуют. Оставшиеся константы $b_l \equiv b_{l0}$ определим из граничных условий.

В случае а) потенциал шара $\varphi(R, \vartheta) = V = \text{const}$. Воспользуемся разложением для $\frac{q}{r_1}$ из задачи 96:

$$\varphi(R, \vartheta) = \sum \left(\frac{qR^l}{\varepsilon a^{l+1}} + \frac{b^l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \vartheta) = V.$$

Отсюда $b_l = -\frac{qR^{2l+1}}{\varepsilon a^{l+1}}$ при $l \neq 0$, $b_0 = VR - \frac{Rq}{\varepsilon a}$, так что потенциал вне шара

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{qR}{\varepsilon a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{a} \right)^l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}. \quad (2)$$

Теперь находим плотность зарядов, наведенных на поверхности шара:

$$\sigma(R, \vartheta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon V}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{R^{l+1}}{a^{l+1}} P_l(\cos \vartheta). \quad (3)$$

В случае б) потенциал V неизвестен и должен быть выражен через заряд Q шара. Очевидно,

$$Q = 2\pi \int \sigma(R, \vartheta) R^2 \sin \vartheta d\vartheta = \varepsilon V R - \frac{qR}{a},$$

откуда $V = \frac{Q}{\varepsilon R} + \frac{q}{\varepsilon a}$. Используя задачу 96, можно записать (2) в виде:

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q+q'}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2}, \quad (4)$$

где

$$q' = q \frac{R}{a}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r \cos \vartheta}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

Таким образом, потенциал точечного заряда и заряженного шара в области $r > a$ сводится к потенциалу четырех точечных зарядов, расположенных на оси симметрии: заряда q на расстоянии a от начала координат и трех его изображений — зарядов Q и $q' = q \frac{R}{a}$ в начале координат и заряда $-q'$ в гармонически сопряженной относительно поверхности шара точке $a' = \frac{R^2}{a}$.

Заряд $-q'$ описывает действие зарядов, индуцированных на ближайшей к q стороне поверхности шара. Знак этих зарядов, очевидно, противоположен знаку q . Заряд $+q'$ описывает действие зарядов одного с q знака, индуцированных на удаленной от q части шара.

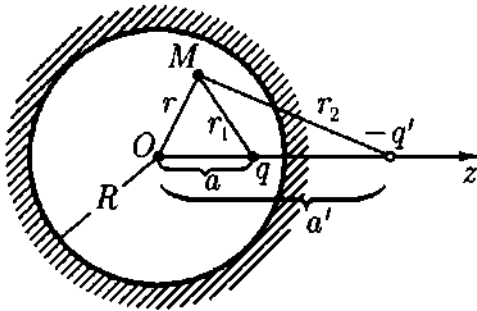


Рис. 59

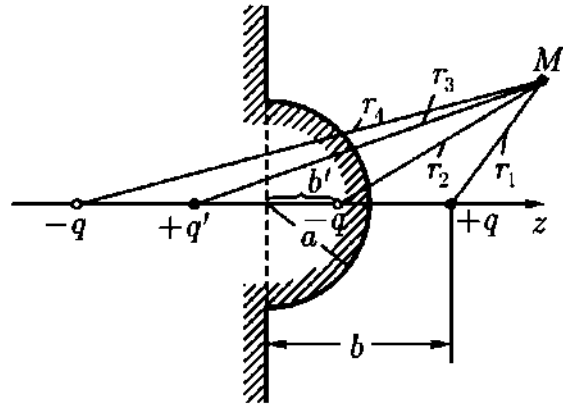


Рис. 60

Если шар нейтрален, то член с Q отсутствует. Если шар заземлен ($V = 0$), то потенциал принимает вид

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q'}{\epsilon r_2}. \quad (5)$$

154. $\varphi(M) = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q'}{\epsilon r_2} + V$ (рис. 59), где

$$q' = q \frac{R}{a}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

155. $\varphi(M) = \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4} V$ (рис. 60), где

$$q' = \frac{qa}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}.$$

Заряд на выступе равен

$$Q = -q \left[1 - \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \right].$$

156. $\varphi \equiv \varphi_1 = \frac{q}{\epsilon r_1}$ — вне шара, $\varphi \equiv \varphi_3 = \frac{q}{\epsilon_1 R_1}$ — в проводнике,

$\varphi \equiv \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_2 r_1} - \frac{q'}{\epsilon_2 r_2} + \frac{q}{\epsilon_1 R_1}$ — в полости (рис. 61), где

$$q' = \frac{qR_2}{a}, \quad a' = \frac{R_2^2}{a}.$$

$$157. \quad \varphi_1(r, \vartheta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \cdot \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\varphi_2(r, \vartheta) = \frac{q}{\varepsilon_2 r_1} + q \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \cdot \frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}} \cdot \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} \quad \text{при } r \geq R,$$

где r_1 — расстояние от q до точки наблюдения. Здесь потенциал не мо-

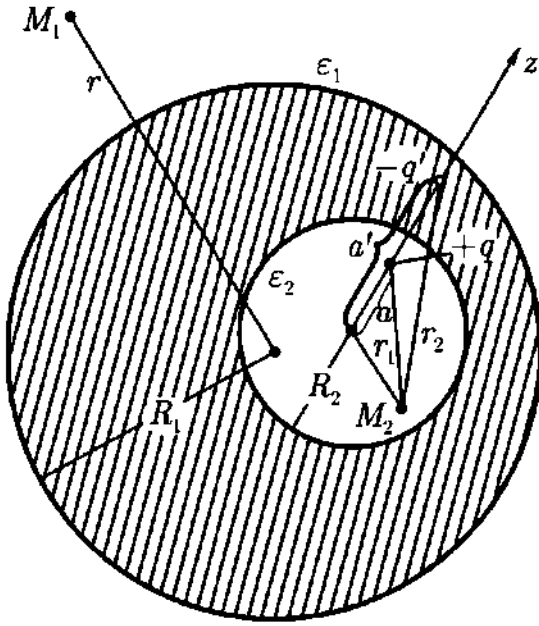


Рис. 61

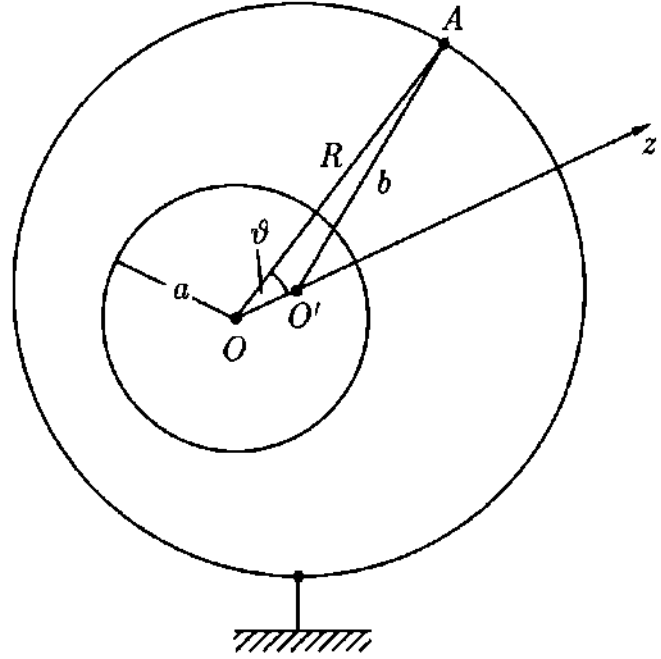


Рис. 62

жет быть представлен простой системой изображений, в отличие от случая проводящего шара. При $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ получим результат задачи 153.

158.

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{\varepsilon_1 l + \varepsilon_2 (l+1)} \cdot \frac{a^l r^l}{R^{2l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\varphi_2 = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\varepsilon_1 l + \varepsilon_2 (l+1)} \cdot \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad \text{при } r \geq R,$$

где r_1 — расстояние от точки наблюдения до заряда q .

При $a = 0$,

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \frac{q}{\varepsilon_2 R}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 r}.$$

159. Обозначим поверхности внутренней и внешней сфер соответственно через S_1 и S_2 и положим потенциал внешней сферы равным нулю. Удобно решать задачу в сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль линии, соединяющей центры сфер, и с началом координат в центре внутренней сферы (рис. 62). В этих координатах уравнение поверхности S_1 запишется в виде $r = a$. Чтобы получить уравнение поверхности S_2 , заметим, что из треугольника $OO'A$ следует:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2 - 2cR \cos \vartheta}}. \quad (1)$$

Из (1) с точностью до членов первого порядка по c находим уравнение поверхности S_2 :

$$R(\vartheta) = b + cP_1(\cos \vartheta), \quad (2)$$

где

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta.$$

Член $cP_1(\cos \vartheta) = c \cos \vartheta$ в (2) описывает отклонение от сферической симметрии, которое обращается в нуль при $c \rightarrow 0$. Естественно искать потенциал в виде разложения по сферическим гармоникам (см. приложение 2), ограничившись первыми двумя членами. При этом второй член, учитывающий отклонение от сферической симметрии, должен быть пропорционален c .

Итак, положим

$$\varphi(r, \vartheta) = \left(A_1 + \frac{B_1}{r} \right) + c \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \vartheta, \quad (3)$$

где A_i и B_i определяются из граничных условий:

$$\varphi|_{S_1} = \text{const}, \quad \varphi|_{S_2} = 0, \quad \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_1 = -4\pi q.$$

Окончательно:

$$\varphi = q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{qc}{b^3 - a^3} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \vartheta.$$

Отсюда плотность заряда на внутренней сфере:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} - \frac{3qc}{4\pi(b^3 - a^3)} \cos \vartheta;$$

сила, действующая на внутреннюю сферу:

$$F = -\frac{qc}{b^3 - a^3}.$$

$$160. \Delta C = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-a)^2 (b^3 - a^3)}.$$

161. При увеличении заряда q на dq энергия U его взаимодействия с шаром возрастет на $dU = \varphi' dq$, где φ' — потенциал индуцированных на шаре зарядов. Но этот потенциал сам пропорционален q : $\varphi' = \text{const} \cdot q$. Поэтому

$$U = \int_0^q dU = \frac{\text{const}}{2} q^2 = \frac{1}{2} \varphi' q. \quad (1)$$

Если бы величина φ' не зависела от q (потенциал внешнего поля), то энергия взаимодействия была бы вдвое больше ($U = \varphi' q$). Используя (1) и результаты задачи 153, получим

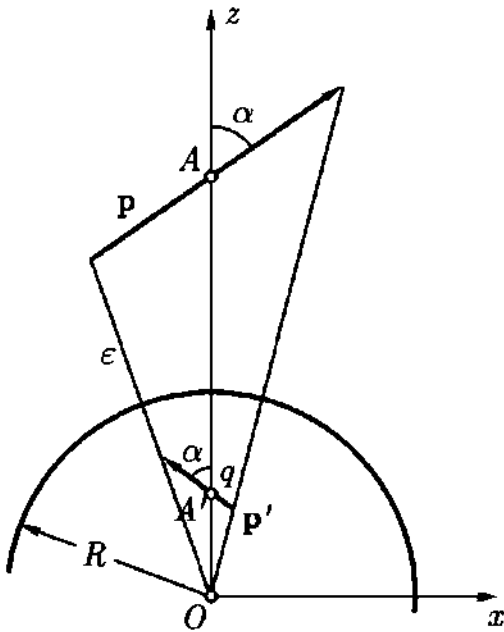


Рис. 63

$$U = -\frac{q^2 R}{2\epsilon(a^2 - R^2)},$$

$$F = -\frac{q^2 a R}{\epsilon(a^2 - R^2)^2}.$$

$$162. U = \frac{Qq}{\epsilon a} - \frac{q^2 R^3}{2a^2 \epsilon (a^2 - R^2)}; \quad F = \frac{Qq}{\epsilon a^2} - \frac{q^2 R^3 (2a^2 - R^2)}{\epsilon a^3 (a^2 - R^2)^2}.$$

В случае одноименных зарядов $Qq > 0$, и сила взаимодействия может обратиться в нуль, а при достаточно больших q или малых расстояниях a — даже стать отрицательной (притяжение).

163. Пробный заряд q должен быть мал по сравнению с зарядами, расположенными на других проводниках и диэлектриках, и не должен находиться слишком близко к местам неоднородности среды, например, к границам проводников и диэлектриков, чтобы обратное влияние зарядов, наводимых пробным телом, было мало. Например, при измерении электрического поля заряженного проводящего шара нужно, чтобы сила электрического

изображения была мала по сравнению с измеряемой силой $\frac{qQ}{a^2}$ (Q — заряд шара, a — расстояние от пробного заряда до центра шара). Это приводит к условию (см. ответ предыдущей задачи)

$$\left| \frac{Q}{q} \right| \gg 2 \frac{(2a/R - 1)^2}{(a/R)(a/R - 1)^2},$$

которое выполняется только при не слишком малых a/R и не слишком больших q/Q .

164. Изображением электрического диполя $\mathbf{p} = p(\mathbf{e}_x \sin \alpha + \mathbf{e}_z \cos \alpha)$ в заземленном шаре является система, состоящая из точечного заряда $q = \frac{pR}{r^2} \cos \alpha$ и диполя $\mathbf{p}' = p \left(\frac{R}{r} \right)^3 (-\mathbf{e}_x \sin \alpha + \mathbf{e}_z \cos \alpha)$, находящихся в точке A' (рис. 63) на расстоянии $r' = \frac{R^2}{r}$ от центра шара.

$$U = -\frac{p^2 R (r^2 \cos^2 \alpha + R^2)}{2\epsilon (r^2 - R^2)^3},$$

$$F = -\frac{p^2 R r}{\epsilon (r^2 - R^2)^4} [(2r^2 + R^2) \cos^2 \alpha + 3R^2],$$

$$N = -\frac{p^2 R r^2 \sin 2\alpha}{2\epsilon (r^2 - R^2)^3}.$$

В предельном случае $r \rightarrow R$ получим, полагая $r = R + z$, $R \rightarrow \infty$, $z = \text{const}$, результаты задачи 148 (диполь у проводящей плоскости).

$$\mathbf{165.} \quad \sigma = -\frac{3p}{4\pi R^3} \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между \mathbf{p} и направлением из центра в точку наблюдения.

Индукцированные заряды создают в полости однородное поле $E = \frac{p}{R^3}$.

166. Силы, действующие на неоднородность, могут быть получены дифференцированием величины

$$U' = \sum_{l,m} a_{lm} Q_{lm}^* \quad (1)$$

при постоянных Q_{lm}^* .

Величина U' отличается от истинной энергии взаимодействия области неоднородности с внешним полем U , определяемой работой, которую надо совершить, чтобы при наличии неоднородности создать поле φ (ср. с (III.16)). При нахождении такой энергии нужно учитывать, что моменты Q_{lm} зависят от внешнего поля. В частности, если область неоднородности представляет собой незаряженный проводник или диэлектрик, то истинная энергия взаимодействия неоднородности с внешним полем определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{lm} Q_{lm}^*. \quad (2)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ можно получить так же, как это сделано в решении задачи 161, учитывая, что в этом случае Q_{lm} пропорциональны a_{lm} . При нахождении обобщенных сил с помощью выражения (2) путем дифференцирования по обобщенным координатам как Q_{lm} , так и a_{lm} следует считать переменными величинами.

167. $U_0 = q\varphi_0 - \mathbf{p}\mathbf{E}_0$,
при этом

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\epsilon r^3}, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$$

(вращательный момент вычисляется относительно начала координат).

169. Тело стремится занять такое положение, при котором его потенциальная энергия $U = -\frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ — минимальна. Удобно направить координатные оси вдоль главных осей тензора β_{ik} , тогда $U = -\frac{1}{2}(\beta^{(x)}E_x^2 + \beta^{(y)}E_y^2 + \beta^{(z)}E_z^2)$. Отсюда видно, что если $\beta^{(x)} \geq \beta^{(y)} \geq \beta^{(z)} > 0$, то минимум U имеет место, когда $\mathbf{E} \parallel x$; если же $\beta^{(x)} \leq \beta^{(y)} \leq \beta^{(z)} < 0$, то минимум получается при $\mathbf{E} \parallel z$.

170. Ось стержня и плоскость диска стремятся установиться при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ параллельно направлению поля, а при $\epsilon_1 < \epsilon_2$ — перпендикулярно.

171. $F = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l\epsilon_1 + (l+1)\epsilon_2} \cdot \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$. При $\epsilon_2 < \epsilon_1$ происходит притяжение, при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ — отталкивание. В случае проводящего шара $\epsilon_1 \rightarrow \infty$. Суммируя геометрическую прогрессию, найдем энергию

взаимодействия $U = -\frac{q^2 R}{2\epsilon_2(R^2 - a^2)}$, откуда

$$F = -\frac{q^2 a R}{2\epsilon_2(a^2 - R^2)^2}$$

(ср. с задачей 161).

Сделаем некоторые замечания к вычислению силы с помощью формулы (III.16). Рассмотрим величину $U' = \frac{1}{8\pi} \int_{V'} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_1 dV'$. Объем V' ограничен сферой S , бесконечно близкой к поверхности диэлектрического шара и находящейся целиком внутри него. Интеграл, входящий в выражение U' , лишь на бесконечно малую величину отличается от потенциальной энергии U взаимодействия точечного заряда с шаром. Введем вместо напряженностей суммарного поля \mathbf{E} и поля точечного заряда \mathbf{E}_1 в однородном диэлектрике ϵ_2 соответствующие потенциалы и вынесем постоянную величину $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ за знак интеграла. Тогда $U' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \int_{V'} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1 dV'$.

Применив формулу Грина $\int \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1 dV = \oint_S \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS + \int \varphi \Delta\varphi_1 dV$, и воспользовавшись тем, что внутри шара $\Delta\varphi_1 = 0$, найдем для U следующее выражение:

$$U = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\epsilon_1 + (l+1)\epsilon_2} \cdot \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}.$$

Оно совпадает с выражением, получающимся из формулы (2) задачи 166. Отсюда для F получим приведенное выше значение.

$$172. C_{вз} = \frac{\kappa}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arccch} \frac{a^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \right]^{-1}.$$

$$173. \sigma = \pm \frac{|E|}{4\pi} = \pm \frac{4b^2 \kappa^2}{\pi [(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2]}, \text{ где } b = \frac{2R^4}{a^2 \sqrt{a^2 - 4R^2}}.$$

Начало координат находится в центре отрезка, соединяющего оси цилиндров и выбранного за ось x .

$$174. C = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arccch} \frac{R_1^2 + R_2^2 - a^2}{2R_1 R_2} \right]^{-1}.$$

175. Если оси x, y, z параллельны главным осям тензора ε_{ik} , то

$$\varphi(x, y, z) = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z)}} \left[\frac{x^2}{\varepsilon(x)} + \frac{y^2}{\varepsilon(y)} + \frac{z^2}{\varepsilon(z)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

При произвольной ориентации координатной системы формула (1) запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon_{ik}| \varepsilon_{ik}^{-1} x_i x_k}},$$

где $|\varepsilon_{ik}|$ — определитель тензора ε_{ik} .

$$176. \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}) n_i E_{0k}}{\varepsilon_{lm} n_l n_m} \mathbf{n}.$$

$$177. \quad C = \frac{S \varepsilon^{(z)}}{4\pi a},$$

где z — координата, нормальная к пластинам конденсатора.

178. Если выбрать оси x, z в плоскости \mathbf{E}_0 , \mathbf{n} , $z \parallel \mathbf{n}$, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\varepsilon_{zz} \operatorname{tg} \vartheta_0}{1 - \varepsilon_{zx} \operatorname{tg} \vartheta_0},$$

где $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{E_{0x}}{E_{0z}}$. При этом силовая линия в диэлектрике остается в плоскости \mathbf{E}_0 , \mathbf{n} .

§ 2. Потенциальные и емкостные коэффициенты

180. Обозначим через q_1 заряд первого проводника и через q' заряд на внешней поверхности второго проводника (заряд на внутренней поверхности второго проводника равен $-q_1$, как это следует из электростатической теоремы Гаусса). Система (III.28) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2, \\ -q_1 + q' &= c_{12} V_1 + c_{22} V_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Сложив эти уравнения, получим

$$q' = (c_{11} + c_{12}) V_1 + (c_{12} + c_{22}) V_2. \quad (2)$$

Заданием q' определяется поле во всем внешнем пространстве, в частности, потенциал V_2 второго проводника. Равенство (2) должно, таким образом, иметь место при любых значениях V_1 и фиксированных q' , V_2 , что может быть, только если

$$c_{11} + c_{12} = 0. \quad (3)$$

При этом первое из уравнений (1) принимает вид:

$$q_1 = c_{11}(V_1 - V_2). \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$C = c_{11} = -c_{12} = -c_{21},$$

$$C' = c_{12} + c_{22}.$$

$$181. \quad s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{12} = s_{21} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.$$

$$182. \quad S_{11} = \frac{1}{C_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{C_2}, \quad S_{12} = S_{21} = \frac{1}{\epsilon r}.$$

$$183. \quad C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}.$$

$$184. \quad q_1 = \frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{13}}{s_{11} - s_{12}} \cdot \frac{q}{8}, \quad q_2 = \frac{q}{2}, \quad q_3 = \frac{q}{4}, \quad q_4 = \frac{s_{11} - s_{13}}{s_{11} - s_{12}} \cdot \frac{q}{8}.$$

$$185. \quad q_1 = -\frac{2a}{b}q, \quad q_2 = -\frac{a}{b}q, \quad q_3 = \frac{3a^2}{b^2}q.$$

$$186. \quad F = \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_V = \frac{C_1 C_2}{\epsilon r^2} \left(V_1 V_2 - \frac{C_1 V_1^2}{\epsilon r} - \frac{C_2 V_2^2}{\epsilon r} \right), \text{ либо}$$

$$F = - \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_q = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}.$$

$$187. \quad q_1 = q \frac{V_0 - V_P}{V_1 - V_0}, \quad q_0 = q \frac{V_1 - V_P}{V_0 - V_1}.$$

189. Собственная емкость объединенного проводника:

$$c_{00} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12}.$$

Взаимная емкость объединенного проводника и i -го проводника системы:

$$c_{0i} = c_{1i} + c_{2i}.$$

190. Энергия уменьшается на величину

$$\Delta W = \frac{(q - q')^2}{4} \cdot \frac{r - b}{rb}.$$

191. С точностью до $1/r$,

$$F = -\frac{bC^2q^2}{r^3[C + ab(b-a)^{-1}]^2}.$$

192. Шарик и проводник приобретают при соприкосновении один и тот же потенциал

$$V_1 = qs_{11} + (Q - q)s_{12} = qs_{12} + (Q - q)s_{22} = V_2,$$

откуда

$$\frac{s_{11} - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{Q}{q} - 1, \quad (1)$$

где s_{ik} — потенциальные коэффициенты (индексы 1 и 2 относятся соответственно к шарiku и к проводнику).

Обозначим через q_k заряд проводника после k -го подсоединения. Из равенства потенциалов проводника и шарика при соприкосновении следует:

$$q_k s_{11} + (Q + q_{k-1} - q_k)s_{12} = q_k s_{12} + (Q - q + q_{k-1})s_{22}.$$

Отсюда, используя (1), получим рекуррентное соотношение, связывающее q_{k-1} и q_k :

$$q_k = q + \frac{q}{Q} q_{k-1}. \quad (2)$$

Последовательное применение формулы (2) с переходом в дальнейшем к пределу $k \rightarrow \infty$ дает окончательно:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = q \left[1 + \frac{q}{Q} + \left(\frac{q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{q}{Q}\right)^3 + \dots \right] = \frac{qQ}{Q - q}.$$

§ 3. Специальные методы электростатики

193. Уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0, \quad R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)}.$$

Это уравнение должно быть проинтегрировано с граничными условиями $\varphi = \text{const}$ при $\xi = 0$ (на поверхности эллипсоида), $\varphi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Выполняя интегрирование и воспользовавшись для определения постоянной интегрирования тем, что при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow r^2$, получим:

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{2\varepsilon} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}.$$

Отсюда

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Плотности зарядов на концах полуосей прямо пропорциональны длинам полуосей: $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$.

194. При $a = b > c$ (сплюснутый эллипсоид):

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos \frac{c}{a}}.$$

В частности, при $c = 0$ (диск) $C = \frac{2a}{\pi}$.

При $a > b = c$ (вытянутый эллипсоид):

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}.$$

В частности, при $b \ll a$ (стержень):

$$C = \frac{q}{\ln \frac{2a}{b}}.$$

195. Будем сначала считать эллипсоид незаряженным: $q = 0$. Если внешнее однородное поле \mathbf{E}_0 параллельно оси Ox , то

$$\varphi_0 = -E_0 x = \mp E_0 \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\xi + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}.$$

Знак минус соответствует $x > 0$, знак плюс $x < 0$. Как функция φ_0 , так и потенциал φ' поля наведенных на эллипсоиде зарядов удовлетворяют уравнению Лапласа, Подставляя $\varphi' = \varphi_0 F(\xi)$ уравнение Лапласа, получим уравнение для определения неизвестной функции $F(\xi)$:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \ln[R_\xi(\xi + a^2)] = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется. Решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\varphi|_{q=0} = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_\xi}}{\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_\xi}} \right\}.$$

Если эллипсоид имеет собственный заряд q , то решение, удовлетворяющее условиям $\varphi|_{\xi=0} = \text{const}$ и $-\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 4\pi q$ (S — замкнутая поверхность, содержащая внутри себя эллипсоид), можно получить по принципу суперпозиции (см. задачу 193):

$$\varphi|_q = \varphi_{q=0} + \frac{1}{2}q \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

196. Потенциал имеет тот же вид, что и в предыдущей задаче. Входящие в выражение потенциала интегралы могут быть выражены через элементарные функции — это имеет место во всех случаях, когда эллипсоид обладает симметрией вращения. В итоге получим:

$$\varphi = -E_0 x \left[1 - \frac{\ln \frac{\sqrt{1 + \xi/a^2} + e}{\sqrt{1 + \xi/a^2} - e} - \frac{2e}{\sqrt{1 + \xi/a^2}}}{\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e} \right],$$

где a — большая и b — малая полуось, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет эллипсоида, ось x направлена перпендикулярно плоскости,

$$x = \frac{a}{e} \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{a^2}\right)}$$

(см. задачу 66). Напряженность поля достигает максимального значения в вершине эллипсоида:

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = -\frac{1}{E_0 h \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi, 0, \zeta = -b^2} = \frac{2e^3(1 - e^2)^{-1}}{\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e} = \frac{1}{n^{(x)}},$$

где $n^{(x)}$ — коэффициенты деполяризации (см. задачу 198). В случае сферы $e = 0$ и $\frac{E_{\max}}{E_0} = 3$. В случае очень вытянутого стержня (громоотвод):

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = \frac{a^2}{b^2} \left(\ln \frac{2a}{b} - 1 \right)^{-1}, \quad a \gg b,$$

поэтому искровой пробой воздуха значительно более вероятен у конца такого громоотвода, чем на других его участках.

197. Поле на произвольных расстояниях от эллипсоида получается как суперпозиция трех полей вида, установленного в задаче 195 (поле E_0 разлагаем на составляющие, параллельные главным осям эллипсоида).

На больших расстояниях от эллипсоида:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad p_x = \beta^{(x)} E_x, \quad p_y = \beta^{(y)} E_y, \quad p_z = \beta^{(z)} E_z.$$

Главные значения тензора поляризуемости эллипсоида:

$$\beta^{(x)} = \frac{abc}{3n^{(x)}}, \quad \beta^{(y)} = \frac{abc}{3n^{(y)}}, \quad \beta^{(z)} = \frac{abc}{3n^{(z)}}.$$

$$\mathbf{198.} \quad n^{(x)} = \frac{1 - e^2}{2e^2} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) \leq \frac{1}{3},$$

$$n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1 - n^{(x)}}{2},$$

где $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет эллипсоида.

В случае $e \rightarrow 1$ (стержень):

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}.$$

В случае $e \ll 1$ (форма, близкая к шару):

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2.$$

$$199. \quad n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e) \geq \frac{1}{3},$$

$$n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1-n^{(z)}}{2}, \quad e = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}.$$

В частном случае диска:

$$n^{(z)} = 1, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 0.$$

$$200. \quad \varphi = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z.$$

Внутри эллипсоида:

$$\varphi_x = \varphi_{1x} = \frac{-E_0x}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(x)}\right)}.$$

Вне эллипсоида:

$$\varphi_x = \varphi_{2x} = -E_0x \left\{ 1 - \frac{abc(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}}}{2[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)n^{(x)}]} \right\},$$

где

$$n^{(x)} = \frac{1}{2}abc \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)R_{\xi}};$$

φ_y и φ_z определяются аналогичными выражениями, в которых x нужно заменить соответственно на y и z , a на b и c . Внутри эллипсоида однородное поле:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_{0x}\mathbf{e}_x}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(x)}} + \frac{E_{0y}\mathbf{e}_y}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(y)}} + \frac{E_{0z}\mathbf{e}_z}{1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} n^{(z)}}.$$

На больших расстояниях от эллипсоида:

$$\varphi_2 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

где $p_x = \beta^{(x)} E_x$, $\beta^{(x)} = \frac{abc}{3\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + n^{(x)}\right)}$

и т. д.

201. Воспользовавшись формулой (III.16), получим:

$$U = \frac{abc(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0^2 \{2[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)n] \sin^2 \vartheta + [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)n] \cos^2 \vartheta\}}{6[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)][\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)n]},$$

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{abc(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 E_0^2 (3n - 1) \sin 2\vartheta}{6[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)][\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)n]},$$

где ϑ — угол между осью симметрии и полем \mathbf{E}_0 , n — коэффициент деполяризации относительно оси симметрии эллипсоида (см., например, решение предыдущей задачи).

Из последней формулы видно, что внешнее поле стремится повернуть ось симметрии вытянутого ($n < 1/3$) и сплюснутого ($n > 1/3$) эллипсоида в положение, параллельное и перпендикулярное полю соответственно.

В случае проводящего эллипсоида, $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ и

$$N = \frac{abc(3n - 1)E_0^2 \sin 2\vartheta}{6n(1 - n)}.$$

202. Потенциальную энергию жидкой заряженной капли, имеющей форму эллипсоида вращения с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ и объемом, равным объему сферы с радиусом R (заряд q), можно выразить формулой

$$U(e) = \frac{q^2}{2C} + \alpha S = \frac{q^2 \sqrt[3]{1 - e^2}}{4Re} \ln \frac{1 + e}{1 - e} + 2\pi R^2 \alpha \left(\sqrt[3]{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e \sqrt[3]{1 - e^2}} \right) \quad (1)$$

(воспользоваться выражением для емкости C вытянутого эллипсоида вращения, приведенным в ответе к задаче (194)).

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости заряженной сферической капли, надо выяснить характер зависимости энергии (1) от e при малых e .

Разложим U в ряд с точностью до e^4 :

$$U(e) = \frac{q^2}{2R} + 4\pi R^2 \alpha + \frac{e^4}{45} \left(8\pi R^2 \alpha - \frac{q^2}{2R} \right).$$

Из последней формулы видно, что если заряд капли $q < q_{кр} = \sqrt{16\pi R^3 \alpha}$, то при малых деформациях капля стремится вернуться в сферическое состояние — капля устойчива. При $q > q_{кр}$, поскольку возникшая деформация продолжает увеличиваться — капля неустойчива. Процесс кончается расщеплением неустойчивой капли на две или большее количество¹ более мелких устойчивых капель. То, что в конце концов получаются устойчивые капли, видно из выражения q_k . С уменьшением размеров капли критический заряд q_k уменьшается пропорционально корню квадратному из ее объема, в то время как заряд капли q уменьшается в среднем пропорционально объему; поэтому при достаточно малых размерах капли условия устойчивости начинают выполняться.

$$203. \quad \varphi = -\frac{E_0 z}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right) = -\frac{E_0}{\pi} \sqrt{-\eta} \left(\frac{\sqrt{\xi}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1 \right),$$

где $\sqrt{\xi}$ нужно брать со знаком плюс при $z > 0$ и со знаком минус при $z < 0$. На больших расстояниях за отверстием $\xi \approx r^2$ и поле приобретает вид

$$\varphi \approx \frac{E_0 a^3 z}{3\pi r^3} \quad \text{при } z > 0.$$

Такой характер имеет поле электрического диполя, ось которого совпадает с осью z , а момент $p = \frac{E_0 a^3}{3\pi}$. Отсюда видно, что силовые линии, проходящие через отверстие, замыкаются на обратной стороне металлического экрана.

204.

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2} \left(\pi - \arcsin \frac{a}{r_1} + \frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}} \right) \quad \text{при } z = -0,$$

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2} \left(\frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}} - \arcsin \frac{a}{r_1} \right) \quad \text{при } z = +0,$$

где $r_1 = \sqrt{\xi + a^2}$ — расстояние от центра отверстия до точки наблюдения на плоскости.

¹ Легко непосредственно проверить, что, например, при расщеплении заряженной капли на две равные сферические капли энергия уменьшается в $2^{\frac{2}{3}}$ раза.

205. Нужно решить уравнение $\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; δ -функция должна быть при этом записана в цилиндрических координатах:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\alpha - \gamma) \delta(z).$$

Компонента Фурье

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r, \alpha, z) \cos kz \, dk \quad (1)$$

потенциала $\varphi(r, \alpha, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \alpha^2} - k^2 \varphi_k = -\frac{4q}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\alpha - \gamma) \quad (2)$$

и граничным условиям (см. рис. 11):

$$\varphi_k(r, 0) = \varphi_k(r, \beta) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi_k(\infty, \alpha) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим соответствующее (2) однородное уравнение. Частными его решениями, удовлетворяющими (3), являются произведения $R_n(r) \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), где величина $R_n(r)$ равна с точностью до постоянного множителя либо $I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr)$, либо $K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr)$. Будем искать решение неоднородного уравнения (2) в виде суперпозиции таких частных решений:

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r < a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (5)$$

При написании (5) мы учли, что потенциал φ_k должен удовлетворять (4) и быть ограниченным при $r = 0$ (см. приложение 3).

Для определения постоянных A_n и B_n воспользуемся, во-первых, непрерывностью потенциала при $r = r_0$. Это даст

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0)}{K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0)}. \quad (6)$$

Во-вторых, потребуем, чтобы потенциал (5) удовлетворял уравнению (2). Подставив (5) в (2), помножим обе части получившегося равенства на $\sin \frac{n\pi\alpha}{\beta}$ ($m = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем по α от 0 до β . Учитывая ортогональность функций $\sin \frac{n\pi\alpha}{\beta}$ в указанном промежутке, получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_m}{dr} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2\pi^2}{\beta^2 r^2} \right) R_m = -\frac{8q}{\beta r_0} \delta(r - r_0) \sin \frac{m\pi\gamma}{\beta}, \quad (7)$$

где

$$R_m(r) = \begin{cases} A_m I_{\frac{m\pi}{\beta}}(kr) & \text{при } r < a, \\ B_m K_{\frac{m\pi}{\beta}}(kr) & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Функция $R_m(r)$ непрерывна при $r = r_0$, но ее первая производная по r испытывает при этом скачок

$$b \equiv R'_m(r_0 + 0) - R'_m(r_0 - 0) = kB_m K'_{\frac{m\pi}{\beta}}(kr_0) - kA_m I'_{\frac{m\pi}{\beta}}(kr_0).$$

Поэтому вторая производная $R_m(r)$ будет равна $R''_m(r) = b\delta(r - r_0)$.

Подставляя это выражение в (7) и отбрасывая члены, ограниченные при $r = r_0$, получим второе уравнение для определения A_n, B_n :

$$kB_n K'_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) - kA_n I'_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) = -\frac{8q}{\beta r_0} \sin \frac{n\pi\gamma}{\beta}. \quad (8)$$

При упрощении выражений для A_n и B_n полезно воспользоваться формулой

$$K_\nu(x) I'_\nu(x) - K'_\nu(x) I_\nu(x) = \frac{1}{x}.$$

207.

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{2q}{\pi} \left(\frac{1}{R_0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}} - \frac{1}{R'_0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} + \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} - \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}}} \right),$$

где

$$R_0 = \sqrt{r_0^2 + r^2 + z^2 - 2rr_0 \cos(\gamma - \alpha)} = \sqrt{2rr_0} \cdot \sqrt{\operatorname{ch} \eta - \cos(\gamma - \alpha)},$$

$$R'_0 = \sqrt{r_0^2 + r^2 + z^2 - 2rr_0 \cos(\gamma + \alpha)} = \sqrt{2rr_0} \cdot \sqrt{\operatorname{ch} \eta - \cos(\gamma + \alpha)}.$$

$$208. \quad \sigma = \operatorname{const} \cdot r^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)},$$

где r — расстояние до ребра клина. В частном случае клина, находящегося в поле точечного заряда (см. задачу 205),

$$\operatorname{const} = - \frac{q\sqrt{\pi r_0}^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{\pi\gamma}{\beta}}{\beta^2(r_0^2 + z^2)^{\frac{\pi}{\beta} + \frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\pi}{\beta} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\pi}{\beta} + 1\right)}.$$

Отсюда видно, что $\sigma \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $\beta < \pi$; $\sigma \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и $\beta > \pi$. В частном случае, когда заряд находится у края плоскости,

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

209. Поместим заряд q в начале координат, а ось z направим перпендикулярно поверхности пластинки. Тогда уравнения передней и задней поверхностей ее примут вид $z = a$ и $z = a + c$ соответственно. Будем искать потенциал в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= q \int_0^\infty J_0(kr_1) e^{-k|z|} dk + \int_0^\infty A_1(k) J_0(kr_1) e^{kz} dk \quad (-\infty < z < a), \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty B_1(k) J_0(kr_1) e^{-kz} dk + \int_0^\infty B_2(k) J_0(kr_1) e^{kz} dk \quad (a < z < b), \\ \varphi_3 &= \int_0^\infty A_2(k) J_0(kr_1) e^{-kz} dk \quad (b < z < \infty, \text{ где } b = a + c). \end{aligned} \right\} (1)$$

Граничные условия на поверхностях пластинки дадут систему четырех алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

Решая эту систему, получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= q\beta \frac{e^{-2kb} - e^{-2ka}}{1 - \beta^2 e^{-2kc}}, & A_2 &= q \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 e^{-2kc}}, \\ B_1 &= \frac{q(1 - \beta)}{1 - \beta^2 e^{-2kc}}, & B_2 &= \frac{q\beta(1 - \beta)e^{-2kb}}{1 - \beta^2 e^{-2kc}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$, $b = a + c$.

Формулы (2) совместно с (1) дают решение нашей задачи. На больших расстояниях за пластинкой ($z > 0$) поле принимает вид:

$$\varphi(r_1, z) \approx \frac{q}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} + \frac{pz}{(r_1^2 + z^2)^{3/2}},$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $p = -\frac{(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon}cq$.

$$210. \quad \varphi(M) = \frac{2q}{\varepsilon + 1} \int_0^\infty \frac{\text{sh } k(a - |z|)}{\text{ch } ka} J_0(kr_1) dk,$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 64).

При $\sqrt{z^2 + r_1^2} \rightarrow 0$ (вблизи заряда)

$$\varphi \rightarrow \frac{2q}{(\varepsilon + 1)\sqrt{r_1^2 + z^2}}$$

(ср. с задачей 129).

Потенциал φ можно представить в виде

$$\varphi = \frac{2q}{\varepsilon + 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{r_1^2 + (z - 2an)^2}}.$$

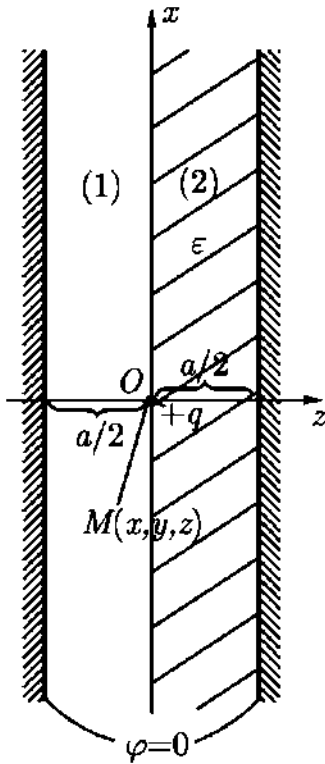


Рис. 64

Соответствующая система изображений приведена на рис. 66б.

211. Можно ввести бисферические координаты так, чтобы поверхности внутренней и внешней обкладок были координатными поверхностями $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ соответственно. Для этого нужно провести ось z через центры обкладок так, как это показано на рис. 65. Координаты центров обкладок будут при этом равны $z_1 = a \text{cth } \xi_1$, $z_2 = a \text{cth } \xi_2$ (a — параметр бисферических координат). Радиусы обкладок связаны с величинами a , ξ_1 , ξ_2

уравнениями $a = a_1 \operatorname{sh} \xi_1$, $a = a_2 \operatorname{sh} \xi_2$, $b = z_2 - z_1 = a(\operatorname{cth} \xi_2 - \operatorname{cth} \xi_1)$, откуда

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - b^2}{2a_1b}, \quad \operatorname{ch} \xi_2 = \frac{a_2^2 + b^2 - a_1^2}{2a_2b}. \quad (1)$$

Функция ψ в пространстве между обкладками конденсатора удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4} \psi = 0. \quad (2)$$

Производя в уравнении (2) разделение переменных и учитывая, что в нашем случае ψ не зависит от азимутального угла α , найдем частные решения этого уравнения, ограниченные при $\eta = 0, \pi$:

$$\psi_l(\xi, \eta) = \left[A_l \operatorname{ch} \left(l + \frac{1}{2} \right) \xi + B_l \operatorname{sh} \left(l + \frac{1}{2} \right) \xi \right] P_l(\cos \eta),$$

где $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

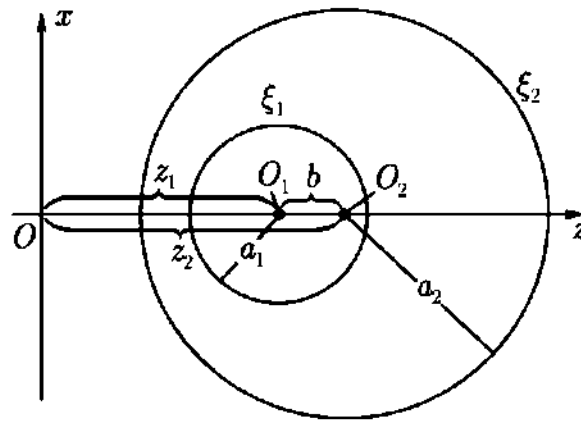


Рис. 65

Будем искать ψ в виде ряда $\psi(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(\xi, \eta)$. Коэффициенты A_l и B_l определяются из граничных условий $\psi(\xi_2, \eta) = 0$,

$$\psi(\xi_1, \eta) = V(2 \operatorname{ch} \xi_1 - 2 \cos \eta)^{-\frac{1}{2}} = V \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} P_l(\cos \eta).$$

Окончательно получим:

$$\varphi(\xi, \eta) = V \sqrt{2 \operatorname{ch} \xi - 2 \cos \eta} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} \operatorname{sh}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi-\xi_2)}{\operatorname{sh}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1-\xi_2)} P_l(\cos \eta). \quad (4)$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{q_1}{V} = \frac{1}{4\pi V} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{h_{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} h_{\eta} h_{\alpha} \Big|_{\xi=\xi_1} d\eta d\alpha.$$

Знак «+» в последней формуле объясняется тем, что вдоль внешней нормали к внутренней обкладке координата ξ убывает. Подставляя сюда (4) и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим:

$$C = \frac{a_1}{2} + a_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(2l+1)\xi_1} \operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1-\xi_2).$$

$$212. \quad C = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} + \frac{a_1^2 a_2^2 b^2}{(a_2 - a_1)^2 (a_2^3 - a_1^3)}.$$

213.

$$c_{11} = \frac{a_1}{2} + a_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_1} \operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2),$$

$$c_{22} = \frac{a_2}{2} + a_2 \operatorname{sh} \xi_2 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+\frac{1}{2})\xi_2} \operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2),$$

$$c_{12} = -a_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-(l+\frac{1}{2})(\xi_1+\xi_2)}}{\operatorname{sh}\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)},$$

$$\text{где } \cosh \xi_1 = \frac{b^2 + a_1^2 - a_2^2}{2ba_1}, \quad \cosh \xi_2 = \frac{b^2 - a_1^2 + a_2^2}{2ba_2}.$$

Поверхности первого и второго проводников описываются уравнениями $\xi = -\xi_1$ и $\xi = \xi_2$ соответственно, причем $a_1 \operatorname{sh} \xi_1 = a_2 \operatorname{sh} \xi_2$.

214.

$$c_{11} = a_1(1 + mn + mn^3 + m^2n^2),$$

$$c_{12} = -a_1n(1 + mn),$$

$$c_{22} = a_2(1 + mn + m^3n + m^2n^2),$$

где $m = \frac{a_1}{b}$, $n = \frac{a_2}{b}$.

215. Пусть потенциал сфер равен нулю, потенциал на бесконечности равен $-V$. Произведем инверсию системы в сфере радиуса $R = 2a$, центр которой находится в точке касания проводящих сфер (рис. 66а, сфера инверсии изображена пунктиром). После инверсии система примет вид плоского конденсатора (рис. 66б, сфера инверсии изображена пунктиром)

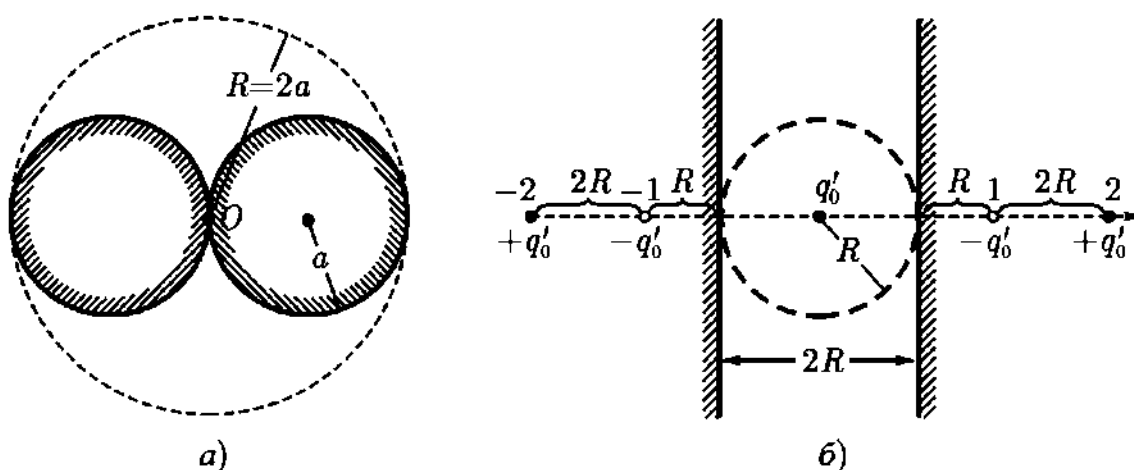


Рис. 66

с расстоянием $2R$ между заземленными обкладками. Внутренности сфер соответствует при этом внешняя область конденсатора. В центр инверсии в конденсаторе попадает бесконечно удаленная точка первоначальной системы с потенциалом V . Этому соответствует точечный заряд $q'_0 = -RV$ в центре инверсии. Поле в инвертированной системе может быть, согласно задаче 210 ($\epsilon = 1$), получено как поле следующей бесконечной системы изображений: точечные заряды $(-1)^n q'_0$ находятся в точках $z'_n = 2Rn$ оси z' , проходящей через центр инверсии перпендикулярно к обкладкам конденсатора. Поскольку мы интересуемся емкостью, нужно найти полный заряд первоначальной системы:

$$q = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q'_n R}{z'_n} = q'_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -q'_0 \ln 2 = RV \ln 2.$$

При выполнении суммирования мы воспользовались известным разложением в ряд $\ln 2$ (см. справочник [90], 0.232). Отсюда емкость

$$C = \frac{q}{V} = 2a \ln 2.$$

Для определения потенциала с помощью формул (III.32), (III.33) запишем \mathbf{r} и \mathbf{r}' в цилиндрических координатах (ось z совпадает с осью симметрии

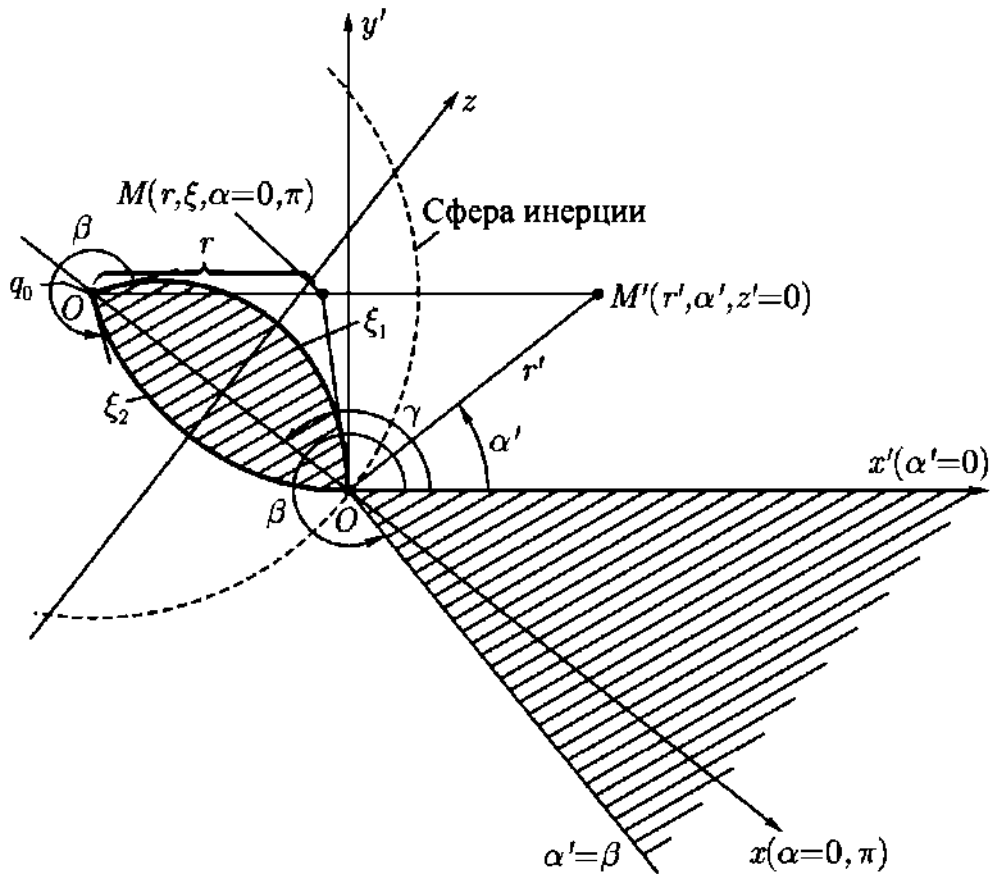


Рис. 67

системы, начало координат в точке касания сфер). Тогда $z' = \frac{R^2 z}{r^2}$, $r'_1 = \frac{R^2 r_1}{r^2}$, $r^2 = r_1^2 + z^2$ и для потенциала получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{C} - \frac{R^2 q}{Cr} \int_0^\infty \frac{\text{sh } k \left(R - \frac{R^2 |z|}{r^2} \right)}{\text{ch } kR} J_0 \left(\frac{kR^2 r_1}{r^2} \right) dk.$$

Член $\frac{q}{C}$ добавлен для того, чтобы $\varphi(\mathbf{r})$ обращался в нуль при $r \rightarrow \infty$.

217. Угол β , под которым пересекаются сферические поверхности (будем отсчитывать его вне проводника) выражается формулами:

$$\beta = \begin{cases} 2\pi - |\xi_2 - \xi_1|, & \text{если } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ одного знака,} \\ 2\pi - |\xi_1 + \xi_2|, & \text{если } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Выбрав центр инверсии O на линии пересечения сфер, положив радиус инверсии равным $2a$ и производя инверсию, получим клин с двугранным углом β и ребром (ось z'), перпендикулярным плоскости симметрии ($\alpha = 0, \pi$) рассматриваемого проводника. На рис. 67 изображен случай $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$. При инверсии в точке O появится заряд $q'_0 = -2aV$. Как легко может быть показано, угол $\gamma = \xi_1$, если отсчитывать γ от той грани клина, в которую переходит сферическая поверхность $\xi = \xi_1$. При преобразовании инверсии поверхности $\xi = \text{const}$ переходят в полуплоскости $\alpha' = \text{const}$, причем

$$\xi = \begin{cases} \gamma - \alpha' & \text{при } 0 \leq \alpha' \leq \pi + \gamma, \\ \gamma - \alpha' + 2\pi & \text{при } \pi + \gamma < \alpha' < \beta \text{ (если } \beta > \pi + \gamma). \end{cases} \quad (1)$$

Расстояния r и r' могут быть выражены через координаты ρ, ξ точки наблюдения M (при этом нужно использовать соотношения между декартовыми и тороидальными координатами из задачи 68, а также рассмотреть подобные треугольники $OO'M'$ и $OO'M$):

$$r = \frac{2ae^{\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{2(\text{ch } \rho - \cos \xi)}}, \quad r' = 2ae^{-\rho}. \quad (2)$$

Используя выражение для потенциала клина, полученное в задаче 206, а также формулы (1) и (2), получим после некоторых преобразований следующее выражение для емкости:

$$C = \frac{q}{V} = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \text{или } (\rho \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0)}} \frac{r(\varphi + V)}{V} = \\ = \frac{a}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\text{sh } \frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\pi}{\beta} \cdot \frac{\text{sh } \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\text{ch } \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{2\pi\gamma}{\beta}} - \frac{\pi}{\beta} \cdot \frac{\text{sh } \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\text{ch } \frac{\pi\zeta}{\beta} - 1} + \frac{\text{sh } \zeta}{\text{ch } \zeta - 1} \right).$$

218. а) $C = \frac{R}{\pi}(\sin \theta + \theta)$;

б) $C = 2R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \frac{11}{13}R$,

интеграл из решения задачи 217 берется подстановкой $e^{-\frac{\zeta}{2}} = x$.

219. $C = \frac{a}{2}\left(5 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

ГЛАВА IV

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

220. $\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_2} = \frac{V_1 - V_2}{V_2 - \mathcal{E}}.$

221. Сопротивление катушки гальванометра должно быть равно внешнему сопротивлению R .

222.

$$R = \frac{3}{2}r \quad \text{при } n = 2,$$

$$R = \frac{13}{7}r \quad \text{при } n = 3,$$

$$R = \frac{47}{22}r \quad \text{при } n = 4.$$

Использование соображений симметрии позволяет, например, в случае $n = 3$ ограничиться всего тремя контурными токами.

223. Введем контурные токи, как показано на рис. 12. Уравнение Кирхгофа для ячейки $B_k A_k A_{k+1} B_{k+1}$ имеет вид

$$\mathcal{I}_{k+1} + \mathcal{I}_{k+1} = \left(2 + \frac{R}{r}\right) \mathcal{I}_k. \quad (1)$$

Это линейное разностное уравнение второго порядка имеет два линейно независимых решения: $e^{k\alpha}$ и $e^{-k\alpha}$, где

$$\text{sh } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{r}}. \quad (2)$$

¹При выводе этого и нижеследующих выражении полезно помнить, что формулы гиперболической тригонометрии получаются из формул обычной тригонометрии заменами

$$\cos \alpha \rightarrow \text{ch } \alpha, \quad \sin \alpha \rightarrow i \text{sh } \alpha.$$

Общее решение (1) имеет вид $\mathcal{I}_k = A'e^{k\alpha} + B'e^{-k\alpha}$. В данном случае удобно, перегруппировав члены, записать (1) в форме

$$\mathcal{I}_k = A \operatorname{ch}(\beta - k)\alpha, \quad (3)$$

где A и β — произвольные постоянные. Определим их из граничных условий на концах линии. Рассмотрим последнюю ячейку. Уравнение Кирхгофа для этой ячейки принимает вид

$$\mathcal{I}_n(R + R_a + r) - \mathcal{I}_{n-1}r = 0. \quad (4)$$

Подставив в (4) выражения токов \mathcal{I}_n и \mathcal{I}_{n-1} из (3) и используя (2), получим после сокращения на A уравнение для определения β :

$$\operatorname{th} \beta\alpha = \frac{R_a \operatorname{ch} n\alpha + \sqrt{Rr} \operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{R_a \operatorname{sh} n\alpha + \sqrt{Rr} \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}. \quad (5)$$

Значение постоянной A можно получить, составив уравнение Кирхгофа для начальной ячейки линии:

$$\mathcal{I}_0(R + R_i + r) - \mathcal{I}_1r = \mathcal{E}. \quad (6)$$

Из (6) после некоторых преобразований находим, что

$$A = \frac{\mathcal{E}}{R_i \operatorname{ch} \beta\alpha + \sqrt{Rr} \operatorname{sh}\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}.$$

Окончательно получаем для тока на отрезке $A_k A_{k+1}$ линии следующее выражение:

$$\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{E} \operatorname{ch}(\beta - k)\alpha}{R_i \operatorname{ch} \beta\alpha + \sqrt{Rr} \operatorname{sh}\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}. \quad (7)$$

Входящие в (7) постоянные α и β определяются уравнениями (2), (5).

При сухой изоляции $r \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и (7), как и следует ожидать, принимает вид:

$$\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_a + (n + 1)R}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим для отношения э. д. с. \mathcal{E}_0 и \mathcal{E} , обеспечивающих один и тот же ток через нагрузку при сухой и сырой изоляции, выражение:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{R_i \operatorname{ch} \beta \alpha + \sqrt{Rr} \operatorname{sh} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \alpha}{[R_i + R_a + (n + 1)R] \operatorname{ch} \left(\beta - n + \frac{1}{2} \right) \alpha}. \quad (9)$$

Если сопротивление нагрузки $R_a = 0$, то уравнение (5) упрощается и из него в этом случае следует, что

$$\beta = n + \frac{1}{2}. \quad (10)$$

224. Если $\mathcal{I}(x)$, $\varphi(x)$ — ток и потенциал жилы (относительно земли) в сечении с координатой x , то

$$\varphi(x) = -\rho' \frac{d\mathcal{I}}{dx}, \quad \mathcal{I} = -\rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d^2 \mathcal{I}}{dx^2} = \frac{\rho}{\rho'} \mathcal{I}.$$

225.

$$\mathcal{I}(x) = \frac{\mathcal{E} \operatorname{ch} s(x - x_0)}{R_i \operatorname{ch} s x_0 + \sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh} s x_0}, \quad (1)$$

где $s = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$. Постоянная x_0 определяется из уравнения

$$\operatorname{th} s(x_0 - a) = \frac{R_a}{\sqrt{\rho\rho'}}. \quad (2)$$

При $R_i = R_a = 0$

$$\mathcal{I}(x) = \frac{\mathcal{E} \operatorname{ch} s(x - x_0)}{\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh} s a}, \quad (3)$$

Если нет утечки, то $\rho' \rightarrow \infty$, $x_0 \rightarrow a$, $s \rightarrow 0$ и вдоль кабеля ток принимает постоянное значение:

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_i + \rho a + R_a}.$$

При использовании формулы (7) из решения задачи 223 нужно положить

$$R = \rho dx, \quad r = \frac{\rho'}{dx}, \quad k = \frac{x}{dx}, \quad n = \frac{a}{dx}.$$

Тогда из уравнения (2) решения задачи 223 следует, что $\alpha = s dx$. Величина β в этом решении связана с x_0 соотношением $\beta = \frac{x_0}{dx}$, так что $\beta\alpha = x_0 s$. Подстановка этих выражений в уравнения (5) и (7) решения задачи 223 приводит к приведенным выше формулам (1) и (2).

226.

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}, \quad D_1 = \frac{\varepsilon_1 \kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1},$$

$$E_2 = \frac{\kappa_1 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2 \kappa_1 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1},$$

$$j_1 = j_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}.$$

На границе раздела между пластинками:

$$\sigma_{св} = \frac{E_2 - E_1}{4\pi} - \sigma = \frac{\kappa_2(\varepsilon_1 - 1) - \kappa_1(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1)} V,$$

$$\sigma = \frac{D_2 - D_1}{4\pi} = \frac{(\varepsilon_2 \kappa_1 - \varepsilon_1 \kappa_2) V}{4\pi(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1)}.$$

Величина V больше нуля, если первая пластинка прилегает к положительно заряженной обкладке.

У границы обкладки и первой пластинки:

$$\sigma = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_{св} = \frac{E_1 - D_1}{4\pi}.$$

У границы обкладки и второй пластинки:

$$\sigma = -\frac{D_2}{4\pi}, \quad \sigma_{св} = -\frac{E_2 - D_2}{4\pi}.$$

227. $\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2},$

где β_1, β_2 — углы, образованные линией тока с нормалью к поверхности раздела в первой и второй среде.

228.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\mathcal{I}z}{\pi a^2 \kappa}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\mathcal{I}z \ln \frac{r}{b}}{\pi a^2 \kappa \ln \frac{a}{b}}, & a < r \leq b, \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Из этой формулы видно, что электрическое поле в пространстве между проводниками не направлено по оси z . Наличие отличной от нуля радиальной составляющей электрического поля E_r говорит о том, что на цилиндрических поверхностях проводников имеются поверхностные заряды с плотностями

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon E_r}{4\pi} \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon \mathcal{I}z}{4\pi^2 a^3 \kappa \ln \frac{a}{b}}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon E_r}{4\pi} \Big|_{r=b} = -\frac{\varepsilon \mathcal{I}z}{4\pi^2 a^2 b \kappa \ln \frac{a}{b}}.$$

При $z = 0$ плотности σ_1 и σ_2 обращаются в нуль. Положение сечения, на котором $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, не является определенным. Это сечение может быть смещено, если на провод поместить добавочный постоянный заряд. Заряды $q_1 = 2\pi a \sigma_1$ и $q_2 = 2\pi b \sigma_2 = -q_1$, приходящиеся на единицу длины провода и оболочки (при одном и том же z), связаны с разностью потенциалов между ними

$$V = \int_a^b E_r dr = -\frac{\mathcal{I}z}{a^2 \kappa}$$

соотношением

$$\frac{q_1}{V} = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} = \text{const.}$$

Отношение q_1/V совпадает в данном случае с емкостью на единицу длины цилиндрического конденсатора в электростатической задаче.

Магнитное поле имеет, очевидно, тот же вид, что и поле бесконечно длинного прямого провода с током \mathcal{I} . Это объясняется тем, что плотность тока в бесконечно толстой оболочке равна нулю, вследствие чего обратный ток не создает магнитного поля.

229. $E_0 = -k(\kappa_2 l_1 + \kappa_1 l_2) \mathcal{E}_0$, $E_1 = k \kappa_2 \mathcal{E}_0$, $E_2 = k \kappa_1 \mathcal{E}_0$,
 где $k = \frac{\kappa_0}{l_0(\kappa_0 \kappa_1 l_2 + \kappa_0 \kappa_2 l_1 + \kappa_1 \kappa_2 l_0)}$.

$\mathcal{E}_0 = E_{ст}l_0$ — э. д. с. источника. Внутри него электрическое поле направлено противоположно току ($E_0 < 0$).

Заряды, создающие это электрическое поле, возникают на границах раздела проводников с разными проводимостями и могут быть определены с помощью граничных условий; например, заряд на границе 01 равен

$$q_{01} = \frac{r^2}{4}(E_1 - E_0).$$

230. Рассмотрим, например, поток энергии через поверхность 0-го проводника, в котором действует э. д. с. Магнитное поле вблизи поверхности совпадает с полем бесконечно длинного прямого провода $H = \frac{2\mathcal{I}}{cr}$. Вектор Пойнтинга $\gamma = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H})$ (\mathbf{E}_0 — напряженность электрического поля в 0-м проводнике, направленная противоположно току, см., задачу 229), как легко убедиться, направлен из проводника по нормали к его поверхности. Величина потока энергии через поверхность этого проводника, следовательно, равна $2\pi r l_0 \gamma = \mathcal{I}V$, где $V = E_0 l_0$ — разность потенциалов на концах проводника. Величина $\mathcal{I}V$ представляет собой разность между работой э. д. с. $\mathcal{E}\mathcal{I}$ ($\mathcal{E} = E_{ст}l_0$) и джоулевыми потерями в единицу времени в самом источнике.

Энергия $\mathcal{I}V$ вытекает каждую секунду через наружную поверхность источника, течет в окружающем проводники пространстве (в основном вне проводников) и втекает внутрь 1-го и 2-го проводников через их поверхности, превращаясь внутри этих проводников в джоулево тепло. В том, что общее количество энергии, втекающей в 1-й и 2-й проводники за единицу времени, равно $\mathcal{I}V_1$, $\mathcal{I}V_2$, легко убедиться, рассмотрев вектор Пойнтинга так же, как выше.

231. $R = \int_1^2 \frac{dl}{S\kappa}$, где элемент dl направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности с площадью S ; цифрами 1 и 2 обозначены граничные поверхности.

232.

а) $R = \frac{1}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right);$

б) $R = \frac{1}{4\pi\kappa_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4\pi\kappa_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right);$

в) $R = \frac{1}{2\pi l\kappa} \ln \frac{b}{a}.$

233. $\frac{1}{4\pi\kappa_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi\kappa_1} \cdot \frac{1}{b}.$

$$234. \mathcal{J}_k = \frac{4\pi\kappa}{\varepsilon} q_k, \quad R_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa} s_{ik}.$$

$$235. C = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa R}.$$

$$236. Q = \sum_{i,k} R_{ik} \mathcal{J}_i \mathcal{J}_k.$$

$$237. R = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa} (s_{11} - 2s_{12} + s_{22}) = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa} \frac{c_{11} + 2c_{12} + c_{22}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}.$$

$$238. R = \frac{V_1 - V_2}{\mathcal{J}} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\pi\kappa l} \approx R_1 + R_2,$$

где $R_1 = \frac{1}{2\pi\kappa a_1}$, $R_2 = \frac{1}{2\pi\kappa a_2}$ — сопротивления уединенных заземлителей (см. задачу 233).

239. Обозначим через $e_0 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ эксцентриситет эллипсоидов вращения (b/a — отношение меньшей полуоси к большей). Тогда

$$R = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{3\pi^2 V} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1 - e_0^2)^{\frac{1}{6}}}{e_0} \arccos \sqrt{1 - e_0^2}$$

— в случае сплюснутого эллипсоида вращения,

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{(1 - e_0^2)^{\frac{1}{3}}}{(6\pi^2 V)^{\frac{1}{3}} e_0} \ln \frac{1 + e_0}{1 - e_0}$$

— случае вытянутого эллипсоида вращения.

Более выгодной (при фиксированном объеме V) является сильно вытянутая или, наоборот, очень сплюснутая форма заземлителей.

240. Плотность тока в пространстве между электродами

$$j = \rho v \tag{1}$$

не зависит от x ($v(x)$ — скорость частиц в данной точке x). Скорость связана с потенциалом $\varphi(x)$ формулой

$$v = \sqrt{-\frac{2e\varphi}{m}} \tag{2}$$

($\varphi = 0$ при $x = 0$).

Из (1) и (2) следует, что $\rho = j\sqrt{-\frac{m}{2e\varphi}}$, так как уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j\sqrt{-\frac{m}{2e\varphi}}. \quad (3)$$

Интегрируя (3) с граничными условиями $\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ и $\varphi\Big|_{x=a} = \varphi_0$, получим

$$j = \frac{1}{9\pi a^2} \sqrt{\frac{2|e|}{m}} |\varphi_0|^{\frac{3}{2}}$$

(«закон трех вторых»).

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

241.

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\alpha = \begin{cases} \frac{2\mathcal{J}r}{ca^2} & \text{при } r < a, \\ \frac{2\mathcal{J}}{cr} & \text{при } a \leq r \leq b, \\ 0 & \text{при } r > b. \end{cases}$$

242. Рассмотрим решение задачи методом векторного потенциала. Если направить ось z вдоль оси цилиндра, то прямоугольные компоненты A будут удовлетворять уравнениям:

$$\Delta A_x = 0, \quad \Delta A_y = 0, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi\mu_0}{c} j_z, \quad (1)$$

причем $j_z = 0$ при $r > a$, $j_z = \frac{\mathcal{J}}{\pi a^2}$ при $r \leq a$.

Поскольку в уравнения для A_x и A_y заданный ток \mathcal{J} не входит, эти компоненты можно считать равными нулю; A_z будет зависеть только от расстояния r до оси z . Интегрируя уравнение для A_z и используя условия непрерывности A_z и H_α на границе $r = a$ и ограниченности H при $r = 0$, получим:

при $r < a$

$$A_z = C - \frac{\mu_0\mathcal{J}}{c} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad B_\alpha = \frac{2\mu_0\mathcal{J}}{ca^2} r, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{ca^2} r; \quad (2)$$

при $r > a$

$$A_z = C - \frac{\mathcal{J}}{c} \left(\mu_0 + 2\mu \ln \frac{r}{a}\right), \quad B_\alpha = \frac{2\mu\mathcal{J}}{cr}, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{J}}{cr}. \quad (2')$$

Константа C — произвольна.

243. При $r < a$

$$A_z = C_1, \quad \mathbf{B} = 0;$$

при $a \leq r \leq b$

$$A_z = \frac{2\mu_0 \mathcal{I} a^2}{c(b^2 - a^2)} \left(\ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} \right) + C_2, \quad A_\alpha = \frac{2\mu_0 \mathcal{I}}{c(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right);$$

при $r > b$

$$A_z = \frac{2\mu_0 \mathcal{I}}{c} \ln \frac{b}{r} + C_3, \quad B_\alpha = \frac{2\mu_0 \mathcal{I}}{cr}.$$

Остальные компоненты \mathbf{A} и \mathbf{B} равны нулю. Две любые константы, входящие в A_z , можно выразить через третью, используя условия непрерывности векторного потенциала на границах.

$$244. \quad H_x = -\frac{2\mathcal{I}}{ca} \left(\operatorname{arctg} \frac{a+2x}{2y} + \operatorname{arctg} \frac{a-2x}{2y} \right),$$

$$H_y = -\frac{\mathcal{I}}{ca} \ln \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

Ось y перпендикулярна полосе и проходит через ее середину.

245. Пластины отталкиваются с силой

$$f = \frac{4\mathcal{I}^2}{c^2 a^2} \left(a \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{1}{2} b \ln \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right).$$

$$246. \quad A_z = \frac{2\mathcal{I}}{c} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mathcal{I}}{c} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2},$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{8\mathcal{I}}{c} \frac{axy}{r_1^2 r_2^2},$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2\mathcal{I}}{c} \left(\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2} \right).$$

Координаты проводников с током в перпендикулярной к ним плоскости равны $(a, 0)$ для тока $+\mathcal{I}$ и $(-a, 0)$ для тока $-\mathcal{I}$; r_1 и r_2 — расстояния от точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ до точки наблюдения.

247. а) Между плоскостями $H = \frac{4\pi}{c} i$, в остальном пространстве $H = 0$;

б) между плоскостями $H = 0$, в остальном пространстве $H = \frac{4\pi}{c} i$. В обоих случаях магнитное поле направлено перпендикулярно току и параллельно токнесущим плоскостям.

248. $H_y = \frac{2\mathcal{J}d}{c(b^2 - a^2)}$, $H_x = H_z = 0$; ось y нормальна к плоскости, проведенной через оси цилиндров.

249. В цилиндрической системе координат, ось z которой перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр,

$$A_\alpha = \frac{2\mu\mathcal{J}}{c} \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right], \quad A_z = A_r = 0,$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы Лежандра, $k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$.

Компоненты магнитного поля:

$$H_r = \frac{2\mathcal{J}}{c} \cdot \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right],$$

$$H_z = \frac{2\mathcal{J}}{c} \cdot \frac{z}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right], \quad H_\alpha = 0.$$

На оси витка ($r = 0$) эти выражения переходят в

$$H_r = 0, \quad H_z = \frac{2\pi a^2 \mathcal{J}}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

250. В любом сечении такой трубки поток индукции будет один и тот же. Поэтому уравнение поверхности трубки:

$$N = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = f(r, z) = \text{const},$$

где поверхность интегрирования S представляет собою круг радиуса r в плоскости, перпендикулярной оси симметрии (центр круга лежит на оси симметрии). Так как A_α не зависит от α , то с помощью теоремы Стокса получим

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A_\alpha(r, z) = \text{const}.$$

Линии пересечения этих поверхностей с плоскостями $\alpha = \text{const}$ и дают искомые линии магнитной индукции.

251. Компоненты магнитного поля:

$$H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = H_z - \frac{r^2}{4} H''(z) + \dots,$$

$$H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!} H^{(2n-1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{r}{2} H'(z) + \dots,$$

$$H_\alpha = 0.$$

Векторный потенциал выражается через напряженность магнитного поля с помощью теоремы Стокса и соотношения $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$:

$$A_\alpha(r, z) = \frac{1}{r} \int_0^r H_z r dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} H^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} = \frac{r}{2} H(r) - \dots$$

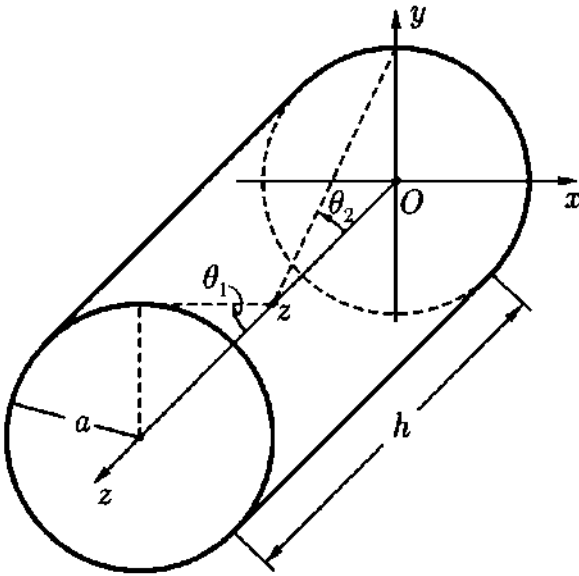


Рис. 68

точки, не лежащих на поверхности сферы, удовлетворяет уравнению Лапласа. Как следует из симметрии системы, векторный потенциал можно выбрать так, чтобы была отлична от нуля только компонента A_α , которая не будет зависеть от угла α . Поэтому уравнение для векторного потенциала запишется:

$$\Delta A - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\alpha = 0 \quad (1)$$

(см. ответ к задаче 47).

252. $H_z = \frac{2\pi n \mathcal{J}}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$,
где (см. рис. 68):

$$\cos \theta_1 = \frac{h - z}{\sqrt{a^2 + (h - z)^2}},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

253. Решим задачу методом векторного потенциала. Плотность поверхностного тока, возникающего при вращении сферы,

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_\alpha \frac{e\omega}{4\pi a} \sin \vartheta$$

(полярная ось выбрана вдоль вектора ω). Векторный потенциал во всех

Поскольку плотность тока зависит от угла ϑ по закону $\sin \vartheta$, естественно искать решение уравнения (1) в виде

$$A_\alpha(r, \vartheta) = F(r) \sin \vartheta. \quad (2)$$

Как будет видно из дальнейшего, $F(r)$ можно выбрать так, чтобы удовлетворялись уравнение и граничные условия, и это оправдывает выбор решения (2). Отметим, что векторный потенциал (2) удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

выполнение которого необходимо, чтобы имело место (1).

Определяя $F(r)$ с помощью уравнения (1) и граничных условий, получим A_α и $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Напряженность магнитного поля внутри сферы ($r < a$)

$$\mathbf{H} = \frac{2e\omega}{3c},$$

при $r > a$

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3},$$

где $\mathbf{m} = \frac{ea^2}{3c}\omega$ — магнитный момент системы.

254. В точках, где $j = 0$, можно положить $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi$. Тогда уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ выполняется при всех ψ , а уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ дает

$$\Delta \psi = 0.$$

Последнее уравнение должно быть решено при дополнительном условии

$$\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{I},$$

где l — любой контур, охватывающий ток \mathcal{I} . Вводим цилиндрические координаты r, α, z и ищем решение в виде $\psi = \psi(\alpha)$.

Окончательно получим

$$\psi = -\frac{2\mathcal{I}}{c}\alpha, \quad H_\alpha = \frac{2\mathcal{I}}{cr}, \quad H_r = H_z = 0.$$

255. а) Чтобы скалярный потенциал ψ магнитного поля был однозначной функцией, выберем некоторую поверхность S (рис. 69), опирающуюся

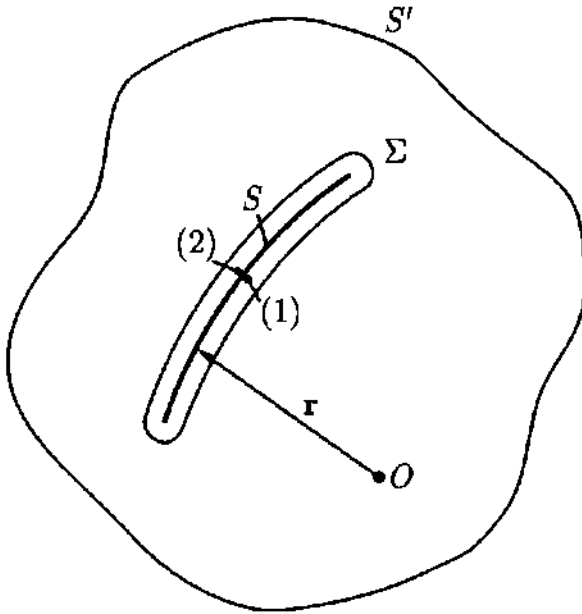


Рис. 69

на контур с током, и будем считать, что при переходе через эту поверхность ψ терпит разрыв:

$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4\pi}{c} \mathcal{I}. \quad (1)$$

Точки 1 и 2 лежат бесконечно близко друг к другу по разные стороны поверхности, причем направление из 1 в 2 составляет с направлением тока праввинтовую систему.

Решение уравнения Лапласа можно записать в виде (см. [101]):

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS. \quad (2)$$

В выражении (2) интегрирование нужно проводить по бесконечно удаленной замкнутой поверхности S' , а также по всем замкнутым поверхностям Σ_i , лежащим на конечном расстоянии от начала координат, внутри которых ψ или $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ имеют разрывы. В рассматриваемом случае интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, так как источник поля (контур с током) имеет ограниченные размеры. Поверхности, на которых нормальная производная $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -H_n$ имеет разрыв, отсутствуют, так как H_n — непрерывная величина. Поэтому в (2) интеграл должен быть взят по одной поверхности Σ , окружающей S .

Будем стягивать Σ до совпадения с S . Вследствие непрерывности величин $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$ на поверхности S , формула (2) примет вид

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int [\psi(1) - \psi(2)] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \quad (3)$$

где интегрирование теперь ведется по незамкнутой поверхности S .

Используя равенство (1), получим

$$\psi = \frac{\mathcal{I}}{c} \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\frac{\mathcal{I}}{c} \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}. \quad (4)$$

Интеграл $\int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}$ представляет собою телесный угол Ω , под которым виден контур с током из точки наблюдения, поэтому формулу (4) можно записать в виде

$$\psi = -\frac{\mathcal{I}}{c}\Omega.$$

Знак Ω положителен, если радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный из точки наблюдения в некоторую точку поверхности S , и направление тока в контуре составляют правовинтовую систему.

б) Преобразуем интеграл по контуру в интеграл по поверхности, опирающейся на контур; используя результат задачи 55, получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{I}}{c} \int d\mathbf{S} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathcal{I}}{c} \int \nabla_M\left(\frac{1}{r}\right) \times d\mathbf{S},$$

где ∇_M означает дифференцирование по координатам точки наблюдения M . Вычисляя $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, находим:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathcal{I}}{c} \int (d\mathbf{S} \cdot \nabla)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathcal{I}}{c} \nabla_M \int d\mathbf{S} \cdot \nabla_M\left(\frac{1}{r}\right). \quad (5)$$

(При преобразовании использовано равенство $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$; предполагается, что точка $r = 0$ не лежит на поверхности интегрирования.) Сравнивая (5) с формулой $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$, получаем

$$\psi = -\frac{\mathcal{I}}{c} \int d\mathbf{S} \cdot \nabla_M\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathcal{I}}{c} \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\frac{\mathcal{I}}{c}\Omega.$$

256. $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$, где $\mathbf{m} = \frac{\mathcal{I}}{c} \int \mathbf{n} \cdot dD$ — магнитный момент контура с током.

$$\mathbf{257.} \quad U = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5};$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{3}{r^5}[(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{m}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{r}] - \frac{15}{r^7}(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от первого тока ко второму, \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 — силы, действующие на первый и второй токи;

$$\mathbf{N}_1 = \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1}{r^3},$$

$$\mathbf{N}_2 = \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{r^3},$$

где $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ — вращательные моменты, приложенные к первому и второму токам соответственно. Следует отметить, что $\mathbf{N}_1 \neq -\mathbf{N}_2$, но

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) = 0.$$

Если магнитные моменты параллельны ($\mathbf{m}_1 = m_1 \mathbf{n}$, $\mathbf{m}_2 = m_2 \mathbf{n}$, $\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0$, \mathbf{n} и \mathbf{r}_0 — единичные векторы), то получим

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3m_1 m_2 [2\mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{r}_0 (5 \cos^2 \vartheta - 1)]}{r^4},$$

где ϑ — угол между \mathbf{n} и \mathbf{r}_0 .

259. Потенциальная функция тока \mathcal{I}_2 в поле тока \mathcal{I}_1 :

$$u_{21} = \frac{2\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \ln a + \text{const},$$

где a — расстояние между токами.

Сила, действующая на единицу длины второго тока:

$$f = -\frac{\partial u_{21}}{\partial a} = -\frac{2\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2 a}.$$

При параллельных токах (\mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 одинакового знака) имеет место притяжение.

260. Сила \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} определяются дифференцированием потенциальной функции:

$$U(r, \alpha) = -\frac{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 a}{c^2} \ln \frac{4r^2 + a^2 + 4ar \cos \alpha}{4r^2 + a^2 - 4ar \cos \alpha}.$$

$$261. \quad N = \frac{4\mathcal{I} \mathcal{I}' a}{c} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

$$262. \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu_0 + 2\mu \ln \frac{b}{a}.$$

$$263. \quad \mathcal{L} = 2\mu \ln \frac{b}{a}.$$

$$264. \quad L_{12} = 4\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2});$$

$$F = \frac{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \cdot \frac{\partial L_{21}}{\partial b} = \frac{4\pi \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right).$$

265. В этой задаче удобно использовать формулу (V.23). Вычисляя интеграл так же, как в задаче 89, получим

$$L_{12} = 4\pi\sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + l^2}.$$

При $l \gg a, b$ параметр k мал:

$$k^2 \approx \frac{4ab}{l^2}, \quad k \approx \frac{2\sqrt{ab}}{l} \ll 1,$$

поэтому можно использовать приближенные формулы для E и K (см. справочник [90], 8.113, 8.114):

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 \right), \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 \right).$$

Оставляя в выражении для L_{12} только члены, пропорциональные k^3 , получим в первом неисчезающем приближении $L_{12} = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{l^3}$. Последний результат легко получить и из равенства $L_{12} = \frac{c\Phi_{12}}{\mathcal{I}_1}$, рассматривая кольца с током как магнитные диполи.

При $a \approx b \gg l, k \approx 1, K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}, E(k) \approx 1,$

$$L_{12} = 4\pi a \left(\ln \frac{8a}{\sqrt{l^2 + (a-b)^2}} - 2 \right).$$

266. В обозначениях предыдущей задачи

$$F = \frac{4\pi \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}{c^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{(a+b)^2 + l^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + b^2 + l^2}{(a+b)^2 + l^2} E(k) \right].$$

267. $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$. Для соленоида большой, но конечной длины h , пренебрегая краевым эффектом, получим полную индуктивность

$$L = 4\pi n^2 Sh.$$

268. Вычисляем магнитную энергию по формуле

$$W = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2}{R} dS_1 dS_2.$$

Здесь dS_1 и dS_2 — элементы поверхности соленоида, R — расстояние между ними, через \mathbf{i} ($i_1 = i_2 = i = n\mathcal{J}$) обозначена плотность поверхностного тока, которым заменен ток, текущий в обмотке соленоида, n — число витков на единицу длины.

Интеграл удобно вычислять в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi n^2 a^2 \mathcal{J}^2}{c^2} \int_0^h dz_1 \int_0^h dz_2 \oint \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\ &= \frac{2\pi^2 a^2 n^2 \mathcal{J}^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right)}{c^2}, \end{aligned}$$

где отброшены все члены порядка $\left(\frac{a}{h}\right)^2$ и выше. Отсюда

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right).$$

Если пренебречь членом a/h по сравнению с единицей, то получится результат предыдущей задачи:

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h = 4\pi n^2 Sh.$$

269. Для кругового сечения

$$L = 4\pi N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Самоиנדукция на единицу длины $\mathcal{L} = \frac{L}{2\pi b}$ для бесконечного соленоида получится, если сделать предельный переход $b \rightarrow \infty$ при заданном числе витков на единицу длины $n = \frac{N}{2\pi b}$:

$$\mathcal{L} = 4\pi^2 n^2 a^2 = 4\pi n^2 S$$

(ср. с задачей 267).

Для прямоугольного сечения

$$L = 2N^2 h \ln \frac{2b + a}{2b - a}.$$

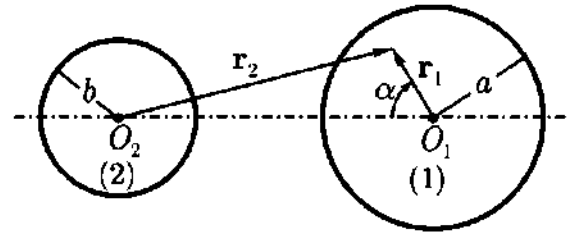


Рис. 70

При $b \gg a$ опять имеем $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$.

Если ток течет непосредственно по оболочке тора, то самоиндукция уменьшается в N^2 раз по сравнению с самоиндукцией тора, обмотанного проводом. В соответствии с этим будем иметь:

$$L = 4\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2})$$

для тора круглого сечения и

$$L = 2h \ln \frac{2b + a}{2b - a}$$

для тора прямоугольного сечения.

270. Вычислим магнитную энергию единицы длины линии по формуле (V.16). Векторный потенциал прямого провода с током был получен в задаче 242. Для провода 1 (рис. 70) запишем его в виде

$$\left. \begin{aligned} A_{1z} &= C - \frac{\mathcal{I} r_1^2}{ca^2} && \text{при } r_1 < a, \\ A_{1z} &= C - \frac{\mathcal{I}}{c} \left(1 + 2 \ln \frac{r_1}{a}\right) && \text{при } r_1 > a. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Векторный потенциал, создаваемый проводом 2, получится при замене в (1) \mathcal{I} на $-\mathcal{I}$, a на b и r_1 на r_2 .

Находим магнитную энергию:

$$W = \frac{\mathcal{I}}{2\pi ca^2} \int_1 (A_{1z} + A_{2z}) dS_1 - \frac{\mathcal{I}}{2\pi cb^2} \int_2 (A_{1z} + A_{2z}) dS_2. \quad (2)$$

Интегралы, входящие в (2), можно вычислить, используя формулу (3.765) из справочника [90]. Учитывая затем связь между коэффициентом индуктивности и магнитной энергией системы, получим окончательно:

$$\mathcal{L} = 1 + 2 \ln \frac{h^2}{ab}.$$

271. Полная магнитная энергия тока, протекающего по проводнику, складывается из двух частей:

$$W = W_1 + W_2, \quad (1)$$

где

$$W_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \int H_1^2 dV$$

— энергия, запасенная внутри проводника и интегрирование ведется по объему проводника,

$$W_2 = \frac{\mu}{8\pi} \int H_2^2 dV$$

— энергия, запасенная в остальном пространстве.

Предположим, что можно ввести параметр r_0 , имеющий размерность длины и удовлетворяющий условию

$$a \ll r_0 \ll R, \quad (2)$$

где a — радиус проводника, R — радиус кривизны осевой линии проводника (который в общем случае меняется от точки к точке). Тогда на расстояниях, меньших r_0 , магнитное поле можно считать совпадающим с полем бесконечного прямого провода. В частности, внутри провода:

$$H_1 = \frac{2\mathcal{I}r}{ca^2}$$

(см. задачу 242). Это позволяет найти «внутреннюю» энергию W_1 :

$$W_1 = \frac{\mu_0 l \mathcal{I}^2}{4c^2}. \quad (3)$$

Для определения «внешней» энергии W_2 построим вспомогательную поверхность S , опирающуюся на произвольный контур, лежащий на поверхности проводника, и введем скалярный потенциал ψ . Скалярный потенциал будет испытывать на S скачок

$$\psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c} \mathcal{I}. \quad (4)$$

Интеграл, через который выражается W_2 , можно преобразовать следующим образом:

$$\int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV = - \int \mathbf{B} \operatorname{grad} \psi dV = - \int \operatorname{div}(\psi \mathbf{B}) dV = - \oint \psi B_n dS$$

(здесь опущен индекс 2 и использовано уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$). В последнем интеграле интегрирование должно проводиться по обеим сторонам вспомогательной поверхности S и по поверхности проводника S' (см. рис. 71, на котором изображено сечение проводника некоторой плоскостью). Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль вследствие конечных размеров проводника с током. Таким образом,

$$W_2 = -\frac{1}{8\pi} \int_{S'} \psi B_n dS + \frac{1}{8\pi} \int_S \psi_+ B_n dS - \frac{1}{8\pi} \int_S \psi_- B_n dS. \quad (5)$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, так как в силу условия (2) магнитное поле на поверхности S' совпадает с полем прямолинейного провода и имеет, следовательно, только касательную составляющую. Для преобразования других двух интегралов нужно использовать равенство (4) и условие непрерывности компоненты B_n . Получим

$$W_2 = \frac{\mathcal{I}}{2c} \int_S B_n dS. \quad (6)$$

На больших расстояниях от провода ($r > r_0$) магнитное поле не зависит от распределения тока по сечению проводника, поэтому можно считать, что ток течет по оси. На малых расстояниях ($a \leq r < r_0$) это поле совпадает с магнитным полем бесконечно-го круглого цилиндра, и тоже можно считать, что ток течет по оси. Таким образом, интеграл в формуле (6) представляет собою поток магнитной индукции, создаваемой током, текущим по оси проводника, через поверхность, которая опирается на замкнутый контур, лежащий на поверхности проводника. Используя выражение потока через коэффициент взаимной индукции (V.22), получим

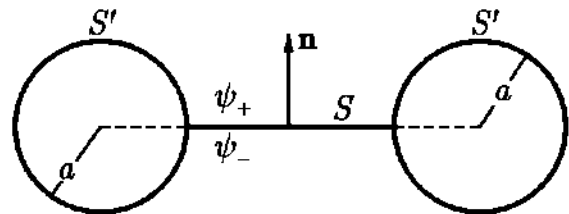


Рис. 71

$$W_2 = \frac{\mathcal{I}^2}{2c^2} L'. \quad (7)$$

С помощью формул (1), (3), (7), используя связь между коэффициентом самоиндукции и магнитной энергией системы, получим требуемую формулу для коэффициента самоиндукции:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L'. \quad (8)$$

272. Используя результат предыдущей задачи, получим

$$L' = 4\pi\mu b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2 \right),$$

где μ_0 — магнитная проницаемость среды, в которой находится проводник. Полная самоиндукция

$$L = 4\pi b \left(\mu \ln \frac{8b}{a} - 2\mu + \frac{1}{4}\mu_0 \right)$$

или, если $\mu_0 = \mu = 1$,

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right).$$

273. $L_{12} = 2l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l}.$

274. Используя результат задачи 273, получим

$$L_{12} = 8 \left[l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2\sqrt{2a^2 + l^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l} - a \ln \frac{a + \sqrt{2a^2 + l^2}}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right],$$

$$F = \frac{8\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}{c^2} \left[\frac{a^2 + 2l^2}{l\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{l\sqrt{2a^2 + l^2}}{a^2 + l^2} - 1 \right].$$

275. $L = 2\mu_0 b + 8\mu b \left[\ln \frac{2b}{a(1 + \sqrt{2})} + \sqrt{2} - 2 \right].$

276. Используя при интегрировании по углам в формуле (V.13) соотношение $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$ (см. задачу 32), получим:

в случае равномерного объемного распределения заряда,

$$\mathbf{m} = \frac{\epsilon a^2}{5c} \boldsymbol{\omega};$$

в случае равномерного распределения заряда по поверхности,

$$\mathbf{m} = \frac{\epsilon a^2}{3c} \boldsymbol{\omega}.$$

Если применить эти формулы к шару, радиус которого равен классическому радиусу электрона ($2,8 \cdot 10^{-13}$ см), а магнитный момент равен известному из опыта магнитному моменту электрона ($0,9 \cdot 10^{-20}$ эрг/гс), то окажется, что линейная скорость $v = a\omega \approx 10^{13}$ см/сек на экваторе такого «электрона» превышает скорость света в вакууме. Это показывает непригодность классических представлений для описания спина электрона. Подробнее об этом см. [111, 6].

278. Вторичное поле \mathbf{H}' удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{H}' = 0$, т.е. является потенциальным. Введя скалярный потенциал по формуле $\mathbf{H}' = -\text{grad } \psi$, получим для него уравнение, совпадающее с уравнением электростатики в неоднородной среде:

$$\text{div}(\mu \text{ grad } \psi) = -4\pi \rho_m,$$

где величина

$$\rho_m = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{H}_0 \cdot \text{grad } \mu$$

играет роль плотности магнитных зарядов.

На границе раздела двух сред должны выполняться условия для касательных компонент поля:

$$H'_{1\tau} = H'_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau}$$

и для нормальных компонент поля:

$$\mu_2 H'_{2n} - \mu_1 H'_{1n} = (\mu_1 - \mu_2) H_{0n} \quad \text{или} \quad \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = 4\pi \sigma_m.$$

Здесь величина

$$\sigma_m = \frac{1}{4\pi} (\mu_1 - \mu_2) H_{0n}$$

играет роль плотности поверхностного заряда. Заметим, что это выражение для σ_m может быть получено и из формулы для объемной плотности ρ_m путем предельного перехода:

$$\sigma_m = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_m h.$$

Заменим поверхность раздела тонким слоем толщиной h . Тогда $\text{grad } \mu$ будет направлен по нормали к слою и будет равен $\frac{\mu_2 - \mu_1}{h}$, откуда

$$\rho_m = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{h} H_{0n}, \quad \sigma_m = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_m h = \frac{1}{4\pi} (\mu_1 - \mu_2) H_{0n}.$$

$$279. \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0,$$

где \mathbf{H}_0 — поле, создаваемое контуром с током в вакууме, $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ — поля в средах с проницаемостями μ_1, μ_2 .

280. Магнитное поле в среде 1 совпадает с полем, создаваемым в вакууме двумя прямолинейными токами

$$\mathcal{I}_1 = \mu \mathcal{I} \quad \text{и} \quad \mathcal{I}_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} \mathcal{I};$$

ток \mathcal{I}_1 течет по тому же проводу, что и начальный ток \mathcal{I} ; ток \mathcal{I}_2 течет вдоль провода, который является зеркальным изображением первого провода относительно плоскости раздела сред.

Магнитное поле в среде 2 совпадает с полем, которое создается в вакууме током $\mathcal{I}_1 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathcal{I}$, текущим по тому же проводу, что и начальный ток \mathcal{I} .

281. Векторы поля удовлетворяют во всем пространстве однородным уравнениям $\text{rot } \mathbf{H} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0$, поэтому можно ввести скалярный потенциал ψ ($\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$), который будет удовлетворять уравнению Лапласа. В результате задача магнитостатики сведена к задаче электростатики. Решение имеет вид (см. задачу 149):

внутри шара

$$\mathbf{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}_0;$$

вне шара

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{дип}},$$

где $\mathbf{H}_{\text{дип}}$ — поле, создаваемое магнитным диполем с моментом

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0.$$

Поскольку поле внутри шара однородно, намагниченность постоянна:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{4\pi}{3} a^3} = \frac{3(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} \mathbf{H}_0.$$

Плотность эквивалентного объемного тока будет поэтому равна нулю:

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \text{rot } \mathbf{M} = 0.$$

Плотность поверхностного тока можно определить по формуле

$$\mathbf{i}_{\text{мол}} = c[\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)],$$

которая получается из (V.3) путем предельного перехода (ср. с выводом граничного условия для \mathbf{H}_T из уравнения Максвелла). Подставляя $\mathbf{M}_2 = 0$ и $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, найдем:

$$\mathbf{i}_{\text{мол}} = \frac{3c(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} H_0 \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha.$$

Интересно отметить, что такой поверхностный ток можно получить, если заставить вращаться вокруг одного из диаметров сферу, заряженную равномерно по поверхности (см. задачу 253).

282. Если направить оси координат вдоль главных осей тензора магнитной проницаемости, то внутри шара компоненты поля будут равны $\frac{3}{\mu^{(k)} + 2} H_{0k}$, где \mathbf{H}_0 — внешнее поле. Вне шара

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{дип}},$$

где $\mathbf{H}_{\text{дип}}$ — поле магнитного диполя с моментом \mathbf{m} , причем

$$m_k = \frac{\mu^{(k)} - 1}{\mu^{(k)} + 2} a^3 H_{0k}.$$

Момент сил, действующих на шар:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0.$$

$$283. \quad H = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^3} \right] H_0.$$

При $\mu_1 \gg \mu_2$ поле в полости сильно ослабляется — происходит магнитная экранировка.

$$284. \quad H = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3}{\frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(2\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^3} \right] H_0.$$

При $\mu_1 \gg \mu_2$ поле сильно ослабляется ($H \ll H_0$).

285. Магнитное поле

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

где

$$A_z = -\frac{\mu_1 \mathcal{J}}{4\pi a^2} r^2 + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0 r \sin \alpha \quad \text{при } r < a,$$

$$A_z = \frac{\mu_2 \mathcal{J}}{2\pi} \ln \frac{a}{r} + \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{a^2}{r^2}\right) B_0 r \sin \alpha \quad \text{при } r > a.$$

Ось z направлена вдоль оси цилиндра; остальные компоненты \mathbf{A} равны нулю.

$$288. \quad f = \frac{2\mathcal{J}^2 a^2 (\mu - 1)}{c^2 b (b^2 - a^2) (\mu + 1)}.$$

$$289. \quad f = \frac{2\mathcal{J}^2 b (\mu - 1)}{c^2 (a^2 - b^2) (\mu + 1)}.$$

$$290. \quad \mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu_i} \cdot \frac{2\pi \mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 \alpha_3 + \mu_2 \mu_3 \alpha_1 + \mu_1 \mu_3 \alpha_2} \mathbf{H}_0,$$

где \mathbf{H}_0 — поле, которое создается тем же током в вакууме.

291. Во внешней области индукция \mathbf{B} и магнитное поле \mathbf{H} связаны обычным соотношением $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$. Внутри шара, согласно (V.27), $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 + 4\pi \mathbf{M}_0$, где \mathbf{M}_0 — постоянная намагниченность. Вводя скалярный потенциал, как в задаче 281, получим

$$\psi_1 = -\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{r}, \quad \psi_2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

где

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{4\pi \mathbf{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}, \quad \mathbf{m} = \frac{4\pi a^3 \mathbf{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}.$$

Таким образом, поле внутри шара однородно, а вне шара совпадает с полем магнитного диполя с моментом \mathbf{m} .

292. Поле внутри цилиндра:

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{4\pi \mathbf{M}_0}{\mu_2 + \mu_1}.$$

Поле вне цилиндра:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^4} - \frac{\mathbf{m}}{r^2},$$

где M_0 — постоянная намагниченность, $\mathbf{m} = \frac{4\pi a^2 M_0}{\mu_2 + \mu_1}$.

293. Поле внутри шара:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}_0 - \frac{4\pi M_0}{\mu + 2}.$$

Поле вне шара:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3 M_0}{\mu + 2} + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0.$$

Так как внешнее поле однородно, то результирующая сила, действующая на шар, равна нулю. Но если направления M_0 и H_0 различны, то на сферу будет действовать момент сил. Его можно рассчитать с помощью тензора натяжений магнитного поля. Момент сил, действующих на постоянный магнит, определяется формулой

$$N_i = \oint_S e_{ikl} x_k T_{lm} dS_m, \quad (2)$$

где T_{lm} — тензор натяжений (V.26), e_{ikl} — единичный антисимметричный тензор, интегрирование ведется по внешней поверхности магнита. Подставляя (V.26) в (2) и переходя к векторным обозначениям, получим

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4\pi} \oint (\mathbf{r} \times \mathbf{H}_2)(\mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{S}) - \frac{1}{8\pi} \oint H_2^2 (\mathbf{r} \times d\mathbf{S}). \quad (3)$$

Так как начало отсчета выбрано в центре шара, то \mathbf{r} и $d\mathbf{S}$ имеют одинаковые направления, и второй интеграл в (3) обратится в нуль. Для вычисления первого интеграла положим $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = n a^2 d\Omega$, $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$ и подставим \mathbf{H}_2 из (1). Это даст

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4\pi} \int [a^3 (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0) + \mathbf{m} \times \mathbf{n}] \left(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{2}{a^3} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \right) d\Omega. \quad (4)$$

Переходя снова к проекциям, получим

$$N_i = a^3 e_{ikl} H_{0l} H_{0m} \overline{n_k n_m} + 2e_{ikl} H_{0l} m_s \overline{n_k n_s} + \\ + e_{ikl} m_k H_{0m} \overline{n_l n_m} + \frac{2}{a^3} e_{ikl} m_k m_s \overline{n_l n_s}. \quad (5)$$

С помощью соотношения $\overline{n_k n_m} = \frac{1}{3} \delta_{km}$ (см. задачу 32) найдем, что два из четырех членов в правой части равенства (5) обратятся в нуль, а остальные дадут

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 \quad (6)$$

или окончательно, если выразить \mathbf{m} через постоянную намагниченность,

$$\mathbf{N} = \frac{4\pi a^3}{\mu + 2} \mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0. \quad (7)$$

Как видно из этой формулы, индуцированная часть магнитного момента $\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0\right)$ не дает вклада в результирующий момент сил.

$$294. \quad F = \frac{3}{16} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{m^2 (1 + \cos^2 \theta)}{a^4}, \quad N = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{m^2 \sin \theta \cos \theta}{8a^3}, \text{ где } a -$$

расстояние от магнита до плоскости, θ — угол между \mathbf{m} и нормалью к плоскости. При $\mu \gg 1$ (мягкое железо в слабом магнитном поле) получим такой же результат, как в случае электрического диполя, находящегося вблизи металлической плоскости (см. задачу 148).

295. Искомые величины можно получить путем замены в ответе к задаче 201 электрических величин на соответствующие магнитные. В частности, при произвольном выборе координатных осей внутреннее поле \mathbf{H}_1 в эллипсоиде запишется в виде

$$H_{1k} = H_{0k} - 4\pi N_{kl} M_l,$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности, N_{kl} — коэффициенты размагничивания (компоненты тензора размагничивающего действия формы). Главные значения этого тензора обозначены в задаче 197 через $n^{(i)}$ и называются там коэффициентами деполяризации.

296. Формула, приведенная в ответе предыдущей задачи, остается справедливой и в случае анизотропного магнетика. Имеет место еще одно соотношение, связывающее \mathbf{M} и \mathbf{H}_1 :

$$H_{1k} + 4\pi M_k = \mu_{kl} N_{ll}.$$

Из этих двух формул получаем

$$H_{0k} = b_{km} H_{1m},$$

где

$$b_{km} = \delta_{km} - N_{km} + N_{kl} \mu_{lm}.$$

Отсюда

$$H_{1k} = b_{km}^{-1} H_{0m},$$

где b_{km}^{-1} — компоненты обратного тензора. Они могут быть определены с помощью формул, полученных в задаче 11.

Рассмотрим один частный случай. Выберем оси координат вдоль главных осей эллипсоида. Если тензор μ_{ik} имеет в этих осях диагональный вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(z)} \end{pmatrix},$$

то тензор b_{ik} будет диагональным, поэтому и обратный тензор b_{ik}^{-1} также будет диагональным:

$$b_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} [1 + N^{(x)}(\mu^{(x)} - 1)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [1 + N^{(y)}(\mu^{(y)} - 1)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [1 + N^{(z)}(\mu^{(z)} - 1)]^{-1} \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

§ 1. Поляризация вещества в постоянном поле

297. $\beta = \frac{3}{4}a_0^3.$

Если заряд электрона распределен равномерно внутри сферы с радиусом a_0 то $\beta = a_0^3.$ ¹

299. Из симметрии молекулы очевидно, что одна из главных осей тензора поляризуемости будет совпадать с осью молекулы, а две другие оси могут быть выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной оси молекулы. Поэтому из трех главных значений тензора поляризуемости только два будут различны: $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} = \beta^{(3)}$. Для их определения нужно отдельно рассмотреть следующие случаи:

а) Внешнее поле направлено по оси молекулы. Очевидно, что индуцированный дипольный момент каждого из атомов будет направлен вдоль внешнего поля. Обозначив эти моменты соответственно через \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' , получим для их определения два уравнения

$$\mathbf{p}' = \beta'(\mathbf{E} + \mathbf{E}'), \quad \mathbf{p}'' = \beta''(\mathbf{E} + \mathbf{E}''), \quad (1)$$

где \mathbf{E} — внешнее поле, \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' — дополнительные поля, вызываемые в центре каждого из атомов присутствием другого атома. Поля \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' можно выразить через дипольные моменты соответствующих атомов, воспользовавшись формулой для напряженности поля, создаваемого диполем с моментом \mathbf{p} и учитывая, что все векторы направлены вдоль оси молекулы.

¹ Модель, рассмотренная в этой задаче, очень груба и позволяет получить лишь порядковую оценку. Точный квантовомеханический расчет дает для водорода $\beta = \frac{9}{2}a_0^3.$

Определяя затем p' и p'' из системы (1), с помощью формулы $p = p' + p'' = \beta^{(1)}E$ найдем

$$\beta^{(1)} = \frac{1}{\frac{1}{\beta'} - \frac{2(a^3 + 2\beta')}{a^3(a^3 + 2\beta')}} + \frac{1}{\frac{1}{\beta''} - \frac{2(a^3 + 2\beta'')}{a^3(a^3 + 2\beta')}}.$$

б) Внешнее поле перпендикулярно оси молекулы. Аналогичным путем получаем

$$\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \frac{1}{\frac{1}{\beta'} + \frac{a^3 - \beta'}{a^3(a^3 - \beta')}} + \frac{1}{\frac{1}{\beta''} + \frac{a^3 - \beta''}{a^3(a^3 - \beta')}}.$$

При $\beta' = \beta''$ выражения $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(3)}$ упрощаются:

$$\beta^{(1)} = \frac{2\beta'}{1 - \frac{2\beta'}{a^3}}, \quad \beta^{(2)} = \frac{2\beta'}{1 + \frac{\beta'}{a^3}}.$$

Средняя поляризуемость

$$\bar{\beta} = \frac{1}{3}(\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) = \frac{2}{3}\beta' \left(\frac{1}{1 - \frac{2\beta'}{a^3}} + \frac{2}{1 + \frac{\beta'}{a^3}} \right).$$

301. а) Диэлектрик в целом будет анизотропным. Главные значения тензора поляризуемости диэлектрика (ср. (VI.4')):

$$\alpha^{(i)} = \frac{N\beta^{(i)}}{1 - \frac{4\pi}{3}N\beta^{(i)}}.$$

б) В случае беспорядочной ориентации молекул в макроскопических объемах диэлектрика не будет никаких физически выделенных направлений, кроме направления внешнего поля. Поэтому средний дипольный момент молекулы \bar{p} будет пропорционален действующему на молекулу полю \mathcal{E} :

$$\bar{p} = \beta\mathcal{E}.$$

С другой стороны, имеем, очевидно:

$$\bar{p}_i = \overline{\beta_{ik} \mathcal{E}_k} = \bar{\beta}_{ik} \mathcal{E}_k,$$

где усреднение производится по макроскопическому малому объему. Из сравнения двух последних формул следует, что

$$\beta = \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{22} = \bar{\beta}_{33}, \quad \bar{\beta}_{ik} = 0 \quad (\text{при } i \neq k).$$

Таким образом,

$$\beta = \frac{1}{3}(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}).$$

Но сумма диагональных компонент тензора есть инвариант, равный сумме главных значений $\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}$ (см. задачу 9). Поэтому

$$\beta = \frac{1}{3}(\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}).$$

Коэффициент поляризации диэлектрика α связан с β обычной формулой (VI.4').

302. Если ось молекулы ориентирована под углом θ к направлению внешнего поля \mathbf{E}_0 , то энергия молекулы запишется в виде

$$W = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}(\beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta) E_0^2.$$

Число частиц в единице объема, оси которых направлены под углом θ относительно \mathbf{E}_0 , дается формулой Больцмана (VI.6). В условии нормировки (VI.7) величина N должна иметь смысл числа частиц в единице объема. Вектор поляризации определяется формулой $\mathbf{P} = N\bar{\mathbf{p}}$, где $\bar{\mathbf{p}}$ — усредненный по распределению Больцмана дипольный момент одной молекулы. Поскольку в отсутствие поля молекулы ориентированы хаотически, $\bar{\mathbf{p}}$ будет иметь направление внешнего поля.

В соответствии с этим вычисляем величину \bar{p} по формуле

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \int p_{\parallel} dN = \frac{E_0 \int_0^{\pi} \exp\left(-\frac{W(\theta)}{kT}\right) (\beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \exp\left(-\frac{W(\theta)}{kT}\right) \sin \theta d\theta},$$

где через p_{\parallel} обозначена компонента дипольного момента молекулы, параллельная полю. По условию задачи поле — слабое, поэтому достаточно

учитывать только члены, линейные по $\alpha = \frac{(\beta_1 - \beta_2)E_0^2}{2kT} \ll 1$. Используя далее формулы $P = N\bar{p} = \alpha E_0$, получим окончательно

$$\alpha = N\beta_2 + \frac{1}{3}N(\beta_1 - \beta_2) \left[1 + \frac{2}{15} \frac{(\beta_1 - \beta_2)E_0^2}{kT} \right].$$

Как видно из этой формулы, зависимость между P и E_0 получается нелинейной, и α не является коэффициентом пропорциональности, не зависящим от E_0 . Оценим величину поправочного члена при обычных температурах ($T = 300$ К). Считая $\beta_1 - \beta_2$ порядка 10^{-24} см³, получим $\frac{kT}{\beta_1 - \beta_2} \approx 10^6$. Таким образом, этот член мал, если $E_0 \ll 10^3$ в/см. Пренебрегая поправочным членом, получим для α прежнее выражение:

$$\alpha = \frac{1}{3}N(\beta_1 + 2\beta_2)$$

(см. задачу 301).

305. Дополнительный потенциал, обусловленный квадрупольной поляризацией диэлектрика, запишется в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{\partial^2(1/R)}{\partial x_i \partial x_k} Q_{ik} dV. \quad (1)$$

где R — расстояние от точки наблюдения до элемента объема dV , а интегрирование ведется по объему диэлектрика. С другой стороны, потенциал объемных и поверхностных зарядов в общем случае имеет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho'}{R} dV + \int \frac{\sigma'}{R} dS + \int \tau' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dS, \quad (2)$$

где ρ' — плотность объемных зарядов, σ' — плотность поверхностных зарядов, τ' — мощность двойного слоя. Приведя (1) к виду (2), получим

$$\rho' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \sigma' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q_{in}}{\partial x_i}, \quad \tau'_k = \frac{1}{2} Q_{ki} n_i. \quad (3)$$

Таким образом, квадрупольная поляризация эквивалентна объемным зарядам ρ' внутри диэлектрика, поверхностным зарядам σ' и двойному электрическому слою с мощностью τ' на поверхности диэлектрика. Поскольку

плотности объемных и поверхностных зарядов в диэлектрике связаны с вектором поляризации формулами $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}'$, $\sigma' = P'_n$, то из (3) следует, что квадрупольная поляризация эквивалентна дополнительной дипольной поляризации

$$P'_k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_i}$$

и двойному слою с мощностью τ'_k .

Формулы (3) можно получить также из рассмотрения энергии диэлектрика, обусловленной квадрупольной поляризацией.

$$306. \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \left[1 + 3x + 3 \left(1 + \frac{2}{3}x + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

где $x = 4\pi N\beta$. Поляризуемость β для полярных веществ в слабых полях дается формулой

$$\beta = \frac{p^2}{3kT},$$

где p — дипольный момент молекулы, k — постоянная Больцмана, T — температура.

При $x \ll 1$, когда отличие действующего на молекулу поля от среднего поля становится очень малым,

$$\varepsilon = 1 + x = 1 + 4\pi N\beta.$$

307. Полная магнитная восприимчивость равна сумме парамагнитной и диамагнитной восприимчивостей (см. [101]):

$$\chi = \frac{Nm^2}{3kT} - \frac{Ne^2}{6mc^2} \overline{r^2}. \quad (1)$$

Входящий в эту формулу магнитный момент одного ротатора m может быть вычислен следующим образом. На основе известной теоремы имеем

$$m = \frac{e}{2mc} K, \quad (2)$$

где K — момент количества движения частицы. В случае ротатора K связан с кинетической энергией формулой

$$W_k = \frac{K^2}{2ma^2}. \quad (3)$$

Поэтому среднее статистическое значение $\overline{K^2}$ выражается через среднюю кинетическую энергию:

$$\overline{K^2} = 2ma^3\overline{W}_k. \quad (4)$$

Но средняя кинетическая энергия \overline{W}_k может быть найдена по теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Поскольку ротатор имеет две степени свободы, $\overline{W}_k = kT$. Подставляя (4) и (2) в (1), находим $\chi = 0$. Этот результат находится в соответствии с общей теоремой, согласно которой полный магнитный момент тела, подчиняющегося классической статистике, равен нулю. Отличный от нуля магнитный момент получается только в том случае, когда делается предположение о существовании дискретных электронных орбит в атомах. Но такое предположение означает выход за рамки классической теории¹.

308. Концентрации, ионов (N) и электронов (n) определяются по формуле Больцмана (VI.6):

$$N = N_0 e^{-\frac{Ze\varphi}{kT}}, \quad n = n_0 e^{\frac{e\varphi}{kT}}, \quad (1)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — электростатический потенциал. Множители перед экспонентами выбраны так, чтобы при $T \rightarrow \infty$, когда взаимодействие частиц становится несущественным, N и n переходили бы в N_0 и n_0 . На основе (1) плотность заряда запишется в виде

$$\rho = ZeN - en = e \left(ZN_0 e^{-\frac{Ze\varphi}{kT}} - n_0 e^{\frac{e\varphi}{kT}} \right). \quad (2)$$

Потенциал φ должен быть определен путем решения уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi e \left(ZN_0 e^{-\frac{Ze\varphi}{kT}} - n_0 e^{\frac{e\varphi}{kT}} \right). \quad (3)$$

Чтобы решить это уравнение, используем условие малости энергии взаимодействия по сравнению с тепловой энергией:

$$\left| \frac{Ze\varphi}{kT} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{e\varphi}{kT} \right| \ll 1.$$

Разлагая экспоненты в ряд с точностью до членов, линейных по φ , и используя условие электронейтральности газа $ZN_0 = n_0$, получим

$$\rho = -\frac{\chi^2}{4\pi}\varphi, \quad \chi^2 = \frac{4\pi e^2(Z^2 N_0 + n_0)}{kT}. \quad (4)$$

¹Подробнее об этом см., например, [70].

Это позволяет записать уравнение (3) в виде

$$\Delta\varphi = \kappa^2\varphi. \quad (5)$$

Потенциал φ может зависеть только от расстояния r до рассматриваемого иона. Сферически симметричное решение (5) имеет вид

$$\varphi = C_1 \frac{e^{-\kappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\kappa r}}{r}.$$

Потенциал не может возрастать на бесконечности, поэтому $C_2 = 0$. C_1 определяется из условия, что при $r \ll \frac{1}{\kappa}$ потенциал должен переходить в чисто кулоновский потенциал рассматриваемого иона:

$$\varphi|_{r \ll 1/\kappa} = \frac{Ze}{r} = \frac{C_1}{r}, \quad C_1 = Ze.$$

Таким образом, ион окружен «облаком» электронов и других ионов, плотность которого убывает по экспоненциальному закону, а средний радиус $1/\kappa$ тем меньше, чем ниже температура.

Рассмотренный в этой задаче метод вычисления потенциала принадлежит Дебаю и Хюккелю и применялся ими в теории сильных электролитов. Константа $1/\kappa$ называется радиусом Дебая–Хюккеля.

309. Электрическая индукция внутри пластинки описывается формулой

$$D(x) = E_0 \frac{\operatorname{ch} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa h},$$

где $\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon kT}}$. При $\kappa h \gg 1$ имеем вблизи поверхностей $x = \pm h$

$$D(x) = E_0 e^{-\kappa(h-|x|)},$$

отсюда следует, что при $|x - h| \gg \frac{1}{\kappa}$, $D(x) = 0$, т.е. поле проникает в проводник на глубину $1/\kappa$. В слое такой же толщины концентрируется заряд

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} = \pm \frac{\kappa E_0}{4\pi} e^{-\kappa(h-|x|)}.$$

Плотность «поверхностного» заряда, которая рассматривается в макроскопической теории, получается интегрированием ρ . На границе $x = h$ получим

$$\sigma = \int \rho dx = -\frac{\kappa E_0}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-\kappa x'} dx' = \frac{E_0}{4\pi},$$

что совпадает с обычным граничным условием на поверхности проводника.

$$310. \quad \varphi = \varphi_0 \frac{\text{sh } \kappa x}{\text{sh } \kappa h}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{\epsilon kT}}.$$

Значение κ^2 в данном случае получается вдвое бóльшим, чем в предыдущей задаче, так как имеются два сорта подвижных ионов.

§ 2. Поляризация вещества в переменном поле

$$311. \quad \epsilon = 1 + 4\pi N a^3, \quad \mu = 1 - 2\pi N a^3 < 1.$$

Такой диэлектрик является диамагнитным. Проницаемости ϵ и μ не зависят от частоты вследствие предположения об идеальной проводимости сфер.

Для того чтобы искусственный диэлектрик можно было рассматривать как сплошную среду, должны выполняться условия

$$\lambda \gg l, \quad \lambda \gg a,$$

где l — среднее расстояние между сферами. Пренебрегать отличием действующего поля от среднего можно лишь при малой поляризуемости среды (т. е. при $4\pi N a^3 \ll 1$).

312. Уравнение движения электрона запишется в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \eta\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Его частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)},$$

где $\gamma = \frac{\eta}{m}$.

Дипольный момент единицы объема получим умножением \mathbf{r} на заряд электрона e на число частиц в единице объема N , после чего определяются поляризуемость среды $\alpha(\omega)$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega)$:

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \quad (2)$$

С помощью уравнения (1) и закона Ома найдем связь между удельным сопротивлением ρ и коэффициентом η :

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{\eta}{Ne^2}. \quad (3)$$

Этот же результат можно получить путем сравнения диэлектрической проницаемости (2) с комплексной диэлектрической проницаемостью (VIII.8), выраженной через проводимость:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4)$$

Отделяя в формуле (2) вещественную и мнимую части, находим

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N \gamma}{m(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (5)$$

Из формул (5) следует, что ε' и σ зависят от частоты. При $\omega \ll \gamma$ они принимают свои статические значения

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} < 1, \quad \sigma = \frac{e^2 N}{m\gamma}.$$

Как следует из (4), (5), комплексная диэлектрическая проницаемость проводящей среды при малых частотах ($\omega \rightarrow 0$) обращается в бесконечность. При больших частотах она принимает вид

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Такая зависимость $\varepsilon(\omega)$ при больших частотах справедлива также и для диэлектриков.

Оценим порядок величины $\gamma = \frac{\eta}{m}$ для меди (проводимость в статическом случае $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$). Из формулы (3) следует:

$$\gamma = \frac{Ne^2}{\sigma m} = \frac{N_0 e^2 d}{\sigma m A},$$

где $N_0 \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ — число Авогадро, $A \approx 63,5 \text{ г/моль}$ — атомный вес и $d \approx 8,9 \text{ г/см}^3$ — плотность меди. Оценка дает $\gamma \approx 10^{+14} \text{ сек}^{-1}$; для сравнения укажем, что видимой части спектра соответствуют частоты $\approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$.

Таким образом, в этом случае можно считать, что проводимость сохраняет значение, которое она имеет в стационарном случае, вплоть до частот, лежащих в инфракрасной области спектра. Однако нужно иметь в виду,

что при высоких частотах, когда длина свободного пробега электрона становится сравнимой с глубиной проникновения поля в металл, начинают сказываться эффекты пространственной неоднородности поля и макроскопическая величина ϵ (диэлектрическая проницаемость) теряет смысл. (Подробнее об этом см. [34, 66], § 67.)

Полученные в этой задаче результаты в ограниченной области частот применимы к металлу, а также к полупроводнику и к ионизованному газу (плазме), если движением положительных ионов можно пренебречь. Вычисление диэлектрической проницаемости плазмы с учетом движения положительных ионов см. ниже в задаче 321.

313. Молекулы диэлектрика не обладают сферической симметрией, поэтому внешнее поле \mathbf{E}_0 частично ориентирует их, и диэлектрик в целом становится анизотропным. При этом ориентирующим действием переменного поля, в силу условия $\mathcal{E} \ll E_0$, можно пренебречь. Поскольку причиной анизотропии является внешнее электрическое поле \mathbf{E}_0 , одна из главных осей тензора диэлектрической проницаемости будет совпадать с его направлением, остальные две главные оси будут перпендикулярны \mathbf{E}_0 .

Обозначим компоненты поляризуемости молекулы в этих осях через β'_{ik} (значения $i, k = 1$ соответствуют оси, параллельной \mathbf{E}_0). β'_{ik} выразятся через $\beta^{(i)}$ по обычной формуле:

$$\beta'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} \beta_{lm} = (\beta - \beta') \alpha_{i1} \alpha_{k1} + \beta' \delta_{ik},$$

где α_{il} — косинусы углов между осями симметрии молекулы и главными осями тензора диэлектрической проницаемости (использовано соотношение $\alpha_{il} \alpha_{kl} = \delta_{ik}$, вытекающее из ортогональности матрицы α_{ik}). Чтобы подсчитать тензор диэлектрической восприимчивости для единицы объема диэлектрика, нужно найти с помощью формулы Больцмана статистические средние величин β'_{ik} , т. е. усреднить произведение $\alpha_{i1} \alpha_{k1}$.

Если обозначить полярные углы оси симметрии молекулы в штрихованной системе через ϑ, φ , то величины α_{1i} запишутся так:

$$\alpha_{11} = \cos \vartheta, \quad \alpha_{12} = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \alpha_{13} = \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Проводя усреднение с помощью формулы Больцмана (как в задаче 302), получим с точностью до членов, линейных по $a = \frac{(\beta_0 - \beta'_0) E_0^2}{2kT}$:

$$\overline{\alpha_{11}^2} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{15} a \right), \quad \overline{\alpha_{12}^2} = \overline{\alpha_{13}^2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{15} a \right),$$

$$\overline{\alpha_{i1} \alpha_{k1}} = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

(β_0 и β'_0 — статические значения тензора поляризуемости молекулы). Отсюда

$$\begin{aligned}\overline{\beta'_{11}} &= \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{4}{15}a\right) + \beta', \\ \overline{\beta'_{22}} = \overline{\beta'_{33}} &= \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{2}{15}a\right) + \beta'.\end{aligned}$$

Пренебрегая отличием действующего на молекулу поля от среднего, получим главные значения тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{11}}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{22}}.$$

Этот результат показывает, что в сильном постоянном электрическом поле диэлектрик становится анизотропным по отношению к высокочастотным (например, световым) колебаниям. Возникновение анизотропии под действием постоянного электрического поля носит название эффекта Керра. Инерционность этого эффекта очень мала: время установления или исчезновения анизотропии — порядка 10^{-10} сек. (Оно определяется временем установления статистического равновесия в диэлектрике.) Явление Керра широко используется в технике для быстрой модуляции силы света.

314. Считая параметр $\frac{pE_0}{kT} = a$ малым, получим с точностью до членов порядка a^2 :

$$\begin{aligned}\overline{\beta'_{11}} &= \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{2}{15}a^2\right) + \beta', \\ \overline{\beta'_{22}} = \overline{\beta'_{33}} &= \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{1}{15}a^2\right) + \beta', \\ \varepsilon^{(1)} &= 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{11}}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta'_{22}}.\end{aligned}$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

315. Пусть амплитуда поля \mathcal{E} увеличится на $d\mathcal{E}$ ($d\mathcal{E}_x, d\mathcal{E}_y, d\mathcal{E}_z$). При этом над молекулой будет совершена работа

$$dA = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{p} \cdot d\mathcal{E}^*) = \frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot d\mathcal{E}^* + \mathbf{p}^* \cdot d\mathcal{E}), \quad (1)$$

где $p_i = \beta_{ik}E_k$ — компонента дипольного момента системы. Поскольку поглощение энергии отсутствует, эта работа целиком идет на увеличение средней потенциальной энергии молекулы во внешнем поле:

$$dA = \overline{dW}.$$

Поэтому выражение dA должно быть полным дифференциалом некоторой функции амплитуды поля — энергии системы. Перепишем $d\bar{W}$ в виде

$$d\bar{W} = \frac{1}{4} \sum_{i,k} (\beta_{ik} \mathcal{E}_k d\mathcal{E}_i^* + \beta_{ki} \mathcal{E}_i d\mathcal{E}_k^*). \quad (2)$$

Видно, что эта величина будет представлять собою полный дифференциал только в том случае, если $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$; тогда

$$d\bar{W} = \frac{1}{4} \sum_{i,k} \beta_{ik} (\mathcal{E}_k d\mathcal{E}_i^* + \mathcal{E}_i^* d\mathcal{E}_k) = \frac{1}{4} \sum_{i,k} \beta_{ik} d(\mathcal{E}_i^* \mathcal{E}_k) = d\left(\frac{1}{4} \mathbf{p} \cdot \mathcal{E}^*\right),$$

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \mathbf{p} \cdot \mathcal{E}^*.$$

Точно так же можно доказать эрмитовость тензора магнитной поляризуемости для системы, внутри которой не происходит диссипации энергии.

317. Уравнение движения атомного электрона, связанного с ядром упругой силой, запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \left[\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}_0 \right) \right],$$

где ω_0 — частота собственных колебаний. Решая его методом последовательных приближений, получим в линейном по H_0 приближении:

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - i \frac{e\omega}{m^2 c (\omega_0^2 - \omega^2)^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0).$$

Чтобы получить тензор поляризуемости атома, используем запись векторного произведения с помощью антисимметричного тензора e_{ikl} (см. задачу 26). Это даст

$$\beta_{ik} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \delta_{ik} - i \frac{e^2 \omega H_{0l}}{m^2 c (\omega_0^2 - \omega^2)^2} e_{ikl}.$$

В соответствии с общим положением, доказанным в задаче 315, этот тензор является эрмитовым. Вектор гирации (см. задачу 316) в данном случае имеет вид

$$\mathbf{g} = - \frac{e^2 \omega}{m^2 c (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \mathbf{H}_0 = - \frac{2e\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \omega_L,$$

где $\omega_L = \frac{eH_0}{2mc}$ — ларморова частота.

318.

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) & \frac{l}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) & 0 \\ -\frac{l}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-) & \frac{1}{2}(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^0 \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm 2\omega_L) - \omega_0^2}, \quad \varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

Вектор гирации равен по величине

$$g = \frac{1}{2}(\varepsilon^+ - \varepsilon^-)$$

и направлен по оси z .

Результат предыдущей задачи получается из найденного точного решения при выполнении условия $2\omega_L\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$.

319. Тензор ε_{ik} имеет такой же вид, как и в предыдущей задаче. Но его компоненты ε^\pm и ε^0 определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega(i\gamma \pm 2\omega_L)},$$

$$\varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma},$$

$$\gamma = \frac{\eta}{m}, \quad \omega_L = -\frac{eH_0}{2mc} > 0, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}.$$

Из-за наличия «трения» ($\eta \neq 0$) в электронном газе происходит диссипация энергии, и тензор ε_{ik} неэрмитов.

320. $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + (\mathbf{E} \times \mathbf{a}),$

где

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m\gamma}, \quad \mathbf{a} = \frac{e^3 N}{m^2 \gamma^2 c} \mathbf{H}_0, \quad \gamma = \frac{\eta}{m}.$$

Магнитное поле приводит к возникновению тока, перпендикулярного электрическому полю (ток Холла).

Обратная зависимость в том же приближении имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + R(\mathbf{j} \times \mathbf{H}_0),$$

где $R = \frac{1}{ceN}$ — постоянная Холла.

Тензор электропроводности:

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik} - e_{ikl} a_l.$$

321. Обозначим массу, скорость и заряд электрона через m , $\dot{\mathbf{r}}$, $-e$ а те же величины, относящиеся к иону, через M , $\dot{\mathbf{R}}$, $+e$. Тогда получим следующую систему уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \frac{e}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0) - m\gamma(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}), \\ M\ddot{\mathbf{R}} &= e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}(\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}_0) - m\gamma(\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{r}}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{H}_0 — постоянное и однородное магнитное поле, $m\gamma$ — коэффициент «трения»; сила трения пропорциональна относительной скорости электронов и ионов, т. е. разностям $(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}})$ и $(\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{r}})$ для электронов и ионов соответственно. Электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ зависит от времени по гармоническому закону.

Ищем решение системы (1) в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Выберем направление \mathbf{H}_0 за ось z и введем циклические компоненты векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{R}_0 по формулам

$$r_{0\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{0x} \pm ir_{0y}), \quad R_{0\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(R_{0x} \pm IR_{0y}).$$

Подставим (2) в (1) и сложим получившиеся уравнения:

$$-i\omega(m\mathbf{r}_0 + M\mathbf{R}_0) = \frac{e}{c}[(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}_0].$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде

$$-i\omega[(M + m)\mathbf{R}_0 + m(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0)].$$

Пренебрегая m по сравнению с M , получим

$$\omega R_{0\pm 1} = \left(\pm \Omega_H + \omega \frac{m}{M} \right) s_{\pm 1}, \quad (3)$$

где

$$\Omega_H = \frac{eH_0}{Mc} \quad \text{и} \quad \mathbf{s} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0.$$

Затем поделим первое из уравнений (1) на m , второе на M и вычтем их друг из друга. Пренебрегая членами $\frac{eE}{M}$ по сравнению с $\frac{eE}{m}$, $\frac{m}{M}\gamma s$ по сравнению с γs , $\frac{e}{Mc}(\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}_0)$ по сравнению с $\frac{e}{mc}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0)$, обозначив $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ и используя (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} (-i\omega + \gamma \mp i\omega_H)s_{\pm 1} \mp i\omega_H R_{0\pm 1} &= \frac{e}{m}E_{0\pm 1}, \\ -\omega^2 s_z &= \frac{eE_{0z}}{m} + i\omega\gamma s_z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим \mathbf{s} .

Вектор поляризации \mathbf{P} вычисляется по формуле $\mathbf{P} = Nese^{-i\omega t}$, где N — число ионов (равное числу электронов) в единице объема.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости запишутся в виде

$$\epsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + i\gamma \pm \omega_H - \frac{\omega_H\Omega_H}{\omega}\right)}, \quad \epsilon^{(z)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}.$$

Компонента $\epsilon^{(z)}$ имеет такой же вид, как скалярная диэлектрическая проницаемость в отсутствие магнитного поля, полученная в задаче 312; она неограниченно возрастает при $\omega \rightarrow 0$. Компоненты ϵ^{\pm} при учете движения ионов содержат в знаменателе лишний член $\omega_H\Omega_H$; им можно пренебречь при $\frac{\Omega_H}{\omega} \ll 1$, т. е. при больших частотах ω . Однако при малых частотах этот член становится существенным; при $\omega \rightarrow 0$ он приводит к тому, что компоненты ϵ^{\pm} остаются конечными: $\epsilon^{\pm} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H\Omega_H}$. Благодаря этому в плазме могут существовать волны весьма малой частоты (магнитогидродинамические волны). Распространение электромагнитных волн в плазме с учетом колебаний положительных ионов рассматривается ниже в задаче 445.

322. В системе координат, ось x_3 которой совпадает с выделенным направлением, тензор T_{ik} должен иметь вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T & T_a & 0 \\ -T_a & T & 0 \\ 0 & 0 & T_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Это согласуется с результатами, полученными в задачах 318, 319 и др.

324. Поскольку включение поля происходит в момент $t = 0$, то из принципа причинности следует, что $P(t) = 0$ при $t < 0$. Обозначив диэлектрическую восприимчивость через $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, получим

$$P(t) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega') E(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega', \quad (1)$$

где $E(\omega')$ — компонента Фурье поля $E(t) = E_0 \delta(t)$. Умножим (1) на $e^{i\omega t}$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до 0 . В силу условия $P(t) = 0$ при $t < 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \alpha(\omega') \int_{-\infty}^0 e^{-i(\omega' - \omega)t} dt = 0. \quad (2)$$

Используя (П 1.17) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3)$$

откуда следуют соотношения Крамерса — Кронига.

$$325. \quad \varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

327.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D}' &= 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

§ 3. Ферромагнитный резонанс

328. $M_x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$, $M_y = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$, $M_z = C$, где $\omega_0 = \gamma H_0$, α — начальная фаза, A и C — константы, связанные условием $M^2 = M_0^2$, т. е. $A^2 + C^2 = M_0^2$, где M_0 — намагниченность насыщения. Движение вектора намагниченности представляет собою обычную лармову прецессию.

329. Ищем решение уравнения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}_0 + \omega_r(\chi_0\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) \quad (1)$$

в виде $M_x = m_x e^{-i\omega t}$, $M_y = m_y e^{-i\omega t}$, $M_z = M_0 + m_z e^{-i\omega t}$, где ω — неизвестная частота; ось z направлена вдоль \mathbf{H}_0 .

Проектируя (1) на оси координат и подставляя \mathbf{M} , получим систему алгебраических уравнений, условие совместности которой имеет вид

$$\omega_0^2 - (\omega + i\omega_r)^2 = 0.$$

Частота ω оказывается комплексной: $\omega = \omega_0 - i\omega_r$; наличие потерь приводит, как обычно, к затухающему движению. Компоненты m_x и m_y сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Вектор \mathbf{M} совершает затухающую прецессию вокруг \mathbf{H}_0 .

330. Если выбрать ось a вдоль \mathbf{H} , то полное магнитное поле будет иметь составляющие $h_x e^{-i\omega t}$, $h_y e^{-i\omega t}$, $H_0 + h_z e^{-i\omega t}$. Ищем решение уравнения Ландау–Лифшица (VI.15) в виде

$$M_x = m_x e^{-i\omega t}, \quad M_y = m_y e^{-i\omega t}, \quad M_z = M_0 + m_z e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где M_0 — намагниченность насыщения. Эта форма решения соответствует предположению, что ларморова прецессия прекратилась вследствие затухания и колебания поддерживаются только высокочастотным (вынуждающим) полем. Поэтому нужно считать величины m_x , m_y , m_z малыми, порядка не ниже h . Подставляя (1) в уравнение Ландау–Лифшица и отбрасывая квадратичные по h и m члены, определим компоненты m :

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x - \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \\ m_y &= \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x - \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \quad m_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Как видно из этих формул, характер зависимости m_x и m_y от ω при фиксированной $\omega_0 = \gamma H_0$ или от H_0 при заданной ω — резонансный: в точке $\omega = \omega_0$ компоненты m_x и m_y неограниченно возрастают, наступает ферромагнитный резонанс.

Неограниченное возрастание амплитуды m связано с приближенным методом решения уравнения Ландау–Лифшица. Точное решение (см. задачу 332) должно обеспечивать постоянство длины $|\mathbf{M}|$, так как из уравнения Ландау–Лифшица следует $M^2 = \text{const}$. При решении задачи методом последовательных приближений с учетом потерь \mathbf{M} также остается ограниченным.

331.

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_{\perp} & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\chi_{\perp} = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi_a = \chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_{\perp} = 1 + 4\pi\chi_{\perp}, \quad \mu_a = 4\pi\chi_a, \quad \mu_{\parallel} = 1.$$

Как видно из приведенных формул, χ_{ik} и μ_{ik} — эрмитовы тензоры ($\mu_{ik} = \mu_{ki}^*$). Это означает, что среда является гиротропной, а потери отсутствуют.

Графики зависимости компонент μ_{ik} от частоты приведены на рис. 72.¹ $H_{\text{рез}} \approx 3400$ э.

$$332. \quad M_x = \frac{\omega_1}{Dl\omega} C \cos \omega t, \quad M_y = \frac{\omega_1}{Dl\omega} C \sin \omega t, \quad M_z = C,$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$, $\omega_0 = \gamma H_0$, $\omega_1 = \gamma h$. Постоянная C может быть определена из условия $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2$, которое следует из уравнения Ландау-Лифшица:

$$C = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0,$$

где $\Omega = \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}$.

В выражение C входит модуль $|\Delta\omega|$, так как $M_z > 0$. Компоненты M примут вид:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \pm \frac{\omega_1}{\Omega} M_0 \cos \omega t = \chi h_x, \\ M_y &= \pm \frac{\omega_1}{\Omega} M_0 \sin \omega t = \chi h_y, \quad M_z = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь знак \pm соответствует знаку $\delta\omega$. Как следует из этих равенств, связь между M и h нелинейна, коэффициент пропорциональности χ зависит от h :

$$\chi = \pm \frac{\gamma M_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}}.$$

¹Рис. 72 и 73 взяты из книги А. Г. Гуревича [48].

Угол прецессии ϑ (угол между \mathbf{M} и (\mathbf{H}_0)) определяется равенством

$$\sin \vartheta = \frac{M_{\perp}}{M_0} = \frac{\omega_1}{\Omega},$$

где $M_{\perp} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$. При ферромагнитном резонансе $\Delta\omega = 0$, и из (1) получим

$$M_x = \pm M_0 \cos \omega t, \quad M_y = \pm M_0 \sin \omega t, \quad M_z = 0.$$

Вектор \mathbf{M} в этом случае вращается с частотой ω в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H}_0 , его компоненты не обращаются в бесконечность.

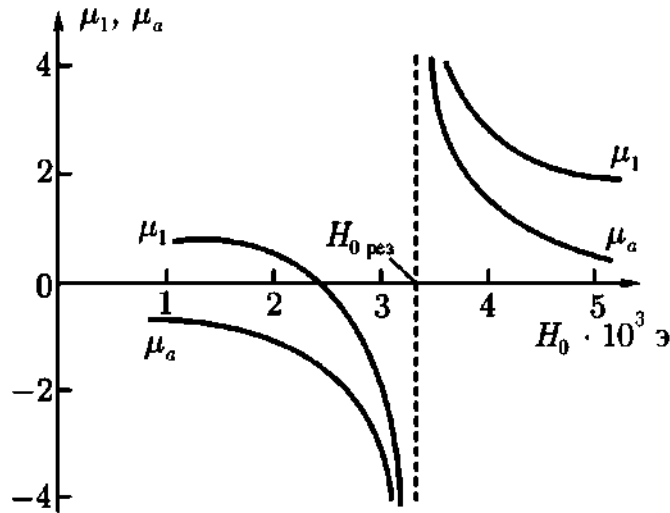


Рис. 72

333. $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}e^{-i\omega t}$, где \mathbf{M}_0 имеет направление \mathbf{H}_0 , а компоненты \mathbf{m} определяются формулами

$$m_x = \chi \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x - i\chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y,$$

$$m_y = i\chi \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x + \chi_0 \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y,$$

$$m_z = \chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\omega} h_z,$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}, \quad \omega_0 = \gamma H_0.$$

Как видно из этих формул, наличие потерь ($\omega_r \neq 0$) приводит к тому, что при резонансе амплитуда m остается конечной.

334.

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_{\perp} &= \mu'_{\perp} + i\mu''_{\perp}, \\ \mu_a &= \mu'_a + i\mu''_a, \end{aligned}$$

$$\mu'_{\perp} = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\Omega^2(\Omega^2 - \omega^2) + 2\omega^2\omega_r^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu''_{\perp} = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_r(\Omega^2 + \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu''_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_0(\Omega^2 - \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

$$\mu''_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega^2\omega_0\omega_r}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2},$$

где

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}, \quad \omega_0 = \gamma H_0,$$

$$\mu_{\parallel} = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\omega}, \quad H_{0\text{рез}} \approx 3400 \text{ э.}$$

Графики зависимости μ'_{\perp} и μ''_{\perp} от постоянного поля H_0 приведены на рис. 73. Зависимость μ'_a и μ''_a от H_0 имеет аналогичный вид.

Мнимые части μ''_{\perp} и μ''_a имеют максимумы при $H_0 = H_{0\text{рез}} \approx \frac{\omega}{\gamma}$, а вещественные части μ'_{\perp} , μ'_a принимают экстремальные значения при $H_0 \approx \frac{\omega \pm \omega_r}{\gamma}$.

Кривые, изображенные на рис. 73, имеют такой же характер, как дисперсионные кривые для $\varepsilon(\omega)$ (см. рис. 16).

Мнимые части компонент тензора μ''_{\perp} и μ''_a , μ''_{\parallel} определяют диссипацию электромагнитной энергии. Они обращаются в нуль при $\omega_r = 0$.

335. $\Delta H_0 = \frac{\omega_r}{\gamma}$.

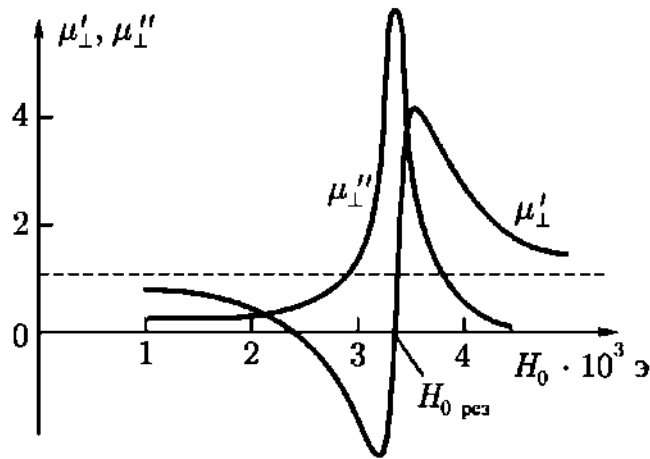


Рис. 73

336. Выберем оси координат вдоль главных осей эллипсоида, ось z направим вдоль поля H_0 . В этих осях тензор N_{ik} имеет диагональный вид. Поэтому уравнение Ландау–Лифшица в проекциях на оси координат запишется так:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= -\gamma [H_0 + 4\pi(N^{(y)} - N^{(z)})M_z] M_y, \\ \dot{M}_y &= \gamma [H_0 + 4\pi(N^{(x)} - N^{(z)})M_z] M_x, \\ \dot{M}_z &= -4\pi\gamma(N^{(x)} - N^{(y)})M_x M_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, уравнения становятся нелинейными. Предполагая, что отклонения вектора M от равновесного положения (направление оси z) малы, ищем решение в виде

$$M = M_0 + m e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где вектор M_0 направлен вдоль оси z . Если пренебречь членами с m^2 , которые войдут в систему (1) после подстановки (2), то система (1) линеаризуется. Приравнявая определитель системы нулю, находим

$$\omega^2 \equiv \omega_k^2 = \gamma^2 [H_0 + 4\pi(N^{(x)} - N^{(z)})M_0] [H_0 + 4\pi(N^{(y)} - N^{(z)})M_0].$$

$$\mathbf{337.} \quad \omega = \omega_k + i\omega_r \left[1 + \frac{\chi_0(N^{(x)} + N^{(y)})}{2} \right], \quad \chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)}M_0}.$$

Значение ω_k приведено в ответе к предыдущей задаче.

$$338. \chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_1 & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ось z направлена вдоль \mathbf{H}_0),

$$\chi_1 = \frac{1}{\Delta} \{ \gamma^2 M_0 [H_0 + (N^{(y)} - N^{(z)})M_0] - i\chi_0 \omega \omega_r \},$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\Delta} \{ \gamma^2 M_0 [H_0 + (N^{(x)} - N^{(z)})M_0] - i\chi_0 \omega \omega_r \},$$

где

$$\Delta = (\omega_k^2 - \omega^2) - i\omega \omega_r [2 + \chi_0(N^{(x)} + N^{(y)})],$$

$$\chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)}M_0}, \quad \chi_a = -\frac{1}{\Delta} \gamma \omega M_0.$$

Поскольку в выражения компонент тензора χ_{ik} входят размагничивающие факторы, положение резонанса и ширина резонансной линии будут зависеть от формы тела.

339. Система уравнений движения для векторов намагниченности \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} = -\gamma \mathbf{M}_1 \times (\mathbf{H}_0 - \lambda \mathbf{M}_2), \quad \frac{d\mathbf{M}_2}{dt} = -\gamma \mathbf{M}_2 \times (\mathbf{H}_0 - \lambda \mathbf{M}_1). \quad (1)$$

Ищем решение в виде $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_{10} + \mathbf{m}_1 e^{-i\omega t}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_{20} + \mathbf{m}_2 e^{-i\omega t}$ (\mathbf{M}_{10} , \mathbf{M}_{20} — равновесные значения \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2).

При решении системы (1) удобно перейти к циклическим компонентам

$$m_{j\pm} = m_{jx} \pm im_{jy} \quad (j = 1, 2).$$

Частоты собственной прецессии:

$$\omega_{01} = \gamma H_0, \quad \omega_{02} = \gamma \lambda |M_{10} - M_{20}|. \quad (2)$$

Формулы (2) справедливы при условии $\lambda |M_{10} - M_{20}| \gg H_0$. Частота ω_{01} имеет такую же величину, как и в случае ферромагнетика без подрешеток. Частота ω_{02} зависит от молекулярного поля и обычно сильно превышает ω_{01} .

§ 4. Сверхпроводимость

$$340. \quad \mathbf{j}_n = 0, \operatorname{div} \mathbf{j}_c = 0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \Lambda \mathbf{j}_c = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Исключая из этих уравнений \mathbf{j}_c или \mathbf{H} , получим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{j}_c &= \frac{1}{\delta^2} \mathbf{j}_c, \\ \Delta \mathbf{H} &= \frac{1}{\delta^2} \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{4\pi}}$ характеризует глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник (или толщину слоя, в котором сосредоточен сверхпроводящий ток).

$$341. \quad H_x = H_z = 0, H_y = H_0 \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right], j_x = j_y = 0, j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{cH_0}{4\pi\delta} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right].$$

$$342. \quad F_x = -\frac{1}{c} \int_0^\infty j_z H_y dx = \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

Сила F_x стремится вытолкнуть сверхпроводник из поля. В этом проявляется диамагнетизм сверхпроводника.

$$343. \quad H_x = H_z = 0, H_y = H_0 \frac{\operatorname{ch}(x/\delta)}{\operatorname{ch}(a/\delta)},$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_y &= \frac{1}{2a} \frac{1}{2c} \int_{-a}^a [\mathbf{r} \times \mathbf{j}_c]_y dx + \frac{1}{8\pi a} \int_{-a}^a x \frac{\partial H_y}{\partial x} dx = \\ &= \frac{1}{8\pi a} \int_{-a}^a (H_{0y} - H_0) dx = -\frac{H_0}{4\pi} \left(1 - \frac{\delta}{a} \operatorname{th} \frac{a}{\delta}\right). \end{aligned}$$

\overline{M}_y имеет знак, противоположный полю (диамагнетизм). При $\delta \ll a$ магнитный момент $\overline{M}_y \approx -\frac{H_0}{4\pi}$. Это отвечает средней магнитной восприимчивости $\kappa = -\frac{1}{4\pi}$ и проницаемости $\mu = 1 + 4\pi\kappa = 0$.

$$344. H_z = H_0 \frac{I_0(r/\delta)}{I_0(a/\delta)},$$

$$\overline{M}_z = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^a (H_z - H_0) r dr = -\frac{H_0}{4\pi} \left[1 - 2 \frac{\delta}{a} \frac{I_1(a/\delta)}{I_0(a/\delta)} \right],$$

где I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя.

345. Вне шара

$$H_r = \left(H_0 + \frac{2m}{r^3} \right) \cos \vartheta, \quad H_\vartheta = \left(-H_0 + \frac{m}{r^3} \right) \sin \vartheta,$$

где m — постоянная, имеющая смысл магнитного момента.

Внутри шара

$$j_\alpha = f(r) \sin \vartheta, \quad j_r = j_\vartheta = 0.$$

Функция $j_\alpha(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta j_\alpha - \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \cdot j_\alpha = 0$$

(см. ответ задачи 47), откуда

$$j_\alpha(r, \vartheta) = \frac{cA}{4\pi r^2} \left(\operatorname{sh} \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} \operatorname{ch} \frac{r}{\delta} \right).$$

Здесь A — постоянная интегрирования. Компоненты H_r и H_ϑ магнитного поля внутри шара выражаются через $j_\alpha(r, \vartheta)$:

$$H_r = \frac{2\delta^2 A}{r^3} \left(\operatorname{sh} \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} \operatorname{ch} \frac{r}{\delta} \right) \cos \vartheta,$$

$$H_\vartheta = \frac{2\delta^2}{r^3} \left[\left(1 + \frac{r^2}{\delta^2} \right) \operatorname{sh} \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} \operatorname{ch} \frac{r}{\delta} \right] \sin \vartheta.$$

Постоянные m и A определяются из условий непрерывности H_r и H_ϑ при $r = a$.

$$m = -\frac{H_0 a^3}{2} \left(1 - 3\frac{\delta}{a} \operatorname{cth} \frac{a}{\delta} + 3\frac{\delta^2}{a^2} \right), \quad A = -\operatorname{frac}32 \frac{H_0 a}{\operatorname{sh} \frac{a}{\delta}}.$$

При $\delta \ll a$ получим $m = -\frac{H_0 a^3}{2}$ (ср. с ответом 281 при $\mu = 0$), $A = 0$.

При $\delta \gg a$ $m = -\frac{H_0 a^5}{30\delta^2}$.

$$346. \quad j_r = j_\alpha = 0, \quad j_z = \frac{\mathcal{J}}{2\pi a \delta} \frac{I_0(r/\delta)}{I_1(a/\delta)}, \quad H_r = H_z = 0,$$

$$H_\alpha = \begin{cases} \frac{\mathcal{J}}{2\pi c a} \frac{I_0(r/\delta)}{I_1(a/\delta)} & \text{при } r < a, \\ \frac{\mathcal{J}}{2\pi c a} & \text{при } r > a, \end{cases},$$

I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя.

347. Проинтегрируем уравнение Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, в котором $\mathbf{E} = \Lambda \frac{\partial \mathbf{j}_c}{\partial t}$, по произвольному замкнутому контуру l , проходящему внутри сверхпроводника и охватывающему отверстие. Применяв теорему Стокса, получим

$$\frac{d}{dt} \left[\int_S H_n dS + \oint_l \Lambda j_c dl \right] = 0,$$

где S — поверхность, опирающаяся на контур l . Если контур l целиком лежит за пределами слоя толщиной $\sim \delta$, прилегающего к поверхности сверхпроводника, то на нем $\mathbf{j}_c = 0$, и мы получим

$$\frac{d}{dt} \int H_n dS = 0.$$

$$348. \quad \mathcal{J}' = -\frac{c H_0 S \cos \vartheta}{L} + \mathcal{J}.$$

$$349. \quad \mathcal{J} = \frac{c \Phi_0}{L}.$$

ГЛАВА VII

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Квазистационарные явления в линейных проводниках

$$350. \mathcal{I}(t) = \frac{\pi a^2 \omega H_0}{c \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{c^2 R},$$

$$N(t) = -\frac{\omega(\pi a^2 H_0)^2}{c^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi),$$

$$\bar{P} = \frac{\omega^2}{2c^2} \cdot \frac{(\pi a^2 H_0)^2 R}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2\right]} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_0^2 R.$$

Здесь L — индуктивность кольца (см. задачу 272), R — его сопротивление, \mathcal{I} — амплитуда тока в кольце. Начало отсчета выбрано так, что при $t = 0$ плоскость петли перпендикулярна H_0 .

$$351. \bar{N} = \frac{\omega}{2c^2} \cdot \frac{(SH_0)^2 R}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

352. Средняя обобщенная сила, стремящаяся увеличить обобщенную координату q_i , равна

$$-\frac{\mathcal{I}_0^2}{2c^6} \cdot \frac{\omega^2 L L_{12}}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i},$$

где L и R — индуктивность и сопротивление второго контура, L_{12} — коэффициент взаимной индукции контуров.

$$353. \quad \bar{F} = - \frac{\omega^2 L L_{12} |\mathcal{E}_0|^2}{2c^6 \left\{ \left[R^2 + \frac{\omega^2 (L_{12}^2 - L^2)}{c^4} \right]^2 + \frac{4\omega^2 L^2 R^2}{c^4} \right\}^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}.$$

354.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2 [(L_1 + L_2)C + L_1 C_1 + L_2 C_2] \pm c^2 \{ [L_1(C + C_1) - L_2(C + C_2)]^2 + 4L_1 L_2 C^2 \}^{\frac{1}{2}}}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)}.$$

При отсутствии связи между контурами, т. е. при $C = 0$, ω_1 и ω_2 становятся равными $\frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}}$ и $\frac{c}{\sqrt{L_2 C_2}}$, что соответствует независимым колебаниям в каждом из одиночных контуров.

При очень сильной связи ($C \gg C_1, C_2$) остается одна частота $\omega = \frac{c}{\sqrt{L'C'}}$, где $L' = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$, $C' = C_1 + C_2$. Это соответствует колебаниям в одиночном контуре, в котором параллельно включены емкости C_1, C_2 и индуктивности L_1, L_2 .

355.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{L C_1} + \frac{1}{L C_2} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) \pm \frac{c^2}{2} \left\{ \left[\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) \right]^2 + \frac{4}{L^2 C_1 C_2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$356. \quad \omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm [(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4C_1 C_2 L_{12}^2]^{\frac{1}{2}}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

357. Составляя систему уравнений относительно токов и приравнявая нулю определитель системы, получим после некоторых вычислений уравнение четвертого порядка:

$$\omega^4 + i\omega^3 \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) - \omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - i\omega \left(\frac{\omega_1^2}{\tau_2} + \frac{\omega_2^2}{\tau_1} \right) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (1)$$

где $\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2 C_2}}$, $\tau_1 = RC_1$, $\tau_2 = RC_2$.

Коэффициенты этого уравнения комплексны, поэтому частота ω будет также комплексной: $\omega = \omega' + i\omega''$. В нулевом приближении в уравнении (1) можно отбросить члены с τ_1, τ_2 . Тогда уравнение (1) примет вид

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет следующие решения: $\omega_1^{(0)} = \omega_1$ и $\omega_2^{(0)} = \omega_2$. Таким образом, в этом приближении $\omega'' = 0$, и не происходит диссипации энергии (так как мы считали, что R бесконечно велико); колебания в каждом контуре происходят независимо. В следующем приближении ищем ω в виде $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega' + i\omega''$, где ω'' , $\Delta\omega'$ порядка $1/\tau$ или выше. В соответствии с этим, пренебрежем всеми членами более высоких порядков. Подставляя ω в (1), учитывая (2) и приравнивая нулю отдельно вещественную и мнимую части, найдем

$$\Delta\omega' = 0, \quad \omega_1'' = -\frac{1}{2\tau_2}, \quad \omega_2'' = -\frac{1}{2\tau_1}. \quad (3)$$

Поправка к ω' , содержащая R , появится только в следующем приближении.

358.

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\mathcal{E}}{Z_1 \left(1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^4 Z_1 Z_2}\right)}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{i\omega L_{12}}{c^2 Z_2} \mathcal{I}_1;$$

$$Z_1 = R_1 + i \left(\frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega L_1}{c^2} \right), \quad Z_2 = R_2 + i \left(\frac{1}{\omega C_2} - \frac{\omega L_2}{c^2} \right);$$

$$\mathcal{I}_{1 \max} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{при } \omega = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right)}}.$$

359. $Z = \frac{R - \frac{i\omega L}{c^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - i\omega RC}$, где $\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота коле-

баний в контуре. При $R = 0$ и $\omega = \omega_1$ Z становится бесконечно большим. Это свойство рассмотренного двухполюсника используется в радиотехнике (запирающие фильтры).

360. $C = C_0, \quad L = L_0, \quad R = \frac{\gamma L_0}{c^2}$, где $L_0 = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}$.

361. $Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U \mathcal{I}^*) = \frac{1}{2} |\mathcal{I}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} C_0 |U_0|^2,$

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) C_0 |U_0|^2.$$

$$362. \quad C = C_0, \quad L = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}, \quad C_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} C_0, \quad R = \frac{\gamma L}{c^2} = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}.$$

$$363. \quad Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \omega_p^2 \gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot C_0 |U_0|^2,$$

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right] C_0 |U_0|^2.$$

364. Обозначим токи, текущие через индуктивность, конденсатор и батарею, через $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$. На основе законов Кирхгофа получим уравнения

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = 0, \quad \frac{L}{c^2} \mathcal{I}_1 = \frac{\dot{q}(t)}{C} = \mathcal{E}(t) + \mathcal{I}_3 R, \quad (1)$$

где $q(t)$ — заряд на обкладке конденсатора, связанный с \mathcal{I}_2 соотношением $\mathcal{I}_2 = \dot{q}$, а

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \mathcal{E} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Из (1) получаем уравнение второго для тока \mathcal{I}_1 . Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни

$$x = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC}.$$

В зависимости от соотношения между R, L, C возможны три случая:

а) $\omega_0 > \frac{1}{2RC}$; находя решение для \mathcal{I}_1 методом вариации произвольных постоянных Лагранжа (см. [94], § 25), получим

$$\mathcal{I}_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\frac{\sin \omega t}{2\omega RC} + \cos \omega t \right) \right],$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$;

$$\text{б) } \omega_0 < \frac{1}{2RC}; \quad \mathcal{I}_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\frac{\text{sh } \Omega t}{2\Omega RC} + \text{ch } \Omega t \right) \right],$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{1}{4R^2 C^2} - \omega_0^2}$;

в) $\omega_0 = \frac{1}{2RC}$; $\mathcal{I}_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{2RC} \right) e^{-\frac{t}{2RC}} \right]$. В последних двух случаях переходный процесс является полностью аperiodическим, колебаний не возникает.

365.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ U_0 e^{-\frac{t}{RC}} & \text{при } 0 < t < T, \\ U_0 \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t-T}{RC}} \right) & \text{при } t > T. \end{cases}$$

366.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ U_0 e^{-\frac{Rc^2 t}{L}} & \text{при } 0 < t < T, \\ U_0 \left(e^{-\frac{Rc^2 t}{L}} - e^{-\frac{Rc^2(t-T)}{L}} \right) & \text{при } t > T. \end{cases}$$

367. На вход четырехполюсника нужно подать импульс

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -T, \\ hE_0 \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{RC}{T} \right) & \text{при } -T < t < 0, \\ hE_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

Начало отсчета времени выбрано так, что поле между пластинами конденсатора достигает максимума при $t = 0$.

$$368. I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \left[\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi) - e^{-\frac{Rc^2 t}{L}} \cos(\varphi_0 - \varphi) \right],$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}$. Переходный процесс отсутствует, если $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{Rc^2}{\omega L}$. Это условие имеет простой смысл: в момент включения стационарное значение тока должно быть равно нулю.

369. При гармонической зависимости токов от времени, уравнение Кирхгофа для n -го контура запишется так:

$$-\frac{\omega L}{c^2} \mathcal{I}_n + \frac{1}{\omega C} (2\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n-1} - \mathcal{I}_{n+1}) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собою разностное линейное уравнение с целочисленной независимой переменной n . Оно имеет (ср. с задачей 223) два линейно независимых решения $\sin \kappa n$ и $\cos \kappa n$, причем частоты собственных колебаний выражаются через параметр κ :

$$\omega^2 = 3\omega_0^2 \sin^2 \frac{\kappa}{2}, \quad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

Используя граничные условия $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_N = 0$, находим

$$\mathcal{I}_n = A \sin \kappa n, \quad \kappa = \frac{\pi r}{N}. \quad (3)$$

Здесь r может принимать любые целочисленные значения ($r = 1, 2, \dots$). Значение $r = 0$ соответствует нулевому току в цепи. Однако вследствие периодичности $\sin \frac{\kappa}{2}$, входящего в (2), число собственных частот системы будет конечно. Чтобы получить весь спектр частот, достаточно менять r в пределах $1 \leq r \leq N$. При этом κ будет меняться в пределах $0 \leq \kappa \leq \pi$, каждому κ будет соответствовать одна собственная частота, а всего частот будет N , как и должно быть в системе N связанных контуров. Они будут лежать в интервале $0 < \omega \leq 2\omega_0$.

Для интерпретации величины κ введем координату $y_n = an$ n -й ячейки (a — «длина» одной ячейки цепи). Тогда (3) вместе с временным множителем можно записать в виде

$$\mathcal{I}_n(t) = \mathcal{I}_0 \sin ky_n e^{-i\omega_\kappa t}, \quad (4)$$

где $k = \frac{\kappa}{a}$.

Выражение (4) представляет собою суперпозицию двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Величина k играет роль «волнового вектора» колебаний, распространяющихся по цепочке из отдельных дискретных звеньев. Фазовую и групповую скорости этих волн можно вычислить по обычным формулам

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5)$$

Поскольку зависимость ω от k нелинейна, v_φ и v_g отличаются друг от друга — имеет место дисперсия. Из (2) находим:

$$v_\varphi = \frac{2\omega_0}{k} \sin \frac{ka}{2}, \quad v_g = \omega_0 a \cos \frac{ka}{2}. \quad (6)$$

Величина $\frac{2\pi}{k}$ имеет смысл «длины волны» колебаний в дискретной цепочке; для длинных волн ($\lambda \gg a$) имеем $ka \ll 1$, откуда следует, что фазовая и групповая скорости $v_\varphi = v_g = \omega_0 a$ и не зависят от k — дисперсия отсутствует. Графики зависимости ω и v_g от k приведены на рис. 74.

Электрические колебания рассмотренной цепочки аналогичны механическим колебаниям линейной одноатомной цепочки, которая может служить одномерной моделью кристалла. Индуктивность L аналогична массе атома, величина $1/C$ — коэффициенту жесткости¹.

$$370. \Delta r = \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{\Delta\omega}{\sqrt{4\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

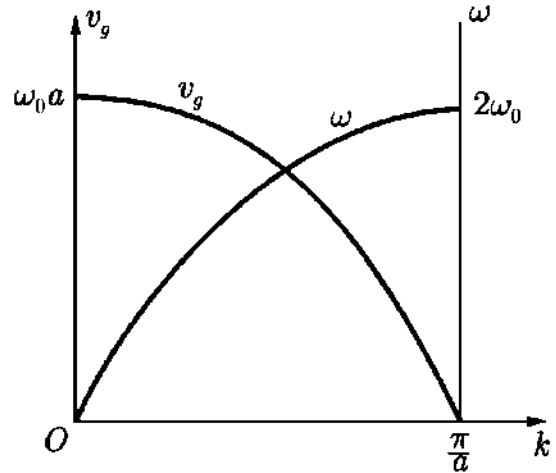


Рис. 74

371. Обозначим токи в контурах с самоиндукцией L_1 через \mathcal{I} , в контурах с самоиндукцией L_2 — через \mathcal{I}' .

Уравнения Кирхгофа будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega L_1}{c^2} \mathcal{I}_n + \frac{1}{\omega C} (2\mathcal{I}_n - \mathcal{I}'_n - \mathcal{I}'_{n-1}) &= 0, \\ -\frac{\omega L_2}{c^2} \mathcal{I}'_n + \frac{1}{\omega C} (2\mathcal{I}'_n - \mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Введя частоты $\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1 C}}$, $\omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2 C}}$, получим

$$\left. \begin{aligned} (2\omega_1^2 - \omega^2) \mathcal{I}_n &= \omega_1^2 (\mathcal{I}'_n + \mathcal{I}'_{n-1}), \\ (2\omega_2^2 - \omega^2) \mathcal{I}'_n &= \omega_2^2 (\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\mathcal{I}_n = A e^{i\kappa n}, \quad \mathcal{I}'_n = B e^{i\kappa n}, \quad (3)$$

¹Подробнее о колебаниях атомных цепочек см., например, М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944 г.; М. Борн и Хуан Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ, 1958 г. Аналогии между электрическими и механическими колебаниями рассматриваются в книге Л. Бриллюэна и М. Пароди [19], гл. 3 и 4.

где A, B, κ — постоянные. Подставив эти решения в (2), получим

$$A(2\omega_1^2 + \omega^2) = B\omega_1^2(1 + e^{-i\kappa}), \quad B(2\omega_2^2 - \omega^2) = A\omega_2^2(1 + e^{i\kappa}). \quad (4)$$

Из равенства нулю определителя этой системы найдем связь между частотой ω и κ :

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2 \frac{\kappa}{2}}. \quad (5)$$

Чтобы получить весь спектр колебаний, нужно менять κ в пределах от 0 до π . Значения κ , как и в задаче 369, могут быть найдены из граничных условий.

Наиболее существенным отличием от случая цепочки с одинаковыми звеньями является то, что каждому значению κ теперь соответствуют две частоты, как следует из формулы (5). Поэтому существуют две ветви

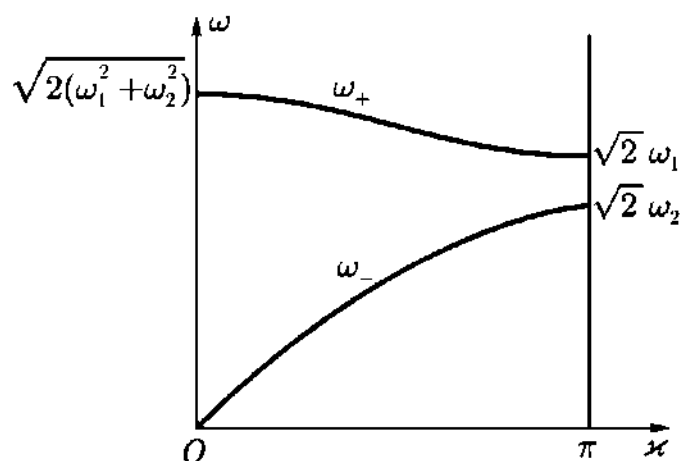


Рис. 75

колебаний. Обозначим частоты этих колебаний через ω_+ и ω_- , где индексы «+» и «-» соответствуют таким же знакам перед корнем в формуле (5). Зависимость частот от κ изображена графически на рис. 75. Колебания с частотой ω_- аналогичны колебаниям в цепочке с одинаковыми звеньями. В частности, при малых κ (длинные волны) имеем

$$\omega_- = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \kappa,$$

т. е. дисперсия отсутствует.

Для ветви ω_+ при малых κ получим выражение для закона дисперсии вида

$$\omega_+ = a + b\kappa^2.$$

При $\kappa \rightarrow 0$ фазовая скорость стремится к бесконечности, а групповая скорость обращается в нуль.

Для исследования характера колебаний в обеих ветвях найдем отношение амплитуд токов в соседних контурах для очень длинных $\kappa \ll 1$ и самых коротких (κ близко к π) волн. Из равенств (4) имеем при $\kappa \ll 1$:

для ветви ω_-

$$\left(\frac{A}{B}\right)_- \approx 1,$$

для ветви ω_+

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \approx -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = -\frac{L_2}{L_1}.$$

Для ветви ω_- колебания токов в соседних контурах происходят с одинаковой амплитудой в одной фазе. Для ветви ω_+ колебания в соседних контурах противофазны, а амплитуды колебаний обратно пропорциональны индуктивностям. При $\kappa = \pi$

$$\omega_+ = \sqrt{2}\omega_1, \quad \omega_- = \sqrt{2}\omega_2.$$

Переходя в формуле (4) к пределу $\kappa \rightarrow \pi$, получим

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \rightarrow 0, \quad \left(\frac{A}{B}\right)_- \rightarrow 0.$$

Таким образом, в предельном случае $\kappa = \pi$ колебания с частотой $\omega_+ = c\sqrt{\frac{2}{L_1C}}$ происходят только в контурах с индуктивностями L_1 , а колебания с частотой $\omega_- = c\sqrt{\frac{2}{L_2C}}$ — в контурах с индуктивностями L_2 .

Рассмотренные в этой задаче колебания с частотами ω_- и ω_+ являются аналогом акустических и оптических колебаний в линейной атомной цепочке, состоящей из атомов двух сортов с разными массами (см. литературу, указанную на стр. 359).

372.

$$\mathcal{I}_n = Aq_1^n + Bq_2^n, \quad (1)$$

где q_1, q_2 — корни уравнения

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \quad (2)$$

Постоянные A, B определяются из граничных условий $\mathcal{I}_N = 0$; $(\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_1)Z_2 = U_1$. Второе условие означает, что между точками $a'b'$ (см. рис. 23) приложено напряжение U_1 . Используя равенство $q_1q_2 = 1$ вытекающее из (2), получим окончательно:

$$U_2 = \mathcal{I}_{N-1}Z_2 = U_1 \frac{q_2 - q_1}{(1 - q_1)q_2^N - (1 - q_2)q_1^N}.$$

373. Коэффициент передачи K определяется из результатов предыдущей задачи:

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)q_1^N - (1 - q_1)q_2^N}.$$

В знаменателе этого выражения имеются множители q_1^N и q_2^N . Так как $q_1 \cdot q_2 = 1$, то возможны два случая:

$$\text{а) } |q_1| = |q_2| = 1; \quad \text{б) } |q_1| > 1, |q_1| < 1.$$

В первом случае q_1^N и q_2^N будут по модулю равны единице, K тоже будет порядка единицы. Во втором случае при $N \gg 1$ $|q_1^N| \gg 1$, а $|q_2^N| \ll 1$, поэтому

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)q_1^N} \ll 1.$$

Интервалы частот, для которых реализуются случаи а) и б), определяются из уравнения (2) задачи 372. Из него следует, что

$$q_{1,2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1}.$$

Если подкоренное выражение отрицательно, то q_1 и q_2 — два комплексно сопряженных корня, по модулю равных единице, т. е. осуществляется случай а). При положительном подкоренном выражении, q_1 и q_2 вещественны и различны, т. е. имеет место случай б). Приравнивая нулю подкоренное выражение, найдем область значений Z_1, Z_2 для случая а):

$$-4 \leq \frac{Z_1}{Z_2} \leq 0.$$

Это соответствует значениям ω^2 , лежащим между

$$\frac{c^2}{L_1 C_1} \quad \text{и} \quad \frac{c^2(4C_1 + C_2)}{C_1 C_2(4L_2 + L_1)}.$$

374. Рассмотрим n -й замкнутый контур искусственной длинной линии (рис. 76). Этот контур можно рассматривать как эквивалентную схему для отрезка длиной a линии с распределенными параметрами, причем ΔL будет индуктивностью, а ΔC — емкостью данного отрезка. В случае произвольной зависимости тока в линии от времени уравнение Кирхгофа для этого контура примет вид:

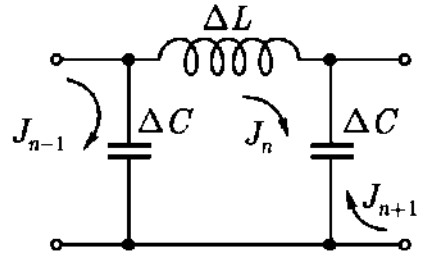


Рис. 76

$$-\frac{1}{c^2} \Delta L \frac{\partial \mathcal{I}_n}{\partial t} + \frac{q_{n-1,n}}{\Delta C} - \frac{q_{n+1,n}}{\Delta C} = 0, \quad (1)$$

где $q_{n-1,n}$ и $q_{n+1,n}$ — заряды на верхних обкладках левого и правого конденсаторов. Дифференцируя (1) по времени и пользуясь соотношениями $\dot{q}_{n-1,n} = -\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_{n-1}$, $\dot{q}_{n+1,n} = \mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n+1}$, получим:

$$\frac{1}{c^2} \Delta L \frac{\partial^2 \mathcal{I}_n}{\partial t^2} + \frac{1}{\Delta C} (2\mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n-1} - \mathcal{I}_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

Теперь нужно перейти от переменной n к переменной z — координате точки линии с распределенными параметрами. Для этого положим

$$\mathcal{I}_n(t) = \mathcal{I}(z, t), \quad \mathcal{I}_{n-1}(t) = \mathcal{I}(z - a, t), \quad \mathcal{I}_{n+1}(t) = \mathcal{I}(z + a, t)$$

и вычислим разности:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n-1} &\approx \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} a - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial z^2} a^2, \\ \mathcal{I}_n - \mathcal{I}_{n+1} &\approx -\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} a - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial z^2} a^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти разности в (2) и замечая, что $L = \frac{\Delta L}{a}$ и $C = \frac{\Delta C}{a}$ — индуктивность и емкость на единицу длины, получим уравнение

$$\frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial t^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Это — уравнение длинной линии без потерь. В реальной длинной линии всегда имеются потери как за счет сопротивления в проводах, так и за счет неидеальной изоляции между проводами.

Эквивалентная схема для случая, когда второй фактор не учитывается (т. е. изоляция проводов считается идеальной), приведена на рис. 77.

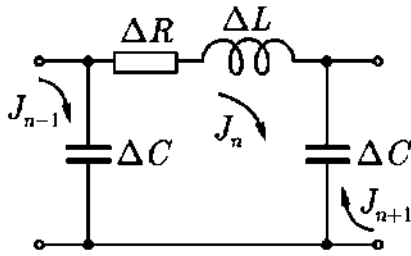


Рис. 77

Уравнение длинной линии (телеграфное уравнение) в этом случае можно получить таким же способом, как было получено (3):

$$\frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial t^2} + R \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial z^2}, \quad (4)$$

где R — активное сопротивление проводов на единицу длины.

375. Решая уравнение (3), полученное в предыдущей задаче, найдем

$$\omega = vk,$$

где $v = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ — скорость распространения волн в длинной линии, $k = \frac{\pi r}{l}$, $r = 1, 2, 3, \dots$, L и C — индуктивность и емкость на единицу длины.

В полученном спектре длинной линии, в отличие от спектра цепочки с сосредоточенными параметрами, число собственных частот бесконечно. Это связано с тем, что длинная линия является континуумом с бесконечным числом степеней свободы, тогда как в цепочке число степеней свободы N — конечно. В случае идеальной длинной линии характерно также отсутствие дисперсии.

376. Исходим из закона Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}})$, где $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил. Выразим \mathbf{E} через потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_{\text{ст}} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Считая проводник тонким, проинтегрируем обе части последнего равенства по контуру, совпадающему с проводником:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{ст}} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} + \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{c} \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1)$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (1), представляет собою стороннюю э. д. с. $\mathcal{E}_{\text{ст}}$, включенную в цепь; интеграл $\oint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{I}R$ определяет

потери на джоулево тепло за единицу времени. Интеграл $\oint \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\varphi = 0$. Последний интеграл преобразуем следующим образом. С учетом запаздывания

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{\mathcal{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) d\mathbf{l}'}{r};$$

$$\mathcal{I}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{A}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (1) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\mathcal{E}_{\text{ст}}(t) = \mathcal{I}(t) \left[\left(R + \frac{\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\sin \frac{\omega r}{c} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} \right) - \frac{i\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\cos \frac{\omega r}{c} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} \right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет комплексное сопротивление цепи. Активное сопротивление равно $R + R_r(\omega)$, где

$$R_r(\omega) = \frac{\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\sin \frac{\omega r}{c}}{r} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'.$$

Величина R связана с потерями на нагревание проводника; величина $R_r(\omega)$ характеризует потери энергии на излучение и называется сопротивлением излучения (см. следующую задачу).

Реактивное сопротивление равно $-\frac{i\omega L(\omega)}{c^2}$, где

$$L(\omega) = \oint \oint \frac{\cos \frac{\omega r}{c}}{r} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}',$$

представляет собою индуктивность, зависящую от частоты.

Рассмотрим случай, когда можно считать $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} \gg l$, где l — размер контура. В области интегрирования $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ и, с учетом квадратичного члена в разложении косинуса, получим

$$L(\omega) \approx \oint \oint \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \oint \oint r d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'.$$

Первый член в этом выражении не зависит от частоты и представляет собой обычную индуктивность¹; второй член дает поправку, существенную при высоких частотах.

В разложении синуса нужно учесть кубический член, так как интеграл от первого (линейного) члена обращается в нуль. Сопротивление излучения

$$R_r(\omega) = -\frac{\omega^4}{6c^5} \oint \oint r^2 d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'.$$

377. $L(\omega) = L + \frac{64\pi^4}{3} \cdot \frac{a^4}{\lambda^3}$, $R_r(\omega) = \frac{2\pi^2}{3c} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4$. Кольцо с током является магнитным диполем. Энергия, излучаемая в единицу времени, дается формулой $\frac{2}{3} \cdot \frac{\ddot{m}^2}{c^3}$, где m — магнитный дипольный момент.

Значение коэффициента пропорциональности между излученной энергией и $\overline{\mathcal{F}}^2$ равно $\frac{2\pi^2 a^2 \omega^4}{3c^5}$ и совпадает с $R_r(\omega)$.

§ 2. Вихревые токи и скин-эффект

$$378. H(x) = H_0 \left(\frac{\operatorname{sh}^2 x/\delta + \cos^2 x/\delta}{\operatorname{sh}^2 h/\delta + \cos^2 h/\delta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad H_0 = \frac{4\pi}{c} \mathcal{I}_0 n; \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$

При $\delta \ll h$, $H(x) = H_0 e^{-\frac{(h-|x|)}{\delta}}$; при $\delta \gg h$, $H(x) = H_0$ (ср. с задачей 247).

379. Так как система симметрична относительно оси цилиндра, а первичное магнитное поле H_0 однородно, то ясно, что вихревые токи в цилиндре будут течь по окружностям в плоскостях, перпендикулярных его оси. Эти токи создадут такое же магнитное поле, какое создавалось бы множеством отдельных коаксиальных соленоидов. Но поле соленоида во внешнем пространстве равно нулю, а внутри соленоида направлено вдоль его оси. Таким образом, полное магнитное поле вне цилиндра совпадает с полем H_0 , а внутри цилиндра определяется первым уравнением (VII.12), которое ввиду осевой симметрии примет вид

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + k^2 H = 0,$$

¹Практически для вычисления самоиндукции нужно использовать формулу (V.18), так как интеграл $\oint \oint \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r}$ расходится. Эта расходимость вызвана тем, что проводник считается бесконечно тонким (линейным).

где

$$k^2 = \frac{1+i}{\delta}, \quad H = H_z(r), \quad H_\alpha = H_r = 0,$$

и граничным условием $H(a) = H_0$.

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее этому граничному условию, выразится через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$H = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

Вне цилиндра имеем

$$H = H_0 \quad \text{при } a \leq r \leq b, \quad H = 0 \quad \text{при } r > b.$$

Плотность тока и электрическое поле внутри цилиндра вычисляются по формуле (VII.11):

$$j = j_\alpha = \sigma E_\alpha = \frac{k\sigma}{4\pi} \cdot \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} H_0, \quad E_r = E_z = 0.$$

Для определения электрического поля вне цилиндра воспользуемся уравнением Максвелла для $\text{rot } \mathbf{E}$, которое запишем в интегральной форме:

$$\oint E_l dl = \frac{i\omega}{c} \int B_n dS.$$

Внутри цилиндра имеется только одна компонента электрического поля E_α , из граничного условия на поверхности стержня и из симметрии системы следует, что вне цилиндра поле \mathbf{E} также будет иметь лишь составляющую E_α , зависящую только от r . Если выбрать в качестве контура l окружность, то контурный интеграл дает $2\pi r E_\alpha$. При вычислении интеграла по площади используем формулу (П 3.12). Окончательно получим:

$$E_\alpha = \frac{k\sigma H_0}{4\pi\sigma} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \cdot \frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r} (r^2 - a^2), \quad \text{если } a \leq r \leq b.$$

$$E_\alpha = \frac{k\sigma H_0}{4\pi\sigma} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \cdot \frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r} (b^2 - a^2), \quad \text{если } r > b.$$

При отсутствии цилиндра, т. е. если $a = 0$, поле будет равно

$$E_\alpha = \frac{1}{2} H_0 r \quad (r < b), \quad E_\alpha = \frac{H_0 b^2}{2r} \quad (r > b).$$

Таким образом, добавочное магнитное поле, связанное с наличием цилиндра, равно нулю при $r > a$, хотя добавочное электрическое поле отлично от нуля. Это связано с тем, что точное уравнение $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, справедливое вне проводника, заменяется приближенным уравнением $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ (в квазистационарном приближении ток смещения пренебрегаем). При точном решении задачи добавочное магнитное поле вне проводника также будет отлично от нуля (см. задачу 452, в которой рассматривается дифракция плоской волны на проводящем цилиндре).

380. При малых частотах ($|ka| \ll 1$ или $\delta \gg a$)

$$j = i \frac{cH_0}{4\pi} \cdot \frac{r}{\delta^2} = \frac{i\sigma\omega H_0}{2c} r,$$

следовательно, плотность тока линейно зависит от r и пропорциональна частоте.

При больших частотах ($|ka| \gg 1$ или $\delta \ll a$) нужно использовать асимптотическую формулу для функции Бесселя, с помощью которой получим

$$j = (i - 1) \frac{cH_0}{4\pi\delta} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-(1+i)\frac{a-r}{\delta}}.$$

При $a - r \gg \delta$ плотность тока становится исчезающе малой. Таким образом, при больших частотах ток сконцентрирован в основном в тонком поверхностном слое.

$$\mathbf{381.} \quad Q = -\frac{\pi a^2 n^2 \mathcal{J}_0^2}{\sigma} \text{Re} \left[\frac{k J_1(ka)}{J_0(ka)} \right], \quad k^2 = i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}.$$

При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$Q = \frac{\pi n^2 \mathcal{J}_0^2}{16\sigma} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = \pi^3 \sigma \left(\frac{a^2 \mu \pi \omega \mathcal{J}_0}{c^2} \right)^2.$$

При $|ka| \gg 1$ (большие частоты):

$$Q = \frac{\pi n^2 \mathcal{J}_0^2}{\sigma} \left(\frac{a}{\delta} \right) = \frac{a n^2 \mathcal{J}_0^2}{c} \sqrt{\frac{2\pi^3 \mu \omega}{\sigma}}.$$

Диссипация энергии при малых частотах пропорциональна ω^2 , а при больших $-\sqrt{\omega}$.

$$382. \quad \beta = \beta' + i\beta'' = -\frac{a^2}{4} \left[1 - \frac{2}{ka} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right], \quad k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}.$$

При $|ka| \gg 1$ (большие частоты):

$$\beta' = -\frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \right), \quad \beta'' = \frac{ca}{4\sqrt{2\pi\sigma\omega}};$$

следовательно, при больших частотах $\beta'' \rightarrow 0$, т. е. потери уменьшаются, ввиду вытеснения поля из проводника.

При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$\beta' = -\frac{\pi^2 a^6 \sigma^2 \omega^2}{12c^4}, \quad \beta'' = \frac{\pi a^4 \sigma \omega}{8c^2}.$$

Таким образом, при $\omega \rightarrow 0$ $\beta \rightarrow 0$; это связано с тем, что $\mu = 1$, т. е. статическая магнитная поляризуемость равна нулю.

383. Магнитный момент, создаваемый вихревыми токами, вследствие симметрии системы будет направлен вдоль внешнего магнитного поля. Поэтому во внешней области полное магнитное поле \mathbf{H}_2 можно записать в виде

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{4\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^4} - \frac{2\mathbf{m}}{r^2} + \mathbf{H}_0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{m} — неизвестный магнитный момент единицы длины цилиндра, совпадающий по направлению с \mathbf{H}_0 ; \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Полю \mathbf{H}_2 соответствует векторный потенциал $\mathbf{A}_2 = \frac{2(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^2} + (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r})$, который в проекциях запишется так:

$$A_{2z} \equiv A_2 = \left(\frac{2m}{r} + H_0 r \right) \sin \alpha, \quad A_{2r} = A_{2\alpha} = 0 \quad (2)$$

(угол α отсчитывается от направления \mathbf{H}_0).

Таким образом, во внешней области векторный потенциал имеет только продольную (относительно оси цилиндра) составляющую, пропорциональную $\sin \alpha$. Условиям непрерывности составляющих поля на границе можно удовлетворить, если искать векторный потенциал во внутренней области в аналогичном виде:

$$A_{1z} \equiv A_1 = F(r) \sin \alpha, \quad A_{1r} \equiv A_{1\alpha} = 0. \quad (3)$$

Электрическое поле \mathbf{E} выражается в общем случае через оба потенциала: \mathbf{A} и φ .

Наложим, как обычно, на потенциалы дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Тогда, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, что следует из формул (2) и (3), будем иметь $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega\varphi = 0$, так что $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}$. Поэтому \mathbf{A} будет удовлетворять такому же уравнению, как и электрическое поле (см. (VII.12)). Решением этого уравнения, ограниченным при $r = 0$, является функция Бесселя:

$$F(r) = C J_1(kr), \quad A_1 = C J_1(kr) \sin \alpha. \quad (4)$$

Постоянные C и m в (4) и (2) определяются из условия равенства внутреннего (\mathbf{H}_1) и внешнего (\mathbf{H}_2) полей на границе цилиндра: $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ при $r = a$. Используя (П 3.9), получим

$$C = \frac{2H_0}{kJ_0(ka)}, \quad m = -\frac{a^2 H_0}{2} \left(1 - \frac{2}{ka} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right). \quad (5)$$

Из выражения для m следует, что поперечная магнитная поляризуемость цилиндра

$$\beta = -\frac{a^2}{2} \left[1 - \frac{2}{ka} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right] \quad (6)$$

вдвое больше его продольной поляризуемости (см. задачу 382). Компоненты магнитного поля внутри цилиндра определяются из (4) и (5):

$$\begin{aligned} H_{1r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} = 2H_0 \frac{J_1(kr)}{kr J_0(ka)} \cos \alpha, & H_{1z} &= 0. \\ H_{1\alpha} &= -\frac{\partial A_1}{\partial r} = -2H_0 \frac{J_1'(kr)}{J_0(ka)} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим еще плотность тока в цилиндре. По формуле $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ получим

$$J_z = -\frac{cH_0}{2\pi} \cdot \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} \sin \alpha, \quad J_\alpha = j_r = 0. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что в каждый момент времени в двух половинах цилиндра $0 \leq \alpha \leq \pi$ и $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ токи текут в противоположных направлениях; полный ток через сечение цилиндра равен нулю. Радиальная

зависимость плотности тока такая же, как в случае цилиндра, находящегося в продольном поле, и была исследована в задаче 380. (Однако нужно иметь в виду, что в случае продольного поля токи текут по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, тогда как в случае поперечного поля они текут вдоль оси цилиндра.)

384. Среднее тепловыделение на единицу длины цилиндра проще всего вычислить по формуле (VII.17), рассмотрев поток энергии, втекающий через боковую поверхность цилиндра. Используя результаты задачи 383, получим

$$Q = -\frac{ac^2 H_0^2}{8\pi\sigma} \operatorname{Re} \left(\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right).$$

Тот же результат получится с помощью формулы (VII.16), причем при интегрировании произведения функций Бесселя нужно использовать формулу (П3.13).

385. Для определения вращательного момента нужно знать электрическое и магнитное поля внутри цилиндра. Их можно найти тем же способом, что и в задаче 383 для линейно поляризованного внешнего поля:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{2H_0 J_1(kr)}{kr J_0(ka)} e^{i\alpha}, & H_\alpha &= -2iH_0 \frac{J_1'(kr)}{J_0(ka)} e^{i\alpha}, \\ j_z &= \frac{ickH_0}{2\pi} \cdot \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} e^{i\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Сила, приложенная к единице объема цилиндра, вычисляется по формуле

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \quad (2)$$

(считаем, что внутри цилиндра $\mu = 1$). Радиальная компонента этой силы вызовет радиально направленное давление, азимутальная компонента создает вращательный момент. Поскольку \mathbf{j} и \mathbf{H} — комплексные величины, среднее значение азимутальной составляющей силы выразится так:

$$\bar{f}_\alpha = \frac{1}{2c} \operatorname{Re}(j_z H_r^*). \quad (3)$$

Вращательный момент, действующий на единицу длины цилиндра, получится путем умножения средней силы (3) на r и интегрирования по сечению

цилиндра. Интеграл вычисляется с помощью формулы (П3.13). В результате получим

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2} \operatorname{Re} \left(k \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right). \quad (4)$$

Этот же результат получается другим путем. Момент сил можно выразить через магнитный момент системы по формуле

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{m}(t) \times \mathbf{H}_0(t). \quad (5)$$

Определяя $\bar{N}_z = \bar{N}$ через комплексные амплитуды \mathbf{H}_0 и \mathbf{m} , а \mathbf{m} — через поперечную магнитную поляризуемость цилиндра (см. задачу 383), приходим к формуле (4).

При малых частотах из (4) получим

$$\bar{N} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4 H_0^2}{\delta^2} = \frac{\pi \sigma \omega}{4c^2} H_0^2 a^4, \quad (6)$$

а при больших частотах

$$\bar{N} = \frac{1}{2} a \delta H_0^2 = \frac{ca}{\sqrt{8\pi\sigma\omega}} H_0^2. \quad (7)$$

Из этих формул видно, что вращательный момент исчезает в обоих предельных случаях очень малых и очень больших частот.

Если поле поляризовано линейно, средний вращательный момент равен нулю (формально это следует из того, что интеграл по α обратится в нуль при вычислении N ; см. задачу 383, в которой найдены \mathbf{j} и \mathbf{H} для этого случая). Таким образом, вращательный момент создается «вращающимся» полем.

Явление, рассмотренное в данной задаче, лежит в основе устройства асинхронного электромотора.

386. Наряду с неподвижной системой отсчета, у которой ось z совпадает с осью цилиндра, а ось x — с направлением внешнего поля \mathbf{H}_0 , рассмотрим систему координат ξ, η, z , вращающуюся вместе с цилиндром. В этой системе координат внешнее магнитное поле запишется в виде

$$\mathbf{H}_0(t) = (\mathbf{H}_{01} - i\mathbf{H}_{02})e^{-i\omega t}.$$

Здесь \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{02} — постоянные векторы одинаковой длины $H_{01} = H_{02} = H_0$, имеющие направления координатных осей ξ, η . Поле такого вида

было рассмотрено в задаче 385. Создаваемый им вращательный момент (который в данном случае будет тормозящим) равен

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2} \operatorname{Re} \left(k \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \right).$$

387. В задаче 379 было показано, что вихревые токи, возникающие в цилиндре при изменении внешнего продольного поля, не создают добавочного магнитного поля вне цилиндра; во внутренней области создаваемое ими поле продольно и зависит только от r . Это поле будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что магнитное поле внутри цилиндра будет затухать со временем. Поэтому частные решения уравнения (1) будем искать в виде $F(r)e^{-\gamma t}$, где $\gamma > 0$ — постоянная. Для $F(r)$ получаем уравнение Бесселя:

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + k^2 F(r) = 0, \quad (2)$$

где $k^2 = \frac{4\pi\mu\sigma\gamma}{c^2}$.

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (2) имеет вид $F(r) = C J_0(kr)$. Поскольку внешнее поле H_0 выключается, а добавочное поле, создаваемое вихревыми токами, вне цилиндра равно нулю, на границе должно выполняться условие $H|_{r=a} = 0$, т. е.

$$J_0(ka) = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим $k_m a = \beta_m$, $m = 1, 2, \dots$, где β_m — нули функции J_0 . Возможными значениями γ будут

$$\gamma_m = \frac{c^2 \beta_m^2}{4\pi\mu\sigma a^2}. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (1), соответствующее рассматриваемой краевой задаче, запишется в виде

$$H(r, t) = \sum_m C_m J_0(k_m r) e^{-\gamma_m t}. \quad (5)$$

Коэффициенты C_m определяются из начального условия

$$H(r, 0) = \sum_m C_m J_0(k_m r). \quad (6)$$

Воспользовавшись свойством ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^1 x J_0(k_m x) J_0(k_n x) dx = \frac{1}{2} [J_0'(k_m)]^2 \delta_{mn}, \quad (7)$$

получим

$$C_m = \frac{2}{a^2 [J_0'(k_m a)]^2} \int_0^a H(r, 0) J_0(k_m r) r dr. \quad (8)$$

В начальный момент времени поле $H(r, 0)$ равно внешнему полю H_0 , так как постоянное магнитное поле не искажается, если в него поместить бесконечный цилиндр, ось которого параллельна полю. Используя формулы (П 3.12), (П 3.9), найдем

$$C_m = \frac{2H_0}{(k_m a) J_1(k_m a)}. \quad (9)$$

Скорость затухания поля будет определяться наименьшим из значений γ_m , т. е. γ_1 . Его можно получить, подставив в (4) значение наименьшего корня функции Бесселя $\beta_1 \approx 2,4$. Время затухания поля $\tau = \frac{1}{\gamma_1}$.

388. Магнитное поле внутри шара в нулевом (по частоте) приближении было найдено в задаче 281:

$$\mathbf{H} = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}_0. \quad (1)$$

Электрическое поле внутри шара в этом же приближении, как следует из уравнения (VII.11), оказывается равным нулю, так как постоянное магнитное поле не создает электрического поля. Для определения электрического поля в следующем (линейном по ω) приближении используем уравнение (VII.10) в интегральной форме.

Из свойств симметрии системы ясно, что токи в шаре будут течь по окружностям в плоскостях, перпендикулярных \mathbf{H}_0 ; так же будет направлено электрическое поле.

Выбрав сферическую систему координат с осью z вдоль \mathbf{H}_0 , получим

$$E = \frac{i\omega H}{2c} r \sin \vartheta, \quad j = \sigma E, \quad (2)$$

где H определено равенством (1). Выделяющееся в шаре тепло Q найдем, интегрируя $q = \frac{1}{2}\sigma|E|^2$ по объему шара:

$$Q = \frac{3\pi a^5 \sigma \omega^2 H_0}{5c^2(\mu + 2)^2}. \quad (3)$$

389. Вне шара магнитное поле:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3},$$

где $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}a^3\mathbf{H}_0$; $\beta = -\frac{1}{2}a^3$ — магнитная поляризуемость шара при сильном скин-эффекте.

Внутри шара:

$$H_\vartheta = -\frac{3}{2}H_0 e^{-(1-i)\frac{z}{\delta}} \sin \vartheta, \quad H_r = H_\alpha = 0,$$

где z отсчитывается от поверхности по нормали в глубь проводника, полярная ось сферической системы координат направлена вдоль \mathbf{H}_0 ;

$$Q = \frac{3a^2 c}{8} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}} H_0^2.$$

390. В случае сильного скин-эффекта поле внутри эллипсоида равно нулю, а во внешней области удовлетворяет уравнениям $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{E} = 0$ и граничным условиям $H_n|_S = 0$, $\mathbf{H}|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{H}_0$, где \mathbf{H}_0 — внешнее поле и через S обозначена поверхность эллипсоида.

Сравним эту задачу с задачей о диэлектрическом эллипсоиде с $\varepsilon = 0$, находящемся в однородном электрическом поле. Электрическое поле вне такого эллипсоида будет удовлетворять уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям

$$E_n|_S = \varepsilon E_{n\text{внутр}}|_S = 0, \quad \mathbf{E}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

Условия для касательных компонент \mathbf{E} можно не рассматривать, так как соотношения (1) и (2) однозначно определяют вектор \mathbf{E} во внешней области.

Мы видим, что рассматриваемая задача о проводящем эллипсоиде, при сильном скин-эффекте формально совпадает с задачей о диэлектрическом эллипсоиде, у которого $\varepsilon = 0$. Полагая в формулах, приведенных в ответе задачи 200, $\varepsilon_1 = 0$, получим магнитные поляризуемости в направлении главных осей эллипсоида:

$$\beta^{(i)} = -\frac{V}{4\pi(1 - n^{(i)})}, \quad (3)$$

где $n^{(i)}$ — соответствующий коэффициент деполяризации, V — объем эллипсоида.

Для сильно вытянутого эллипсоида вращения с полуосями $a, b \gg a$ (стержень) имеем (см. задачу 198):

$$\beta_{\perp} = -\frac{2}{3}a^2b, \quad \beta_{\parallel} = -\frac{1}{3}a^2b.$$

Для сильно сплюснутого эллипсоида ($b \ll a$, диск):

$$\beta_{\perp} = -\frac{2a^3}{3\pi}, \quad \beta_{\parallel} = -\frac{1}{3}a^2b \rightarrow 0 \quad \text{при } b \rightarrow 0.$$

391. Вследствие аксиальной симметрии системы шар + внешнее поле, распределение вихревых токов в шаре и электрическое поле также обладают аксиальной симметрией. На этом основании можно утверждать, что электрическое поле будет иметь только одну составляющую E_{α} , которая не может зависеть от α : $E_{\alpha} = f(r, \vartheta)$.

Ищем решение уравнения (VII.12) для полного электрического поля \mathbf{E} в виде

$$E_{\alpha} = F(r) \sin \vartheta, \quad E_r = E_{\vartheta} = 0.$$

Пользуясь выражением для лапласиана вектора в сферических координатах, полученным в задаче 47, найдем уравнение для $F(r)$, которое подстановкой $F(r) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}$ сводится к уравнению Бесселя. Его решением, ограниченным при $r = 0$, будет

$$\chi(r) = AJ_{\frac{3}{2}}(kr).$$

Магнитное поле внутри шара определится из уравнения (VII.10). Магнитное поле во внешней области будет складываться из внешнего поля \mathbf{H}_0 и поля

магнитного диполя m , направление которого совпадает с H_0 :

$$H_2 = H_0 + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

Постоянные A и m определяются из граничных условий для H на поверхности шара. Выражая функции Бесселя полуцелого порядка через тригонометрические функции, получим

$$m = -\frac{a^3}{2} \left(1 - \frac{3}{k^2 a^2} + \frac{3}{ka} \operatorname{ctg} ka \right) H_0, \quad A = \frac{3ia\omega}{c \sin ka} \sqrt{\frac{\pi}{8k}} H_0.$$

$$392. \quad Q = -\frac{3a\delta^2 H_0^2}{8} \left(1 - \frac{a}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2a/\delta + \sin 2a/\delta}{\operatorname{ch} 2a/\delta - \cos 2a/\delta} \right).$$

$$393. \quad R = \frac{l}{ca} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\sigma}} \operatorname{Re} \left[(1+i) \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \right], \quad \text{где } R_0 = \frac{(1+i)\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}.$$

При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$R = R_0 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2} \right)^2 \right],$$

где $R_0 = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}$ — сопротивление постоянному току.

При $|ka| \gg 1$ (большие частоты):

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{2\pi a\delta} = \frac{l}{ca} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}.$$

Как следует из последней формулы, эффективная площадь сечения проводника при сильном скин-эффекте равна $2\pi a\delta$.

$$394. \quad R = \frac{\omega\delta_2}{2ac^2} \cdot \frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2) \sin 2h/\delta_2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2) \operatorname{sh} 2h/\delta_2 + 2\delta_1\delta_2 \cos 2h/\delta_2}{(\delta_1 \sin h/\delta_2 + \delta_2 \operatorname{ch} h/\delta_2)^2 + (\delta_1^2 + \delta_2^2) \operatorname{sh}^2 h/\delta_2},$$

где $\delta_1 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_1\omega}}$, $\delta_2 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_2\omega}}$.

$$395. \quad H' = \frac{2H_0}{ka \operatorname{sh} kh + 2 \operatorname{ch} kh}, \quad \text{где } k = \frac{1+i}{\delta}.$$

При $|kh| \ll 1$ (малые частоты) $H' = H_0$ т.е. наличие цилиндрической оболочки не сказывается на величине поля. При $|kh| \gg 1$ (большие частоты), имеем:

$$\operatorname{sh} kh \approx \operatorname{ch} kh \approx \frac{1}{2} e^{(1+i)\frac{h}{\delta}};$$

так как $a \gg \delta$, то

$$H' = (1 - i) \frac{\delta}{2a} e^{-(1+i)\frac{h}{\delta}} H_0, \quad H_0 \gg |H'|.$$

Сильное ослабление поля получается за счет того, что вихревые токи, возникающие в оболочке, создают в полости добавочное поле обратного направления.

396. $j = \frac{2i\mathcal{F}_0\mu\sigma\omega}{c^2ka} \cdot \frac{\text{sh } k(h-x)}{\text{ch } kh}$, где x отсчитывается от поверхности по радиусу в глубь проводника;

$$R = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma} \cdot \frac{\text{sh } 2h/\delta - \sin 2h/\delta}{2(\text{sh}^2 h/\delta + \cos^2 h/\delta)}.$$

Полый и сплошной проводники имеют одинаковое сопротивление при $\delta \ll h$.

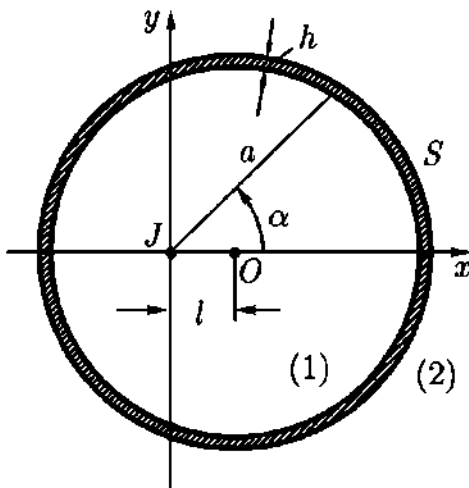


Рис. 78

397. Выберем цилиндрическую систему координат, как показано на рис. 78. При слабом скин-эффекте касательная к стенке трубы компонента магнитного поля на поверхности S этой стенки должна удовлетворять условию

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (1)$$

где $i = \sigma h E = \zeta E$ — поверхностный ток, ζ — поверхностная проводимость.

Электрическое поле, которое будет иметь, очевидно, только z -компоненту, должно быть непрерывно на той же поверхности S :

$$E_1 = E_2 = E. \quad (2)$$

Дальнейшее решение весьма сходно с решением задачи 159 (задача о слабо неконцентрических сферах). С точностью до членов (l/a) уравнение границы запишется в виде

$$r = a + l \cos \alpha. \quad (3)$$

Векторный потенциал, направление которого совпадает с направлением тока, ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\mathcal{F}}{c} \ln \frac{r}{a} + C_1 r \cos \alpha + C, \\ A_2 &= -\frac{2\mathcal{F}'}{c} \ln \frac{r}{a} + \frac{B_1}{r} \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где C_1 и B_1 — функции времени, имеющие первый порядок малости относительно (l/a) , \mathcal{F}' — имеет нулевой порядок относительно (l/a) .

При слабом скин-эффекте ($h \ll \delta$) векторный потенциал удовлетворяет условию:

$$A_1 = A_2 \quad \text{при } r = a + l \cos \alpha. \quad (5)$$

Отсюда, отбрасывая члены порядка $(l/a)^2$, находим

$$B_1 = a^2 C_1 + \frac{2(\mathcal{F}' - \mathcal{F})l}{c}, \quad C = 0. \quad (6)$$

В граничном условии (1) можно заменить H_τ на H_α . Как легко проверить, это приведет к ошибке порядка $(l/a)^2$. Поскольку

$$H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad i = \zeta E = -\frac{\zeta}{c} \frac{\partial A}{\partial t},$$

имеем на S :

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial r} = -\frac{4\pi\zeta}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

или, с точностью до (l/a) ,

$$\frac{2(\mathcal{F}' - \mathcal{F})}{ca} + 2C_1 \cos \alpha = \frac{4\pi\zeta}{c^2} \left[\frac{2}{ca} \frac{d(\mathcal{F}l)}{dt} + a \frac{dC_1}{dt} \right] \cos \alpha.$$

Отсюда сразу следует $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$; этот результат связан с тем, что скин-эффект считается слабым. Для C_1 получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_1}{dt} + \rho C_1 = \frac{2}{a^2 c} \frac{d(\mathcal{F}l)}{dt}. \quad (7)$$

Параметр $\rho = \frac{c^2}{2\pi a \zeta}$ совпадает со значением сопротивления единицы длины трубы, выраженным в электромагнитных единицах.

Решение уравнения (7) легко получить методом вариации произвольных постоянных. Оно имеет вид

$$C_1 = \frac{2}{ca^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\tau-t)} \frac{d}{d\tau} [\mathcal{F}(\tau)l(\tau)] d\tau$$

(считаем, что при $t \rightarrow -\infty$ ток отсутствовал).

Сила f , приложенная к единице длины тока \mathcal{I} , может быть вычислена по формуле

$$f_x = -\frac{1}{c} \mathcal{I} H'_y,$$

где H'_y — магнитное поле на прямой, вдоль которой течет ток \mathcal{I} , создаваемое током, текущим в оболочке. Этому полю соответствует векторный потенциал

$$A' = C_1 r \cos \alpha = C_1 y,$$

откуда

$$H_y = -\frac{\partial A'}{\partial y} = -C_1.$$

Окончательно

$$f_x = \frac{2\mathcal{I}(t)}{c^2 a^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\tau-t)} \frac{d}{d\tau} [\mathcal{I}(\tau)l(\tau)] d\tau.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если ток постоянный ($\mathcal{I} = \text{const}$), то

$$f_x = \frac{2\mathcal{I}(t)^2}{c^2 a^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\tau-t)} i(\tau) d\tau.$$

При отклонении тока от оси цилиндра ($\dot{l} > 0$) возникнет сила, препятствующая этому отклонению. При медленном движении ($\ddot{l} \ll \rho \dot{l}$), интегрируя по частям, найдем

$$f_x = \frac{2\mathcal{I}^2}{c^2 a^2} \left(\frac{\dot{l}}{\rho} - \frac{\ddot{l}}{\rho^2} + \dots \right).$$

В частности, при равномерном перемещении $l = vt$ тормозящая сила

$$f_x = \frac{2\mathcal{I}^2 v}{c^2 a^2 \rho}.$$

398. $f_x = \frac{2\mathcal{I}^2(t)l(t)}{c^2 a^2}.$

ГЛАВА VIII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Плоские волны в однородной среде. Отражение и преломление волн. Волновые пакеты

399. Амплитуда первой волны $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{e}_x$, амплитуда второй волны $\mathbf{E}_2 = be^{i\chi}\mathbf{e}_y$, a и b — вещественны; результирующая амплитуда

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = a\mathbf{e}_x + be^{i\chi}\mathbf{e}_y.$$

Для выяснения характера поляризации удобно так сдвинуть начало отсчета фазы, чтобы в двух взаимно перпендикулярных направлениях получились колебания, отличающиеся по фазе на $\pi/2$. Введем новую амплитуду $\mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}_0 e^{-i\alpha} = \mathcal{E}' + i\mathcal{E}''$ и потребуем, чтобы векторы \mathcal{E}' и \mathcal{E}'' были вещественными, причем $\mathcal{E}' \cdot \mathcal{E}'' = 0$ (рис. 79):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' &= a \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_x + b \cos(\alpha - \chi) \cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathcal{E}'' &= -a \sin \alpha \mathbf{e}_x - b \sin(\alpha - \chi) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{1}$$

Определим сдвиг фазы α из условия $\mathcal{E}' \cdot \mathcal{E}'' = 0$:

$$a^2 \cos \alpha \sin \alpha + b^2 \sin(\alpha - \chi) \cos(\alpha - \chi) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos 2\chi}.\tag{2}$$

Определив из уравнения (2) угол α , подставим его значение в (1) и найдем \mathcal{E}' , \mathcal{E}'' . Введя в плоскости xy новые оси $x' \parallel \mathcal{E}'$ и $y' \parallel \mathcal{E}''$, получим

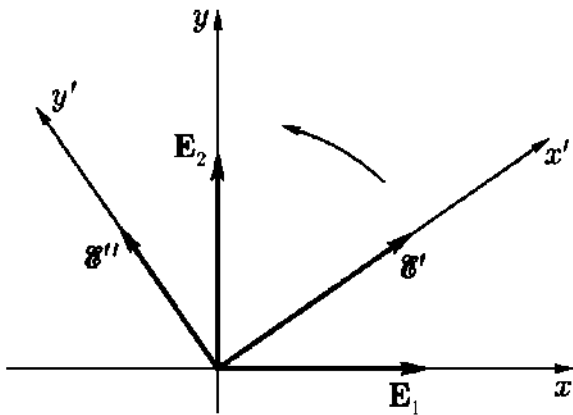


Рис. 79

В ЭТИХ ОСЯХ:

$$E_{x'} = \mathcal{E}' \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \alpha),$$

$$E_{y'} = \mathcal{E}'' \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \alpha).$$

Очевидно, что $\frac{E_{x'}^2}{\mathcal{E}'^2} + \frac{E_{y'}^2}{\mathcal{E}''^2} = 1$, т. е. конец вектора \mathbf{E} описывает эллипс.

В общем случае \mathcal{E}' , $\mathcal{E}'' \neq 0$. Колебания по оси x' опережают колебания по оси y' на $\pi/2$. Если ориентация осей x' , y' такая же как x , y , т. е. x' , y' ,

z образуют правую систему координат (этот случай изображен на рис. 79), то для наблюдателя, к которому движется волна (движение вдоль оси z), вектор \mathbf{E} будет вращаться против часовой стрелки. Такая поляризация называется эллиптической с левым направлением вращения. Если оси x' , y' , z образуют левую систему, то направление вращения \mathbf{E} будет противоположным, по часовой стрелке, и волна будет называться эллиптически поляризованной с правым направлением вращения.

При $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''$ поляризация круговая, при $\mathcal{E}' = 0$ или $\mathcal{E}'' = 0$ поляризация линейная.

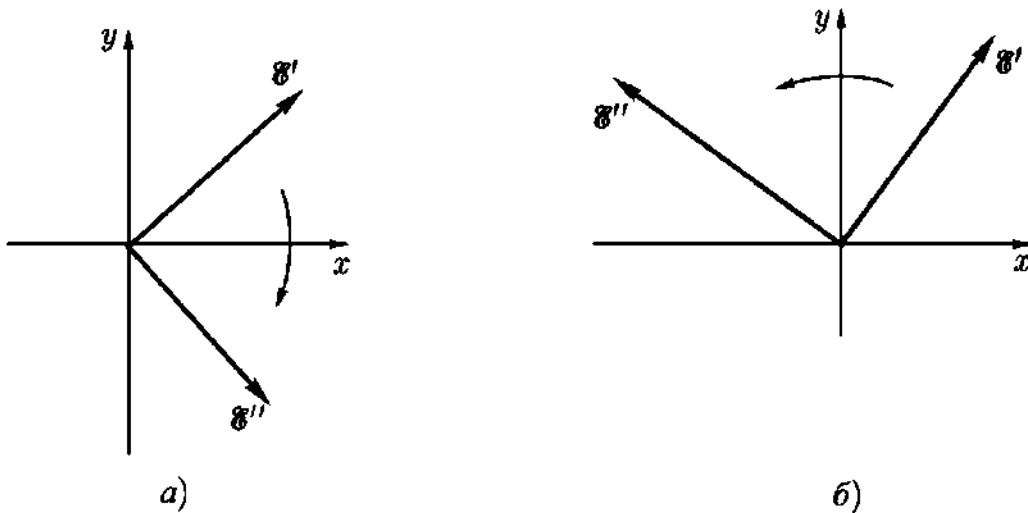


Рис. 80

400. При $\chi = 0$ поляризация линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла между осями x , y . При $\chi = \pi$ поляризация тоже линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла

между осями $(x, -y)$. При $\chi = -\frac{\pi}{2}$ поляризация круговая правая (рис. 80а). При $\chi = \frac{\pi}{2}$ поляризация круговая левая (рис. 80б). В остальных случаях поляризация эллиптическая, причем при $-\pi < \chi < 0$ она правая ($\cos \frac{\chi}{2} > 0$, $\sin \frac{\chi}{2} > 0$ и ориентация осей как на рис. 80а), а при $0 < \chi < \pi$ — левая (рис. 80б).

401. При $a = b$ поляризация линейная. При $a > b$ поляризация эллиптическая левая. При $a < b$ — эллиптическая правая. Круговая поляризация получается только при $b = 0$ (левая) или $a = 0$ (правая).

402. $P = \sqrt{1 - 4 \frac{|I_{ik}|}{[\text{Sp}(I_{ik})]^2}}$, где $|I_{ik}|$ — определитель тензора I_{ik} . Степень поляризации $P = 1$ при $|I_{ik}| = 0$.

404. Введем прямоугольные оси $x' \parallel a$ и $y' \parallel b$. В этих осях комплексная амплитуда поля будет иметь вид

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{e}_{x'} \pm i b\mathbf{e}_{y'}$$

где знак «+» отвечает левой эллиптической поляризации, а знак «−» — правой. Интенсивность $I = a^2 + b^2$. Фаза выбрана равной нулю для x' -компоненты поля. Выражая теперь орты $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$, через \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , получим для компонент I_{ik} :

$$\begin{aligned} I_{11} &= a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta, \\ I_{22} &= a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta, \\ I_{12} &= (b^2 - a^2) \sin \vartheta \cos \vartheta \mp iab = I_{21}^*. \end{aligned}$$

Верхний знак отвечает левой эллиптической поляризации, нижний — правой. При $b = 0$ поляризация линейна и тензор I_{ik} имеет вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

При $a = b = \sqrt{I/2}$ поляризация круговая и

$$I_{ik} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}.$$

405. Амплитуда суммарной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E(\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} e^{i\alpha}),$$

где α — сдвиг фаз, меняющийся беспорядочно, $|\mathbf{E}|^2 = I$. Компоненты тензора поляризации по определению (см. (VIII.14)) равны

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \overline{I(\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} e^{i\alpha})_i (\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} e^{-i\alpha})_k}.$$

При усреднении по времени получим $\overline{e^{\pm i\alpha}} = 0$, поэтому тензор поляризации будет иметь вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & 1 - \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя результат задачи 402, получим

$$P = |\cos \vartheta|.$$

Этот же результат можно получить, диагонализуя тензор I_{ik} . Приравняв нулю определитель системы уравнений (VIII.16), получим, что $I_1 = 1 + |\cos \vartheta|$, $I_2 = 1 - |\cos \vartheta|$. Отсюда опять $P = (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2) = |\cos \vartheta|$. Базисные векторы $\mathbf{e}_1 = (\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2})$ и $\mathbf{e}_2 = (-\sin \frac{\vartheta}{2}, \cos \frac{\vartheta}{2})$. Они вещественны в рассматриваемом случае.

Результирующая волна состоит из неполяризованной части с интенсивностью $I(1 - |\cos \vartheta|)$ и линейно поляризованной вдоль направления $\mathbf{e}_1 = (\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2})$ части с интенсивностью $I|\cos \vartheta|$:

$$(I_{ik}) = I(1 - |\cos \vartheta|)(\delta_{ik}) + I|\cos \vartheta| \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

Результирующая волна полностью поляризована (но не монохроматична) при $\vartheta = 0$. При $\vartheta = \pi/2$ — полная деполаризация.

406. Тензор поляризации

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 \end{pmatrix}$$

(ось x_1 совпадает с направлением поляризации первой волны).

Степень поляризации

$$P = \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1 + I_2}.$$

Результирующая волна состоит из неполяризованной волны с интенсивностью $(I_1 + I_2)(1 - P)$ и линейно поляризованной волны. Направление линейной поляризации составляет угол

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2} - I_1}{I_2}$$

с направлением поляризации первой волны.

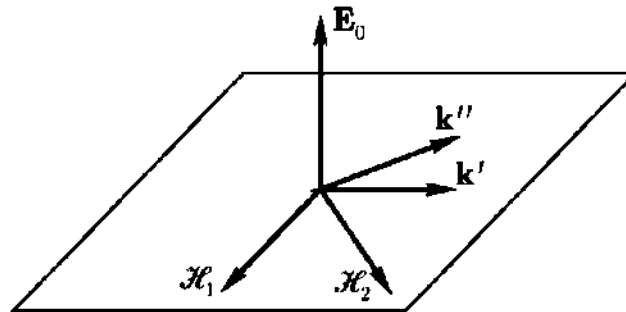


Рис. 81

407. $\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$; при $\xi = 0$ волна не поляризована, при $\xi = 1$ — полностью поляризована. Поэтому величина ξ называется степенью поляризации. Положим $\xi_i = \xi \eta_i$, где $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$. Тогда

$$I_{ik} = \frac{I}{2}(1 - \xi)\delta_{ik} + \frac{I\xi}{2} \left(1 + \sum_{l=1}^3 \eta_l \tau_{ik}^{(l)} \right).$$

Первый член в этом выражении соответствует полностью неполяризованному состоянию, а второй — полностью поляризованному. В случае а) $\eta_3 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Сравнивая

$$I''_{ik} = I\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с выражением $I_{ik} = I n_i n_k^*$, видим, что в данном случае $n_1 = 1, n_2 = 0$, т. е. тензор I''_{ik} описывает волну, линейно поляризованную в направлении оси x (волна распространяется в направлении z).

Аналогичным образом легко убедиться, что в случае б) $\eta_1 = 1, \eta_2 = \eta_3 = 0$ и волна линейно поляризована в направлении, составляющем 45° с осью x , а в случае в) $\eta_2 = 1, \eta_1 = \eta_3 = 0$ и волна поляризована по кругу.

408. Так как вектор \mathbf{E} поляризован линейно, амплитуду \mathbf{E}_0 можно выбрать вещественной. Из уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 0$ имеем $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}_0 = 0$, т. е. \mathbf{E}_0 перпендикулярна к плоскости $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$. Из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ следует

$$\frac{\mu\omega}{c} \mathcal{H}_1 = \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0, \quad \frac{\mu\omega}{c} \mathcal{H}_2 = \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0,$$

т. е. \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 перпендикулярны $\mathbf{E}_0, \mathcal{H}_1 \perp \mathbf{k}', \mathcal{H}_2 \perp \mathbf{k}''$.

Конец вектора \mathbf{H} описывает эллипс в плоскости $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ (рис. 81).

409. Обе волны будут поляризованы эллиптически. Одна из главных осей эллипса поляризации лежит в плоскости падения, другая к ней перпендикулярна. Полуоси имеют следующую величину.

В отраженной волне:

$$E_{\parallel} = \frac{\text{tg}(\vartheta_0 - \vartheta_2)}{\text{tg}(\vartheta_0 + \vartheta_2)} E_0, \quad E_{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_0)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_0)} E_0.$$

В преломленной волне:

$$E_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 \theta_2)} E_0, \quad E_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} E_0,$$

где θ_0 — угол падения, θ_2 — угол преломления, E_0 — абсолютная величина амплитуды падающей волны.

При $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ (угол Брюстера) отраженная волна поляризована линейно.

410. Неполяризованный (естественный) свет можно рассматривать как некогерентную суперпозицию двух «дополнительным образом» поляризованных волн с одинаковой интенсивностью. Воспользуемся этим и представим падающий пучок в виде суперпозиции двух некогерентных компонент, одна из которых E_{\parallel} поляризована в плоскости падения, а другая E_{\perp} — в перпендикулярной плоскости. Интенсивности этих волн одинаковы:

$$I_{\parallel} = I_{\perp} = I.$$

После отражения обе компоненты по-прежнему будут некогерентными. С помощью формул Френеля найдем

$$I_{ik}^{(1)} = I \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left(e_i^\perp e_k^\perp + \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} e_i^\parallel e_k^\parallel \right),$$

$$\rho_1 = \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} < 1,$$

e^\perp и e^\parallel — единичные векторы, указывающие направления поляризации поперечной и продольной компонент; эти векторы лежат в плоскости, перпендикулярной направлению отраженного света. Степень деполяризации падающего света равна 1; при отражении свет поляризуется.

Аналогичный расчет дает для преломленного света:

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{4I \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_2}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left(e_i^\perp e_k^\perp + \frac{e_i^\parallel e_k^\parallel}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} \right), \quad \rho_2 = \cos^2(\theta_0 - \theta_2) < 1.$$

411. $R = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}$, где ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости первого и второго диэлектрика.

412.

$$E_{\perp 1} = (-1 + 2\zeta \cos \theta_0) E_{\perp 0}, \quad E_{\parallel 1} = \left(1 - \frac{2\zeta}{\cos \theta_0} \right) E_{\parallel 0},$$

$$E_{\perp 2} = 2\zeta \cos \theta_0 E_{\perp 0}, \quad E_{\parallel 2} = 2\zeta E_{\parallel 0}.$$

Формулы для $E_{\parallel 1}$ и $E_{\parallel 2}$ применимы только в том случае, если угол скольжения $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \gg |\zeta|$.

При $\varphi_0 \ll 1$ справедливы формулы

$$E_{\parallel 1} = \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{\parallel 0}, \quad E_{\parallel 2} = \frac{\varphi_0 \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{\parallel 0}.$$

Относительная величина $|\zeta|$ и φ_0 при этом произвольна.

413. $R_{\perp} = 1 - 4\zeta' \cos \theta_0$. При всех углах падения R_{\perp} близок к 1, достигая минимума при $\theta_0 = 0$ (нормальное падение);

$$R_{\parallel} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos \theta_0} \quad \text{при} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \gg 4\zeta',$$

$$R_{\parallel} = \frac{(\varphi_0 - \zeta')^2 + \zeta''^2}{(\varphi_0 + \zeta')^2 + \zeta''^2} \quad \text{при} \quad \varphi_0 \ll 1.$$

Из условия $\frac{\partial R_{\parallel}}{\partial \varphi_0} = 0$ находим угол φ_0 , при котором R_{\parallel} минимален:

$$\varphi_0 = \Phi_0 = |\zeta|, \quad R_{\parallel} = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}.$$

Угол Φ_0 является аналогом угла Брюстера, так как значение R_{\parallel} при $\varphi_0 = \Phi_0$ минимально (при падении волны на границу диэлектрика под углом Брюстера коэффициент R_{\parallel} также минимален и равен нулю).

414. Характер поляризации отраженной волны определяется разностью фаз между продольной и поперечной компонентами. Используя результаты двух предыдущих задач, получим

$$E_{\perp 1} \approx -E_{\perp 0} = e^{i\delta_{\perp}} E_{\perp 0}, \quad \delta_{\perp} = \pi;$$

$$E_{\parallel 1} = \left[\frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\delta_{\parallel}} E_{\parallel 0}, \quad \text{tg } \delta_{\parallel} = - \frac{2\Phi_0 \zeta''}{\Phi_0^2 - |\zeta|^2} \Big|_{\varphi_0 \rightarrow \Phi_0} \rightarrow \infty,$$

т. е. $\delta_{\parallel} = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, разность фаз $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} = \frac{\pi}{2}$; отраженная волна в общем случае окажется эллиптически поляризованной, причем одна из осей эллипса будет лежать в плоскости падения.

При $|E_{\parallel 1}| = |E_{\perp 1}|$ поляризация будет круговой. При $E_{\parallel 0} = 0$ или $E_{\perp 0} = 0$ поляризация останется линейной.

415. С помощью формул Френеля находим

$$n' = \frac{\sin \theta_0 \text{tg } \theta_0 \cos 2\rho}{1 + \sin^2 2\rho \cos \delta}, \quad n'' = \frac{\sin \theta_0 \text{tg } \theta_0 \sin 2\rho \sin \delta}{1 + \sin 2\rho \cos \delta}.$$

$$416. \quad R = \frac{(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon'})^2}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^2} + \frac{4}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega} \right)^2.$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, из которой падает свет, ε' — вещественная часть диэлектрической проницаемости проводящей среды.

417. Сдвиги фаз между $E_{\perp 1}$, E_0 и $E_{\parallel 1}$, E_0 можно определить с помощью формул Френеля:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}{\cos \theta_0}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}{n^2 \cos \theta_0}. \quad (1)$$

Поскольку $\delta_{\perp} \neq \delta_{\parallel}$, волна поляризована по эллипсу.

Эллиптическая поляризация перейдет в круговую при выполнении условий:

$$\text{а) } \delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = \frac{\pi}{2}; \quad \text{б) } E_{\parallel 0} = E_{\perp 0}.$$

Условие б) означает, что падающая волна должна быть поляризована в плоскости, составляющей угол $\pi/4$ с плоскостью падения. Исследуем, может ли выполняться условие а).

Из формул (1) получим:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}{\sin^2 \theta_0}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при $\theta_0 = \arcsin n$ и $\theta_0 = \pi/2$, δ обращается в нуль, а между этими точками принимает максимальное значение. Обычным способом легко найти, что $\operatorname{tg} \frac{\delta_{\max}}{2} = \frac{1 - n^2}{2n}$. Чтобы $\operatorname{tg} \delta/2$ был равен 1 ($\delta = \frac{\pi}{2}$), должны выполняться неравенства $1 - n^2 \geq 2n$, $n \leq 0,414$.

418. Если вектор E_0 нормален к плоскости падения, поперечная и продольная составляющие вектора Пойнтинга имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\perp} &= \frac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2 e^{-2k''z} \sin 2(k'x - \omega t), \\ \gamma_{\parallel} &= \frac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2 e^{-2k''z} [1 - \cos 2(k'x - \omega t)]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь ось z нормальна к границе сред, ось x представляет собою линию пересечения плоскости падения и границы раздела,

$$k' = k_2 \sin \theta_0, \quad k'' = k_2 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2},$$

где $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$ — волновой вектор во второй среде, θ_0 — угол падения.

Из формул (1) видно, что в направлении нормали к границе энергия совершает колебания с частотой 2ω . Средний (по времени) поток энергии

во вторую среду равен нулю. Среднее значение γ_{\parallel} не равно нулю: имеется поток энергии вдоль границы раздела.

Линии вектора Пойнтинга во второй среде определяются уравнением

$$z = \frac{1}{k''} \ln \frac{|\sin k'x|}{C}, \quad (2)$$

где C — постоянная интегрирования.

Примерный ход этих линий изображен на рис. 82. В первой среде линии γ имеют более сложный вид (см. [118]).

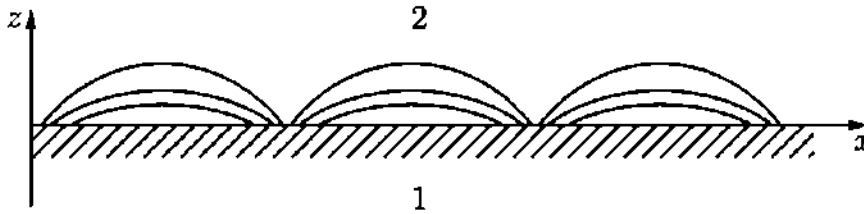


Рис. 82

419. Из формул Френеля (VIII.19), (VIII.20) получим, что при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ амплитуда прошедшей волны $E_1 \rightarrow 0$, а амплитуда отраженной волны $E_2 \rightarrow -E_0$. Это означает, что плоская монохроматическая волна не может распространяться вдоль границы раздела диэлектриков.

420. Закон преломления принимает в этом случае комплексную форму:

$$k_1 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2, \quad k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2' + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega}} = k_2' + ik_2'';$$

$\sin \theta_2$ и $\cos \theta_2$ являются комплексными величинами.

Положим $\cos \theta_2 = \rho e^{i\alpha}$, где ρ и α — вещественные величины, зависящие от θ_0 и электрических постоянных среды. Параметры ρ , α определяются из системы уравнений:

$$\rho^2 \cos 2\alpha = 1 - \frac{k_1^2(k_2'^2 - k_2''^2)}{|k_2|^4} \sin^2 \theta_0, \quad \rho^2 \sin 2\alpha = \frac{2k_1^2 k_2' k_2''}{|k_2|^4} \sin^2 \theta_0.$$

Волна, прошедшая в проводящую среду 2, описывается функцией

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2 e^{i(k_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части в произведении $k_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r}$, получим

$$k_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r} = (k'_2 + ik''_2)(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2) = izp(\theta_0) + xk_1 \sin \theta_0 + zq(\theta_0),$$

где

$$p(\theta_0) = \rho(k'_2 \sin \alpha + k''_2 \cos \alpha), \quad q(\theta_0) = \rho(k'_2 \cos \alpha - k''_2 \sin \alpha).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2 e^{-pz} e^{i(xk_1 \sin \theta_0 + zq - \omega t)}.$$

Отсюда видно, что направления распространения и затуханий волны не совпадают — волна неоднородна. Плоскости постоянной амплитуды $z = \text{const}$ параллельны поверхности проводника. Плоскости постоянной фазы определяются уравнением

$$xk_1 \sin \theta_0 = zq(\theta_0) = \text{const},$$

из которого следует, что вектор \mathbf{k}'_2 , указывающий направление распространения волны, составляет с осью z угол $\psi = \text{arctg} \frac{k_1 \sin \theta_0}{q(\theta_0)}$ (рис. 83). Фазовая скорость в проводящей среде зависит от угла падения:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{q^2(\theta_0) + k_1^2 \sin^2 \theta_0}}.$$

421. Для определения коэффициента отражения от плоского слоя нужно найти связь между амплитудами отраженной и падающей волн. Эту связь можно определить двумя способами.

По первому способу — с помощью граничных условий. Учитывая, что на границах $z = 0$ и $z = a$ должны быть непрерывны касательные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , и что перед слоем со стороны падающей волны имеются волны, распространяющиеся в обе стороны, а за слоем — только прошедшая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z , получим из граничных условий:

$$E_1 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{-2ik_2 a}}{1 + \alpha_{12} \alpha_{23} e^{-2ik_2 a}} E_0, \quad (1)$$

где E_1 — амплитуда отраженной, а E_0 — амплитуда падающей волны,

$$\alpha_{12} = \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}, \quad \alpha_{23} = \frac{1 - n_{23}}{1 + n_{23}}, \quad n_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_k}{\epsilon_i}}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2}.$$

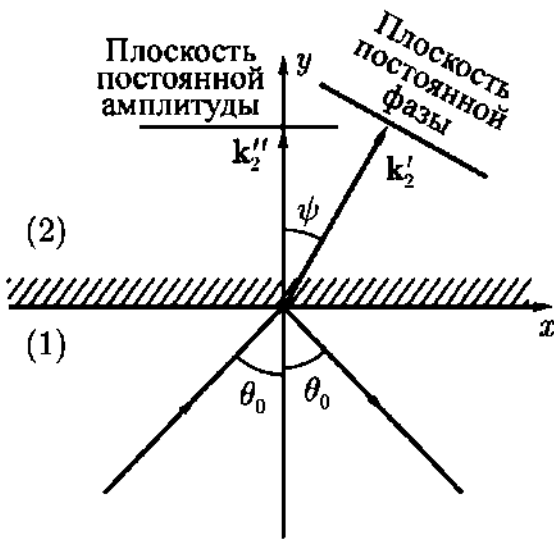


Рис. 83

Второй способ решения задачи — рассмотрение многократных отражений волны от границ раздела. Используя формулы Френеля для нормального падения, найдем, что амплитуда волны, однократно отраженной от границы $z = 0$, запишется в виде

$$\mathcal{E}_0 = \alpha_{12} E_0.$$

Амплитуда волны, прошедшей внутрь слоя:

$$\mathcal{E}_\alpha = \beta_{12} E_0,$$

где

$$\beta_{12} = \frac{2}{1 + n_{12}}.$$

Амплитуда волны, вышедшей из слоя в область $z < 0$ после однократного отражения от границы $z = a$:

$$\mathcal{E}_1 = \beta_{21} \alpha_{23} \beta_{12} E_0 e^{-2ik_2 a}.$$

Амплитуда волны, вернувшейся в область $z < 0$ после s -кратного отражения от границы $z = a$:

$$\mathcal{E}_s = \beta_{21} \beta_{12} \alpha_{23} e^{-2ik_2 a} (\alpha_{21} \alpha_{23} e^{-2ik_2 a})^{s-1}.$$

Полная амплитуда E_1 волны, отраженной от плоского слоя, равна сумме всех \mathcal{E}_s :

$$E_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{E}_s = \alpha_{12} E_0 + \beta_{21} \beta_{12} \alpha_{23} e^{-2ik_2 a} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23} e^{-2ik_2 a})^{s-1}.$$

С помощью формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим снова соотношение (1).

Коэффициент отражения определяется как $R = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2}$. Находя минимум R обычным способом, получим, что отражение минимально, если толщина слоя удовлетворяет условию

$$a = a_n = n \frac{\lambda_2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

где λ_2 — длина волны внутри слоя.

Рассмотрим наименьшую толщину слоя $a = \frac{\lambda_2}{4}$, соответствующую минимуму R . Приравнявая R нулю, найдем условие отсутствия отражения:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}.$$

422. Уравнение, которому удовлетворяет электрическое поле, запишется в виде (см. (VIII.12)):

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon - \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^{z/a} + 1} \right) E = 0. \quad (1)$$

Мы должны найти решение этого уравнения, которое при всех z является ограниченным и при $z \rightarrow \pm\infty$ удовлетворяет некоторым условиям, вытекающим из физического смысла задачи. При $z \rightarrow -\infty$ решение должно представлять суперпозицию двух волн, падающей и отраженной, т. е.

$$E(z) \rightarrow Ae^{ik_0 z} + Be^{-ik_0 z}, \quad (2)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

При $z \rightarrow \infty$ должна оставаться только прошедшая волна:

$$E(z) \rightarrow Ce^{ikz}, \quad (3)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}$.

Произведем в уравнении (1) замену независимой переменной $-e^{-\frac{z}{a}} = \xi$. Новая переменная меняется в пределах $-\infty \leq \xi \leq 0$ при изменении z от $-\infty$ до $+\infty$. С помощью подстановки $E(\xi) = \xi^{-ika} \psi(\xi)$, получим для новой неизвестной функции $\psi(\xi)$ уравнение

$$\xi(1 - \xi)\psi'' + (1 - 2ika)\xi\psi' + \kappa^2 a^2 \psi = 0, \quad (4)$$

где $\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \varepsilon$. Это уравнение называется гипергеометрическим.

Как следует из условия (3), функция $\psi(\xi)$ должна стремиться к постоянному пределу при $\xi \rightarrow 0$. Решением уравнения (4), ведущим себя указанным образом, является гипергеометрическая функция (см. справочник [90], 7.200, 7.251):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 2!} z^2 + \dots$$

Поэтому решение уравнения (4) запишем в виде

$$\psi = CF \left[-i(k + k_0)a, -i(k - k_0)a, 1 - 2ika, -e^{-\frac{z}{a}} \right]. \quad (5)$$

Чтобы найти вид функции ψ при $\xi \rightarrow -\infty$, воспользуемся асимптотическим представлением гипергеометрической функции, которое легко получить из [90] (формула 7.232, 2):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-\xi)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (-\xi)^{-\beta}. \quad (6)$$

С помощью этой формулы убеждаемся, что условие (2) выполнено.

Коэффициент отражения

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(2ik_0a)\Gamma[1 - i(k + k_0)a]\Gamma[-i(k + k_0)a]}{\Gamma(-2ik_0a)\Gamma[1 - i(k - k_0)a]\Gamma[-i(k - k_0)a]} \right|^2. \quad (7)$$

Для упрощения полученного выражения используем формулы

$$\left| \frac{\Gamma(2ik_0a)}{\Gamma(-2ik_0a)} \right| = \left| \frac{\Gamma(2ik_0a)}{\Gamma^*(2ik_0a)} \right| = 1 \quad \text{и} \quad \Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Окончательно получим

$$R = \frac{\text{sh}^2 \pi a(k - k_0)}{\text{sh}^2 \pi a(k + k_0)}. \quad (8)$$

При малых a ($ka \ll 1$) R переходит в известное выражение, справедливое при скачкообразном изменении ε :

$$R = \frac{(k - k_0)^2}{(k + k_0)^2}.$$

С ростом a R монотонно убывает. При больших ka убывание происходит по экспоненциальному закону:

$$R = e^{-4\pi k_0 a}, \quad ka \gg 1.$$

423. При нормальном падении волны на неоднородный слой, электрическое поле зависит только от z и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, z) E = 0. \quad (1)$$

Обозначим $\frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0} = z_1$, тогда $\varepsilon = 1 - \frac{z}{z_1}$. Введением переменной $\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{\frac{1}{3}} (z_1 - z)$ уравнение (1) приводится к виду¹

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) проще всего получить с помощью преобразования Фурье. Разложим $E(\xi)$ в интеграл Фурье:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(u) e^{i\xi u} du, \quad E(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) e^{-i\xi u} d\xi.$$

Подставляя разложение $E(\xi)$ в (2), получаем относительно амплитуды $E(u)$ дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dE(u)}{du} + iu^2 E(u) = 0. \quad (3)$$

В результате преобразования Фурье мы получили вместо уравнения второго порядка более простое уравнение первого порядка. Уравнение (3) легко интегрируется, его решение

$$E(u) = A' e^{-\frac{i u^3}{3}}.$$

Переходя к $E(\xi)$, имеем

$$E(\xi) = A' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right)} du.$$

¹Таким же уравнением в квантовой механике описывается движение частицы в однородном силовом поле.

Представляя $e^{-i\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right)}$ в виде суммы синуса и косинуса, и замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции интеграл от $\sin\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right)$ равен нулю, получим:

$$E(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right) du. \quad (4)$$

Функция

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right) du$$

называется функцией Эйри¹ (она может быть выражена через функции Бесселя с индексом $\frac{1}{3}$). Таким образом, окончательно

$$E(\xi) = A\Phi(-\xi).$$

Константа A должна определяться из условия на границе слоя.

Исследуем поведение $E(\xi)$ при больших $|\xi|$. Пользуясь асимптотическими формулами для $\Phi(\xi)$ (см. [11]), получаем при больших положительных значениях ξ :

$$E(\xi) = \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь поле имеет осциллирующий характер.

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях ξ :

$$E(\xi) = \frac{A}{2|\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}|\xi|^{3/4}}.$$

Поле экспоненциально затухает. Причина этого состоит в том, что отрицательным ξ соответствуют отрицательные значения диэлектрической постоянной ϵ . Но при $\epsilon < 0$ волновой вектор $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon}$ становится чисто мнимым, что и ведет к затуханию. Однако затухание в данном случае связано не с переходом электромагнитной энергии в тепло (так как диэлектрическая проницаемость вещественна — потери отсутствуют), а с отражением волны от слоя с отрицательным ϵ .

¹Эта функция подробно исследована В. А. Фоком (см. В. А. Ф о к, Таблицы функции Эйри, 1946 г.).

424. $\Psi(x, 0) = A(x, 0)e^{ik_0x}$,

где

$$A(x, 0) = a_0 \sqrt{\pi \Delta k} e^{-\frac{x^2 \Delta k^2}{4}}.$$

Амплитуда волнового пакета $A(x, 0)$ имеет форму кривой Гаусса. Она становится исчезающе малой, если $|x \Delta k| \gg 1$. Отсюда следует, что ширина пакета в обычном пространстве связана с его «шириной» в пространстве k соотношением $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$. Это соотношение имеет универсальный характер и справедливо как для электромагнитных волн, так и для волн любой другой природы. Оно играет особую роль для волн вероятности в квантовой механике, приводя к соотношению неопределенностей для координаты и импульса микрочастицы.

425. $\Psi(0, t) = A(0, t)e^{-i\omega_0 t}$, где

$$A(0, t) = a_0 \sqrt{\pi \Delta \omega} e^{-\frac{t^2 \Delta \omega^2}{4}}; \quad \Delta t \cdot \Delta \omega \approx 1.$$

426. $\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi \sin \theta}$, где θ — половина угла конуса раствора лучей, проведенных из объектива микроскопа к рассматриваемому объекту.

427. Волновой импульс, посылаемый радиолокатором, имеет ширину Δx , связанную с поперечным разбросом волновых векторов k_{\perp} соотношением $\Delta x \cdot k_{\perp} \geq 1$. С другой стороны, очевидно, $\frac{\Delta x}{l} \approx \frac{k_{\perp}}{k}$. Из этих двух соотношений находим неточность в определении положения объекта:

$$\Delta x \geq \sqrt{l\lambda}.$$

428. Волновой пакет описывается функцией

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi a_0 \sqrt{\frac{\pi q^3}{2\rho^3}} J_{\frac{3}{2}}(\rho q) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)},$$

где $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$ — функция Бесселя, $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{v}_g t|$. Группо-

вая скорость $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$ — вектор с компонентами $\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$. Амплитуда волнового пакета теперь заметно отлична от нуля только в пространственной (сферически симметричной) области $\rho q \leq 1$. Пакет ограничен по всем трем измерениям.

Как видно из выражения для $\Psi(x, t)$, форма пакета со временем не меняется. Это обусловлено линейным законом дисперсии, который строго справедлив для электромагнитных волн только в вакууме. При учете следующих членов разложения ω по k имеет место изменение («расплывание») формы пакета. Пакет движется как целое с групповой скоростью v_g .

429. Представив зависимость $\omega(k)$ в виде

$$\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2,$$

получим

$$\Psi(x, t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4(\alpha + i\beta t)} + i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Характер зависимости этой комплексной амплитуды от x и t проще исследовать, образовав квадрат модуля (именно он определяет интенсивность волны):

$$|A(x, t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} e^{-\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}}.$$

Из этого выражения видно, что интенсивность волны как функция x при фиксированном t имеет вид кривой Гаусса, но ее ширина l растет со временем:

$$l = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}},$$

а высота убывает за счет множителя $(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Волновой пакет расплывается. Расплывание происходит симметричным образом (в сторону $t = +\infty$ и в сторону $-\infty$) и, разумеется, не связано с поглощением энергии, так как k вещественно. Отсутствие диссипации видно и из того, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |A(x, t)|^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} a_0^2$ не зависит от времени, т. е. «полная интенсивность» сохраняется. Причиной расплывания является неодинаковость скоростей распространения (фазовых) $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ отдельных плоских волн, входящих в суперпозицию: вследствие дисперсии отношение $\frac{\omega}{k}$ зависит от k .

430. При $\omega \ll \omega_0$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\varepsilon_0 \omega_0^4} \right) < c, \quad v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\varepsilon_0 \omega_0^4} \right) < c,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.

При $\omega \gg \omega_0$

$$v_\varphi = c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) > c, \quad v_g = c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) < c.$$

В последнем случае $v_\varphi \cdot v_g \approx c^2$. Вблизи резонансной частоты ($\omega \approx \omega_0$) понятие групповой скорости теряет смысл.

431. Как следует из результатов, полученных в задачах 428, 429, функция, описывающая волновой пакет, имеет вид

$$E(x, t) = E_0(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Здесь амплитуда $E_0(x, t)$ меняется значительно медленнее, чем $e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ (периоды изменения этих функций относятся как $\Delta k/k_0$). Пренебрегая изменением E_0 по сравнению с $\exp i(k_0 x - \omega_0 t)$, имеем из уравнения Максвелла

$$H(x, t) = \frac{k_0 c}{\omega_0 \mu} E(x, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Плотность потока энергии, усредненная по периоду $2\pi/\omega_0$ изменения высокочастотной составляющей, равна

$$\bar{\gamma}(x, t) = \frac{c}{8\pi} |\operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0(x, t) E_0^*(x, t).$$

Из соотношения $\bar{\gamma} = v \bar{\omega}$ находим скорость переноса энергии:

$$v = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega \sqrt{\varepsilon \mu})} = \frac{d\omega}{dk} = v_g.$$

§ 2. Плоские волны в анизотропных и гиротропных средах

432.
$$\cos \alpha = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \theta}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta.$$

433. Для того чтобы граничные условия для векторов поля выполнялись в любой точке поверхности раздела, необходимо равенство касательных к границе раздела компонент волнового вектора у падающей, отраженной и обеих преломленных волн. Для обыкновенной волны это дает

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta'_2, \quad \frac{\sin \theta'_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu}.$$

Направление луча (вектора Пойнтинга) в обыкновенной волне совпадает с направлением волнового вектора и составляет, следовательно, угол θ'_2 с нормалью к границе.

В случае необыкновенной волны имеем

$$k_0 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta''_2 = k_0 \sin \theta''_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta''_2 + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta''_2}}$$

(см. (VIII.23)). Отсюда находим

$$\sin^2 \theta''_2 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta_0}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta_0}.$$

Угол ϑ'' между лучом и оптической осью (совпадающей с нормалью к поверхности раздела), согласно результатам предыдущей задачи, определяется условием

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta''_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} \sin \theta_0}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\parallel} \mu - \sin^2 \theta_0)}}.$$

Угол отражения от кристалла, как и от изотропной среды, равен углу падения: $\theta_1 = \theta_0$.

434. Обыкновенный луч лежит в плоскости падения и составляет с нормалью к поверхности угол θ'_2 :

$$\sin \theta'_2 = \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu} \sin \theta_0.$$

Волновой вектор k_2 необыкновенной волны лежит в плоскости падения и составляет с нормалью угол θ''_2 :

$$\sin^2 \theta''_2 = \frac{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta_0}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha}.$$

Направление луча в необыкновенной волне не лежит в плоскости падения. Луч расположен в одной плоскости с \mathbf{k}_2 и оптической осью и составляет с последней угол ϑ , причем (рис. 70):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel} \mu + \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha}}{\varepsilon_{\parallel} \sin \theta_0 \cos \alpha}.$$

435. Подставляя в уравнения Максвелла (VIII.1)–(VIII.4) выражения полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде плоских волн, получим уравнение, определяющее

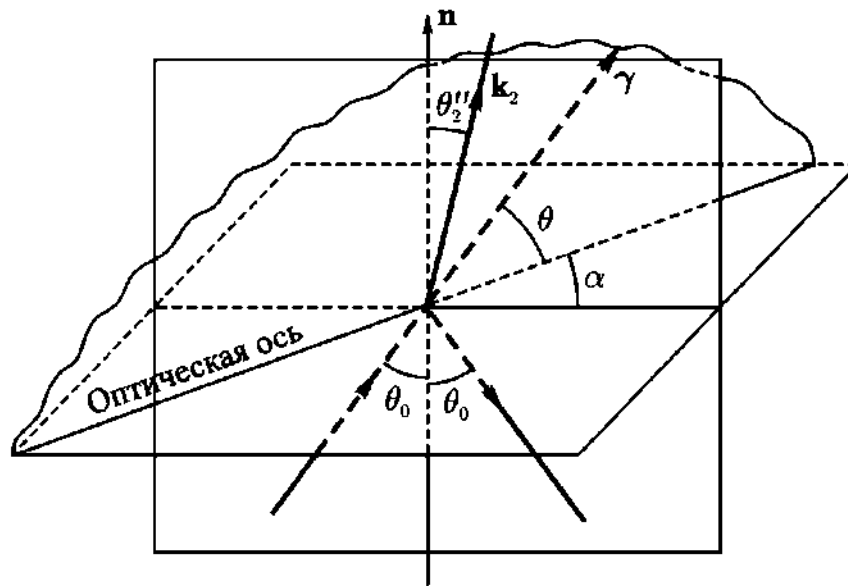


Рис. 84

амплитуды и волновые векторы волн, которые могут распространяться в данной среде:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \tilde{\mu} \mathbf{H}_0. \quad (1)$$

Введем угол θ между волновым вектором \mathbf{k} и осью z и запишем (1) в проекциях на оси координат.

Приравнявая нулю определитель системы, получим биквадратное уравнение относительно k . Его решение дает:

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}}{2c^2} \cdot \frac{\mu \sin^2 \theta + (2\mu_{\perp}/\mu_{\parallel}) \pm \sqrt{\mu^2 \sin^4 \theta + (2\mu_{\alpha}/\mu_{\parallel})^2 \cos^2 \theta}}{(\mu_{\perp}/\mu_{\parallel} - 1) \sin^2 \theta + 1}, \quad (2)$$

где

$$\mu = \frac{\mu_{\perp}^2 - \mu_a^2 - \mu_{\perp}\mu_{\parallel}}{\mu_{\parallel}^2}.$$

В каждом направлении могут распространяться две волны с разными фазовыми скоростями $v_{1,2} = \frac{\omega}{k_{1,2}}$, зависящими от угла θ . Направлений, для которых эти фазовые скорости становились бы одинаковыми, не существует, так как радикал в (2) не принимает нулевых значений ни при каких θ .

Если в формуле (2) положить $\mu_a = 0$, то она будет определять фазовые скорости волн, которые могут распространяться в негиротропном, но анизотропном магнитном кристалле:

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\perp}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon \mu_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\mu_{\parallel} \cos^2 \theta + \mu_{\perp} \sin^2 \theta}.$$

Первая из этих волн (обыкновенная) имеет скорость $v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu_{\perp}}}$, не зависящую от направления распространения. Скорость второй волны (необыкновенной) зависит от угла между осью симметрии кристалла и направлением распространения. При распространении волны вдоль оси симметрии ($\theta = 0$) обе скорости совпадают, две волны вырождаются в одну.

436. В любом направлении могут распространяться две волны с фазовыми скоростями $v_{1,2} = \frac{\omega}{k_{1,2}}$; $k_{1,2}$ определяется формулой (2) предыдущей задачи, в которой нужно заменить магнитные величины соответствующими электрическими.

437. Плоская волна, распространяющаяся вдоль постоянного магнитного поля, распадается на две волны с правой и левой круговыми поляризациями и разными фазовыми скоростями $v_{\pm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\mu_{\perp} \pm \mu_a)}}$.

При распространении перпендикулярно постоянному магнитному полю одна из волн (со скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu_{\parallel}}}$) будет чисто поперечной ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$). Она аналогична волнам, распространяющимся в изотропной среде со скалярными параметрами ε , $\mu = \mu_{\parallel}$. Во второй волне (со скоростью $v = c \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\varepsilon(\mu_{\perp}^2 - \mu_a^2)}}$) вектор \mathbf{E} будет направлен вдоль постоянного магнитного поля, а вектор \mathbf{H} будет иметь составляющую в направлении распространения. Таким образом, волна с произвольной поляризацией расщепится на две линейно поляризованные волны.

Все результаты, полученные в этой задаче, сохраняют силу и для случая, когда ε является эрмитовым тензором, а μ — скаляром. Нужно только заменить магнитные величины соответствующими электрическими и наоборот.

438. Как было найдено в предыдущей задаче, в направлении магнитного поля могут распространяться с разными фазовыми скоростями две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Поэтому волна, поляризация которой, отлична от круговой, расщепится на две волны, поляризованные по кругу. Так как фазовые скорости этих двух волн различны, сдвиг фаз между ними будет меняться от точки к точке, вследствие чего поляризация суммарной волны будет различной в разных точках.

Проведя вычисления, получим, что поляризация результирующей волны остается линейной, но плоскость поляризации повернется на угол $\chi = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)z$ (эффект Фарадея). Величины k_+ и k_- представляют собой волновые векторы двух волн с круговыми поляризациями и могут быть найдены из результатов задач 437 и 318. В случае слабого магнитного поля получим

$$\chi = VHz,$$

где коэффициент пропорциональности V носит название постоянной Верде. Если атомы вещества рассматриваются как гармонические осцилляторы, постоянная V примет вид:

$$V = \frac{2\pi e^3 N}{nm^2 c} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления в отсутствие магнитного поля.

439. Из соображений симметрии следует, что волновые векторы отраженной и прошедшей волн перпендикулярны к границе раздела. Обе эти волны будут поляризованы по кругу в том же направлении, что и падающая волна. Амплитуда отраженной волны $H_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\mu_{\perp} \pm \mu_a}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu_{\perp} \pm \mu_a}} H_0$, где H_0 — амплитуда падающей волны, ε — диэлектрическая проницаемость, μ_{\perp} , μ_a — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (см. задачу 435).

Амплитуда прошедшей волны

$$H_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu \pm \mu_a}} H_0.$$

Знаки «+» и «-» соответствуют волнам с правой и левой круговой поляризациями.

440. Волновые векторы отраженной и прошедших волн перпендикулярны к границе раздела. Отраженная волна поляризована эллиптически, полуоси эллипса

$$H_1' = H_0 \frac{\varepsilon - \sqrt{\mu^2 - \mu_a^2}}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a})(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a})},$$

$$H_1'' = H_0 \frac{\sqrt{\varepsilon(\mu - \mu_a)} - \sqrt{\varepsilon(\mu + \mu_a)}}{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a})(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a})}.$$

Направление H_1' совпадает с направлением поляризации вектора \mathbf{H} в падающей волне. Прошедшая волна расщепляется на две волны с амплитудами

$$H_2' = \frac{H_0 \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu + \mu_a}}, \quad H_2'' = \frac{H_0 \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\mu - \mu_a}},$$

поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Скорости их распространения различны (см. ответ к задаче 437).

441. Если длина волны много больше радиуса дисков и расстояний между соседними дисками, то искусственный диэлектрик можно рассматривать как сплошную среду. Электрическое поле падающей волны касательно к плоскостям дисков. Поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 поляризуемость диэлектрика будет иметь значение $\alpha = N\beta_e$, где $\beta_e = \frac{4a^3}{3\pi}$ — продольная (относительно плоскости диска) электрическая поляризуемость диска, N — число дисков в единице объема.

Продольная магнитная поляризуемость диска β_m равна нулю (см. задачу 390), поэтому магнитная восприимчивость диэлектрика χ при рассматриваемом направлении магнитного поля волны обращается в нуль.

Наличие внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 приводит к эффекту Холла: электроны проводимости, создающие ток в каждом диске, будут отклоняться под действием поля \mathbf{H}_0 и создавать добавочное электрическое поле \mathbf{E}_H , которое должно уравновесить отклоняющее действие магнитного поля. Это приведет к появлению добавочного электрического момента каждого диска, вследствие чего изменяются вектор поляризации среды и электрическая индукция. Чтобы вычислить это изменение индукции, удобно рассмотреть полную плотность поляризационного тока $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ в диэлектрике, а не ток в отдельном диске.

В первом приближении по H_0 поле E_H , вызванное эффектом Холла, выразится в виде

$$E_H = R(H_0 \times j) = R\left(H_0 \times \frac{\partial P}{\partial t}\right),$$

где R — постоянная Холла, $P = \alpha E$ — вектор поляризации в нулевом приближении. За счет поля E_H вектор поляризации получит приращение

$$\Delta P = \alpha E_H = \alpha^2 R\left(H_0 \times \frac{\partial E}{\partial t}\right),$$

благодаря чему индукция D выразится через E и производную $\frac{\partial E}{\partial t}$:

$$D = E + 4\pi(P + \Delta P) = \epsilon E + 4\pi\alpha^2 R\left(H_0 \times \frac{\partial E}{\partial t}\right). \quad (2)$$

Здесь $\epsilon = 1 + 4\pi N\beta_e$ — диэлектрическая проницаемость при отсутствии внешнего магнитного поля.

При гармонической зависимости E от времени уравнение (2) даст связь между D и E вида

$$D = \epsilon E + i(E \times g).$$

где $g = 4\pi\alpha^2\omega R H_0$ — вектор гирации (см. (VIII.25)). Таким образом, среда будет гиротропной. Как следует из результатов задачи 437, в направлении вектора g возможно распространение двух волн, поляризованных по кругу в разных направлениях и имеющих разные базовые скорости $v_{\pm} = \frac{\omega}{k_{\pm}}$.

Определяя k_{\pm} обычным способом, получим

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon \pm g).$$

442. Волна, у которой электрический вектор параллелен проводникам, отразится от решетки, как от сплошной металлической плоскости. Волна, у которой электрический вектор перпендикулярен проводникам, будет распространяться как в свободном пространстве, потому что она не возбудит токов в решетке.

443. Будем искать решение уравнений Максвелла в виде плоских волн. Амплитуда E_0 этих волн удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times E_0 &= \frac{\omega}{c} H_0, \\ \mathbf{k} \times H_0 &= -\frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) E_0. \end{aligned} \quad (1)$$

В случае продольного электрического поля $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = 0$, поэтому $\mathbf{H}_0 = 0$, $\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 = 0$.

Из последнего равенства следует, что продольное электрическое поле может существовать, если

$$\varepsilon(\omega) = 0. \quad (2)$$

Частоты продольных колебаний ω_α определяются этим уравнением и являются, как правило, комплексным, $\omega_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha - i\gamma_\alpha$. Это означает, что колебания, возникнув, будут затухать. Если выполняется условие $\gamma_\alpha \ll \tilde{\omega}_\alpha$, то затухание за период колебаний мало. Такие колебания будут долгоживущими.

В случае плазмы с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$ (см. задачу 312) частота продольных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{i\gamma}{2}$. При $\gamma \rightarrow 0$ она совпадает с плазменной частотой:

$$\omega_0 = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}. \quad (3)$$

Согласно формуле (3), частота ω не зависит от волнового вектора, поэтому групповая скорость продольных плазменных волн равна нулю. Однако этот результат имеет место только в первом приближении и связан с тем, что не учитывается пространственная неоднородность электрического поля. Продольные плазменные волны представляют собою колебания облака электронов относительно облака ионов (последние в рассматриваемом приближении считаются неподвижными).

444. $\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{E}_0 \exp[-\alpha|x| + i(kz - \omega t)]$, где частота ω определяется из условия $\varepsilon(\omega) = -1$: $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$.

Постоянная затухания α выражается через волновой вектор k :

$$\alpha = k \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{kc} \right)^2};$$

в случае медленной волны $\alpha \approx k$. Волновой вектор k может иметь произвольную величину. Амплитуда \mathbf{E}_0 имеет компоненты $E_{0y} = 0$, $E_{0x} = \pm \frac{ik}{\alpha} E_{0z} \approx \pm i E_{0z}$, где знак «+» соответствует $x > 0$, а знак «-» области $x < 0$. Таким образом, поляризация близка к круговой, причем вектор \mathbf{E} вращается в плоскости xz . Амплитуда магнитного поля $\mathbf{H}_0(0, H_{0y}, 0)$ мала по сравнению с \mathbf{E}_0 : $H_{0y} = E_{0z}\omega/kc \ll E_{0z}$, что характерно для плазменных колебаний. Рассмотренная волна называется поверхностной плазменной волной.

445. Как следует из задачи 437, вдоль направления постоянного магнитного поля возможно распространение двух волн с правой и левой круговыми поляризациями. Волновые векторы этих волн определяются равенством (см. задачу 321):

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \left(\omega + i\gamma \mp \omega_H - \frac{\omega_H \Omega_H}{\omega} \right)}.$$

При $\Omega_H \ll \omega$ влияние движения положительных ионов очень мало, их можно рассматривать как неподвижные. В обратном предельном случае $\Omega_H \gg \omega$ и $\gamma\omega \ll \omega_H \Omega_H$ роль положительных ионов становится определяющей:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H \Omega_H} = 1 + \frac{4\pi N M c^2}{H_0^2}.$$

Обе волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью v_{φ} , которая совпадает с их групповой скоростью v_g :

$$v_g = v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c}{1 + 4\pi N M c^2 / H_0^2}} \quad (2)$$

или

$$v_g = v_{\varphi} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N M}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\tau}}, \quad (3)$$

если можно пренебречь единицей по сравнению со вторым членом; здесь $\tau = NM$ — плотность газа (очевидно, массой электронов можно пренебречь). Если бы движение положительных ионов не учитывалось, то вместо конечной постоянной скорости (3) при $\omega \rightarrow 0$ получилась бы нулевая скорость, и соответствующие волны не могли бы существовать. Таким образом, механические колебания газа и колебания электромагнитного поля оказываются в этом случае тесно связанными. Волны, распространяющиеся со скоростью (3), называются магнитогидродинамическими. Они играют большую роль в астрофизических и других процессах.

446. Линеаризованное уравнение, связывающее амплитуды высокочастотных составляющих намагниченности (\mathbf{m}_0) и магнитного поля (\mathbf{h}_0), вытекает из (VI.15) и (VI.16):

$$i\omega \mathbf{m}_0 = -\gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}_0) - \gamma(\mathbf{m}_0 \times \mathbf{H}_0) + \gamma q k^2 (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m}_0). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{M}_0 — намагниченность насыщения, совпадающая по направлению с магнитным полем \mathbf{H}_0 . Выбрав ось $z = x_3$ вдоль \mathbf{H}_0 , определим с помо-

щью (1) компоненты тензора μ_{ik} :

$$\begin{aligned}\mu_{11} = \mu_{22} &= 1 + \frac{\omega_M(\omega_0 + \alpha k^2)}{(\omega_0 + \alpha k^2) - \omega^2}, \\ \mu_{12} = -\mu_{21} &= -i \frac{\omega\omega_M}{(\omega_0 + \alpha k^2) - \omega^2}, \quad \mu_{33} = 1,\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M_0, \quad \alpha = q\gamma M_0.$$

Остальные компоненты μ_{ik} равны нулю.

Как видно из (2), магнитная проницаемость зависит теперь не только от частоты, но и от волнового вектора. Это связано с тем, что намагниченность в каждой точке зависит от значения магнитного поля не только в этой, но и в соседних точках (член $q\nabla^2\mathbf{M}$ в выражении для $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$). Эффект зависимости электрической или магнитной проницаемостей от волнового вектора называется пространственной дисперсией. Зависимость μ от \mathbf{k} играет существенную роль только в случае сильно неоднородных полей (малые длины волн).

447. Ищем совместное решение уравнений Максвелла и уравнения движения вектора намагниченности (VI.15), имеющее вид плоских монохроматических волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \quad (1)$$

Амплитуды полей и намагниченности удовлетворяют системе уравнений:

$$c(\mathbf{k} \times \mathbf{h}_0) = -\omega\epsilon\mathbf{E}_0, \quad c(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = \omega(\mathbf{h}_0 + 4\pi\mathbf{m}_0), \quad \mathbf{k} \cdot (\mathbf{h}_0 + 4\pi\mathbf{m}_0) = 0, \quad (2)$$

$$i\omega\mathbf{m}_0 = -\gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}_0) - \gamma(\mathbf{m}_0 \times \mathbf{H}_0) + \gamma q k^2 (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m}_0). \quad (3)$$

Исключая \mathbf{E}_0 и \mathbf{h}_0 из (2), (3) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}u &= \frac{\omega_M}{\Omega}, \quad x = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \xi = \frac{ck}{\Omega\sqrt{\epsilon}}, \quad \Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_M, \\ \omega_0 &= \gamma H_0, \quad \omega_1 = \gamma q k^2 M_0, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M_0,\end{aligned}$$

получим

$$ix\mathbf{m}_0 = \frac{u}{x^2 - \xi^2} [x^2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{m}_0) + \xi^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_0)(\mathbf{e}_z \times \mathbf{n})] + (1-u)(\mathbf{e}_z \times \mathbf{m}_0), \quad (4)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$, \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении \mathbf{H}_0 (\mathbf{M}_0 параллелен \mathbf{H}_0).

Выберем ось x в плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z)$ и обозначим угол между \mathbf{e}_z и \mathbf{n} через θ . Из (4) следует система линейных уравнений относительно компонент m_0 :

$$\begin{aligned} ixm_{0x} + \left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2}\right)m_{0y} &= 0, \\ \left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2} \cos^2 \theta\right)m_{0x} - ixm_{0y} &= 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этой системы дает искомое дисперсионное уравнение

$$\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2}\right)\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2 - \xi^2} \cos^2 \theta\right) - x^2 = 0. \quad (5)$$

Это уравнение — третьей степени относительно ω^2 ($\omega^2 = \Omega^2 x^2$, Ω не зависит от ω), поэтому в рассматриваемой среде могут распространяться волны трех разных типов, различающиеся законами дисперсии. Два из этих законов дисперсии были исследованы в задаче 435 (где мы полагали $\omega_1 = 0$). Им соответствуют обычные электромагнитные волны, распространяющиеся в гиротропной среде. Для исследования третьего типа волн используем условие $\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2 k^2} \ll 1$ (при этом $x^2 \ll \xi^2$). Пренебрегая в знаменателях в уравнении (4) x^2 по сравнению с ξ^2 , получим третий закон дисперсии:

$$\omega^2 = (\omega_0 + \omega_1)(\omega_0 + \omega_1 + \omega_M \sin^2 \theta) \quad (6)$$

(здесь $\omega_1 = q\gamma k^2 M_0$ зависит от абсолютной величины волнового вектора). Из условия $\omega^2 \varepsilon \ll c^2 k^2$, считая ω_0 , ω_1 и ω_M сравнимыми по величине, находим, что закон дисперсии (6) справедлив только при выполнении условия $\xi^2 \gg 1$.

Найдем относительную величину E_0 и h_0 для волн с законом дисперсии (6). Используя уравнения Максвелла (2) и условие $\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2 k^2} \ll 1$, получим

$$\mathbf{E}_0 \approx \frac{4\pi\omega}{ck^2}(\mathbf{k} \times \mathbf{m}); \quad \mathbf{h}_0 \approx 4\pi\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}).$$

Таким образом, $E_0 \ll h_0$. Рассматриваемые волны представляют собой чисто магнитные колебания вектора намагниченности, при которых электрического поля не возникает. Они называются спиновыми волнами и определяют многие магнитные, тепловые и электрические свойства ферромагнетиков.

448. Направим ось y в глубь металла нормально к поверхности, ось z — вдоль постоянного магнитного поля. Поскольку импеданс ζ не зависит от угла падения волны, рассмотрим случай нормального падения. Решая уравнения Максвелла и пользуясь определением поверхностного импеданса, получим

$$\zeta_{xx} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu_{\parallel}}{8\pi\sigma}}, \quad \zeta_{zz} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi\sigma_3}}, \quad \zeta_{xz} = \zeta_{zx} = 0,$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1}, \quad \mu = \frac{\mu_{\perp}^2 - \mu_a^2}{\mu_{\perp}}.$$

Зависимость ζ_{zz} от частоты носит резонансный характер (см. задачу 331, в которой вычисляются компоненты μ_{ik}). Компонента ζ_{xx} не обладает резонансными свойствами, так как $\mu_{\parallel} = 1$.

449. $\zeta_{\pm} = \pm \frac{E_{\pm 1}}{h_{\pm 1}} = -(1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu^{\pm}}{8\pi\sigma^{\pm}}}$, где $\mu^{\pm} = \mu_{\perp} \pm \mu_a$, $\sigma^{\pm} = \sigma_1 \pm \sigma_2$,

$E_{\pm 1}$ и $h_{\pm 1}$ — циклические компоненты \mathbf{E} и \mathbf{h} ($h_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(h_x \pm ih_y)$).

§ 3. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Дифракция

450. Удобно ввести цилиндрические координаты с осью z вдоль оси цилиндра и отсчитывать угол α от направления волнового вектора \mathbf{k} падающей волны. Из соображений симметрии следует, что векторы поля не зависят от z и имеют только компоненты E_z , H_r и H_{α} . Опуская в дальнейшем везде временной множитель $e^{-i\omega t}$, воспользуемся для определения отличных от нуля компонент поля волновым уравнением (VIII.6) для \mathbf{E} и уравнением Максвелла (VIII.1). Первое из них позволяет определить E_z , а второе — выразить H_r и H_{α} через E_z :

$$H_r = \frac{1}{ikr} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha}, \quad H_{\alpha} = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (1)$$

Вторичное поле $E' = E - E_0$, вызванное наличием цилиндра, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E'}{\partial \alpha^2} + k^2 E' = 0. \quad (2)$$

Если положить $E' = R(r)\Phi(\alpha)$ и разделить переменные в уравнении (2), то получим

$$R_m'' + \frac{1}{r}R_m' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R_m = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_m'' + m^2\Phi_m = 0. \quad (4)$$

Через m^2 обозначен параметр разделения. Общее решение уравнения (2) запишется в виде суммы по всем допустимым значениям m :

$$E'(r, \alpha) = \sum_m \Phi_m(\alpha)R_m(r). \quad (5)$$

Чтобы записать решение уравнения Бесселя (3) сразу в удобной для нас форме, обратимся к граничному условию $r \rightarrow \infty$. Поскольку E' описывает вторичное поле, создаваемое наводимыми на цилиндре токами, то при $r \rightarrow \infty$ оно будет иметь вид расходящихся цилиндрических волн. Это означает, что E' должно быть в этой области функцией вида

$$E' = \mathcal{E}_0 f(\alpha) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (6)$$

Условие (6) будет удовлетворено, если в качестве решения уравнения (3) выбрать функцию Ханкеля $H_m^{(1)}(kr)$ (см. приложение 3), которая при больших r имеет вид

$$H_m^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (kr \gg 1).$$

Второе линейно независимое решение будет содержать член вида $\frac{\text{const}}{\sqrt{r}} e^{-ikr}$, описывающий сходящуюся цилиндрическую волну, которой в условиях нашей задачи быть не может. Поэтому решение уравнения (3) запишем в виде $R_m(r) = H_m^{(1)}(kr)$. Уравнение (4) имеет решение

$$\Phi_m(\alpha) = A_m e^{im\alpha} + B_m e^{-im\alpha}.$$

Так как при изменении α на 2π поле не может измениться, число m должно быть целым. Если считать, что m принимает и отрицательные значения, то в выражении для $\Phi_m(\alpha)$ достаточно оставить только один член, например, $e^{im\alpha}$. Окончательно $E'(r, \alpha)$ примет вид

$$E'(r, \alpha) = \mathcal{E}_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha}; \quad (7)$$

на больших расстояниях (7) переходит в (6), причем

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_m A_m e^{i(m\alpha - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}.$$

Коэффициенты A_m ряда (7) нужно определить из граничного условия на поверхности цилиндра. Так как он считается идеально проводящим, то

$$E' + E_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad (8)$$

или

$$e^{ika \cos \alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(ka) e^{im\alpha} = 0. \quad (9)$$

Пользуясь ортогональностью функций $e^{im\alpha}$, получим

$$\int_0^{2\pi} e^{i(ka \cos \alpha - m' \alpha)} d\alpha + 2\pi A_{m'} H_{m'}^{(1)}(ka) = 0,$$

откуда с помощью (П 3.11) находим

$$A_m = \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}. \quad (10)$$

Полное электрическое поле, таким образом, равно

$$E(r, \alpha) = \mathcal{E}_0 e^{ikr \cos \alpha} - \mathcal{E}_0 \sum_m \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha}. \quad (11)$$

Компоненты магнитного поля определяются по формулам (1):

$$H_r = -\mathcal{E}_0 \sin \alpha e^{ikr \cos \alpha} - \mathcal{E}_0 \sum_m \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \cdot \frac{H_m^{(1)}(kr)}{kr} e^{im\alpha}, \quad (12)$$

$$H_\alpha = -\mathcal{E}_0 \cos \alpha e^{ikr \cos \alpha} + \mathcal{E}_0 \sum_m \frac{i^{m-1} J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \cdot \frac{dH_m^{(1)}(kr)}{d(kr)} e^{im\alpha}. \quad (13)$$

Вторичное электрическое поле поперечно во всем пространстве; вторичное магнитное поле становится поперечным на большом расстоянии от

цилиндра, при $kr \gg 1$ (волновая зона), когда продольная составляющая H_r исчезает вследствие наличия лишнего множителя kr в знаменателе.

Поверхностная плотность тока определяется из граничного условия для касательной составляющей \mathbf{H} :

$$i(\alpha) = i_z(\alpha) = \frac{c}{4\pi} H_\alpha(a, \alpha).$$

Полный ток:

$$\mathcal{I} = -\frac{i}{2} ca \mathcal{E}_0 \left[J_1(ka) - \frac{J_0(ka) H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \right].$$

451. В рассматриваемом случае поле двумерно. Поэтому в общей формуле $d\sigma_s = \frac{dI}{\bar{\gamma}_0}$ (VIII.26) под dI нужно понимать интенсивность вторичных волн внутри угла $d\alpha$, отнесенную к единице длины цилиндра: $dI = \bar{\gamma} r d\alpha$.

Эффективное дифференциальное сечение рассеяния будет иметь размерность длины. Пользуясь результатами задачи 450, найдем

$$d\sigma_s = |f(\alpha)|^2 d\alpha,$$

где

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_m i^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}} e^{i(m\alpha - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}. \quad (1)$$

При произвольных ka формула (1) весьма сложна; она существенно упрощается, если $ka \ll 1$. В этом случае в бесконечной сумме для $f(\alpha)$ достаточно учесть один член с $m = 0$, что дает изотропное распределение вторичного излучения:

$$d\sigma_s = \frac{\pi d\alpha}{2k \ln^2(ka)} = \frac{\lambda}{4 \ln^2(ka)} d\alpha. \quad (2)$$

Полное сечение получится интегрированием (1) по $d\alpha$. Воспользовавшись ортогональностью функций $e^{im\alpha}$, получим

$$\sigma_s = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \right|^2. \quad (3)$$

При $ka \ll 1$ (3) переходит в

$$\sigma_s = \frac{\pi \lambda}{2 \ln^2(ka)}.$$

452.

$$H_z = \mathcal{H}_0 \left[e^{ikr \cos \alpha} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \right],$$

$$E_r = \mathcal{H}_0 \left[\sin \alpha e^{ikr \cos \alpha} + \frac{1}{kr} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{m J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \right],$$

$$E_\alpha = \mathcal{H}_0 \left[\cos \alpha e^{ikr \cos \alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1} \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \right],$$

где α отсчитывается от направления \mathbf{k} , а ось цилиндрической системы координат совпадает с осью цилиндра.

$$d\sigma_s(\alpha) = \frac{\pi(ka)^3}{8} a(1 - 2 \cos \alpha)^2 d\alpha, \quad \sigma_s = \frac{3}{4} \pi^2 k^3 a^4.$$

$$453. \quad d\sigma'_s = \cos^2 \varphi d\sigma_{\parallel} + \sin^2 \varphi d\sigma_{\perp}, \quad d\sigma''_s = \frac{1}{2}(d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp}).$$

454. Неполаризованную волну рассматриваем как совокупность двух некогерентных компонент одинаковой интенсивности, у одной из которых вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси цилиндра, а у другой — перпендикулярно оси. Сечения рассеяния первой и второй компонент получены в задачах 451 и 452. Степень деполаризации ρ определяется отношением интенсивностей рассеянных волн (меньшей и большей):

$$\rho = \frac{d\sigma_{\perp}}{d\sigma_{\parallel}} = \frac{1}{4} (ka)^4 \ln^2(ka) (1 - 2 \cos \alpha)^2.$$

Так как $(ka) \ll 1$, то ρ очень мало, т. е. рассеянные волны почти полностью поляризованы при любом угле рассеяния; при $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, т. е. при $\alpha = 60^\circ$, ρ обращается в нуль.

455.

$$H_z = \mathcal{H}_0 \left[e^{ikr \cos \alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka) - i\zeta J_m(ka)}{i\zeta H_m^{(1)}(ka) - H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \right],$$

где ζ — поверхностный импеданс металла;

$$H_\alpha = H_r = 0, \quad \mathbf{E} = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{H}.$$

$$456. \quad Q = \frac{ac\zeta' \mathcal{H}_0^2}{4} \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{i\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}} \right|^2, \text{ где } \zeta' \text{ — вещественная часть}$$

поверхностного импеданса. Цилиндрические функции J_m , N_m и $H_m^{(1)}$ (см. приложение 3) и их производные берутся в точке ka .

Сечение поглощения:

$$\sigma_a = \frac{Q_0}{\bar{\gamma}_0} = 2\pi a \zeta' \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{i\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}} \right|^2.$$

При $ka \ll 1$, т. е. при $\lambda \gg a$, поле в окрестности цилиндра является квазистационарным (проводящий цилиндр в продольном квазистационарном магнитном поле, см. задачу 379). Поэтому, выразив ζ' через проводимость σ с помощью (VIII.9) и (VIII.11), получим для Q выражение

$$Q = \frac{ac\mathcal{H}_0^2}{8} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}},$$

которое совпадает с найденным в задаче 381 для случая сильного скин-эффекта, если в нем выразить Q через магнитное поле.

457. При $r > a$:

$$E_z = \mathcal{E}_0 \left[e^{ikr \cos \alpha} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{\zeta J'_m(ka) J_m(k'a) - J_m(ka) J'_m(k'a)}{H_m^{(1)}(ka) J'_m(k'a) - \zeta H_m^{(1)'}(ka) J_m(k'a)} \times \right. \\ \left. \times H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \right];$$

при $r < a$:

$$E_z = \mathcal{E}_0 \zeta \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(k'a) H_m^{(1)}(ka) - J'_m(k'a) H_m^{(1)'}(ka)}{J'_m(k'a) H_m^{(1)}(ka) - \zeta J_m(k'a) H_m^{(1)}(ka)} J_m(k'r) e^{im\alpha};$$

Здесь \mathcal{E}_0 — амплитуда падающей волны, $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, $k = \frac{\omega}{c}$, $k' = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{c}$, остальные компоненты \mathbf{E} равны нулю.

Поле \mathbf{E} вычисляется по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega\mu} \text{rot } \mathbf{E}.$$

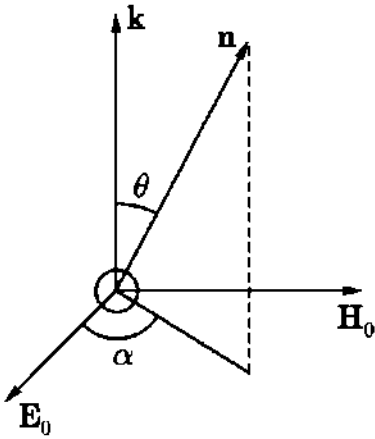


Рис. 85

458. Дипольные моменты шара запишутся в виде

$$\mathbf{p} = \beta_e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{m} = \beta_m \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t},$$

где β_e и β_m — электрическая и магнитная поляризуемости шара, которые в общем случае являются комплексными величинами.

По формулам (XII.17) и (XII.20), приведенным в гл. XII, найдем компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} рассеянной волны:

$$H_\alpha = E_\theta = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r} (\beta_e \cos \theta + \beta_m) \cos \alpha,$$

$$H_\theta = -E_\alpha = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r} (\beta_e + \beta_m) \sin \alpha.$$

Углы θ и α , характеризующие направление рассеяния, указаны на рис. 85.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется по формуле (VIII.26):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = & \frac{\omega^4}{c^4} [|\beta_e|^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ & + |\beta_m|^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\beta_e \beta_m^* + \beta_e^* \beta_m) \cos \theta]. \end{aligned}$$

459.

$$\begin{aligned} d\sigma_s(\theta) = & \frac{1}{2} \left[d\sigma_s(\theta, \alpha) + d\sigma_s\left(\theta, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ = & \frac{\omega^4}{2c^4} [(|\beta_e|^2 + |\beta_m|^2)(1 + \cos^2 \theta) + 2(\beta_e \beta_m^* + \beta_e^* \beta_m) \cos \theta] d\Omega, \\ \sigma_s = & \frac{8\pi\omega^4}{3c^4} (|\beta_e|^2 + |\beta_m|^2). \end{aligned}$$

Чтобы определить степень деполяризации рассеянного излучения, нужно найти главные направления тензора поляризации. В рассматриваемой задаче это легко сделать из соображений симметрии. При фиксированных \mathbf{k} и \mathbf{n} (см. рис. 85) выделенными направлениями для \mathbf{E}_0 будут направление нормали к плоскости рассеяния и направление в плоскости рассеяния, перпендикулярное \mathbf{k} .

Этим направлениям поляризации соответствуют дифференциальные сечения рассеяния $d\sigma_s\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)$ и $d\sigma_s(\theta, 0)$, полученные при решении предыдущей задачи. Степень деполяризации ρ определяется как отношение меньшей из этих величин к большей.

Если $|\beta_m| < |\beta_e|$, то

$$\rho = \frac{d\sigma_s(\theta, 0)}{d\sigma_s\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)} = \left| \frac{\beta_m + \beta_e \cos \theta}{\beta_m \cos \theta + \beta_e} \right|^2.$$

460. Для диэлектрического шара:

$$d\sigma_{sд} = \frac{\omega^4 a^6}{2c^4} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega,$$

$$\sigma_{sд} = \frac{8\pi\omega^4 a^6}{3c^4} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2; \quad \rho_{д} = \cos^2 \theta.$$

Для идеально проводящего шара:

$$d\sigma_{sпр} = \frac{\omega^4 a^6}{8c^4} [5(1 + \cos^2 \theta) - 8 \cos \theta] d\Omega,$$

$$\sigma_{sпр} = \frac{10\pi\omega^4 a^6}{3c^4}, \quad \rho_{пр} = \left(\frac{1 - 2 \cos \theta}{2 - \cos \theta} \right)^2.$$

Из формулы для $d\sigma_{sд}$ видно, что сечение рассеяния диэлектрическим шаром симметрично относительно направлений вперед ($\theta = 0$) и назад ($\theta = \pi$). Отношение $\frac{d\sigma_{sд}(0)}{d\sigma_{sд}(\pi)} = 1$. Сечение рассеяния проводящим шаром знач-

чительно более анизотропно и несимметрично: $\frac{d\sigma_{sпр}(0)}{d\sigma_{sпр}(\pi)} = \frac{1}{9}$. Свет, рассе-

янный диэлектрическим шаром под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$, будет полностью поляризованным; при рассеянии идеально проводящим шаром полная поляризация достигается при $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Применение полученных формул в случае диэлектрического шара законно, если можно пренебречь эффектами, связанными с конечной скоростью распространения электромагнитной волны внутри шара, т. е. если

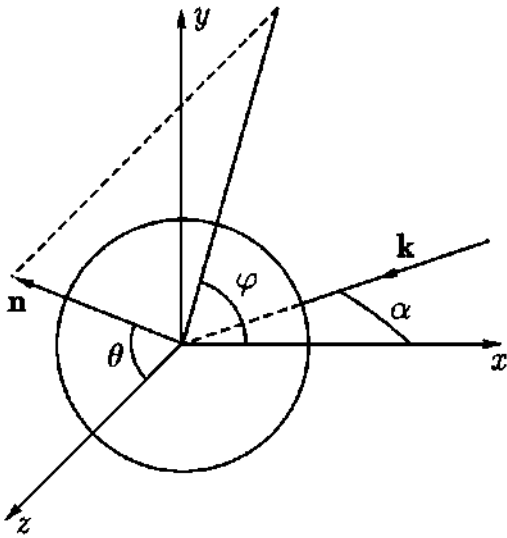


Рис. 86

длина волны внутри шара велика по сравнению с его радиусом. В случае идеально проводящего шара, распространения волны внутри шара не происходит, и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \ll \lambda$, где λ — длина волны в веществе, окружающем шар.

461. Так же, как и в задаче 458, нужно рассмотреть излучение индуцированных электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} моментов. Выберем систему координат, как показано на рис. 86. Вектор \mathbf{k} первичной волны лежит в плоскости xz . Рассмотрим два случая поляризации падающей волны: а) вектор \mathbf{E}_0 лежит в плоскости падения xz ; б) вектор \mathbf{E}_0 нормален к плоскости падения.

В случае а) компонента внешнего электрического поля, продольная относительно плоскости диска: $E_{0\parallel} = -E_{0x} = E_0 \cos \alpha$; поперечная компонента: $E_{0\perp} = -E_{0z} = E_0 \sin \alpha$. Электрический момент \mathbf{p} в рассматриваемом приближении ($a \ll \lambda$) можно вычислить как статический момент проводящего диска в однородном электрическом поле.

Согласно результатам задач 197, 199, продольная поляризуемость диска: $\beta_{e\parallel} = \frac{4a^3}{3\pi}$, а поперечная поляризуемость: $\beta_{e\perp} = 0$. Поэтому

$$p_x = \beta_{e\parallel} E_{0x} = -\frac{4a^3}{3\pi} E_0 \cos \alpha, \quad p_y = p_z = 0.$$

Магнитное поле имеет только продольную составляющую. Но продольная магнитная поляризуемость диска равна нулю (см. задачу 390), поэтому $\mathbf{m} = 0$.

Дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\Omega. \quad (1)$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma_s = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

В случае б) имеем

$$p_y = \frac{4a^3}{3\pi} E_0, \quad p_x = p_z = 0, \quad m_z = \frac{2a^3}{3\pi} E_0 \sin \alpha, \quad m_x = m_y = 0;$$

$$d\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \left[1 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi \right) + \sin \vartheta \sin \alpha \cos \varphi \right] d\Omega, \quad (3)$$

$$\sigma_s = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right).$$

Для неполяризованной волны, с помощью (1), (2) и (3), находим

$$d\sigma_s = \frac{8a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \left[1 + \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. + \cos^2 \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha \cos \varphi \right] d\Omega, \quad (4)$$

$$\sigma_s = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 - \frac{3}{8} \sin^2 \alpha \right).$$

462. $d\sigma_s = \frac{a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{18c^4 \varepsilon^2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega$, где ϑ — угол рассеяния,

$$\sigma_s = \frac{8\pi a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{27c^4 \varepsilon^2}.$$

463. Выберем координатную систему, как показано на рис. 87. Вектор \mathbf{k} первичной волны лежит в плоскости xz . Цилиндр аппроксимируем вытянутым эллипсоидом вращения с полуосями a и h . Как следует из решений задач 197, 198, 390, продольная электрическая поляризуемость сильно вытянутого эллипсоида вращения по порядку величины в h/a раз больше его поперечных электрической и магнитной поляризуемостей. Поэтому сечение рассеяния существенно зависит от того, имеется ли продольная составляющая электрического поля в падающей волне.

Если эта составляющая имеет заметную величину, то вторичное излучение обусловлено z -компонентой электрического дипольного момента. Остальными компонентами электрического момента и магнитным моментом можно пренебречь. Выбирая \mathbf{E}_0 в плоскости xz , получим

$$d\sigma_s = \frac{\omega^4 h^6}{9c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta d\Omega,$$

$$\sigma_s = \frac{8\pi \omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2 \alpha.$$

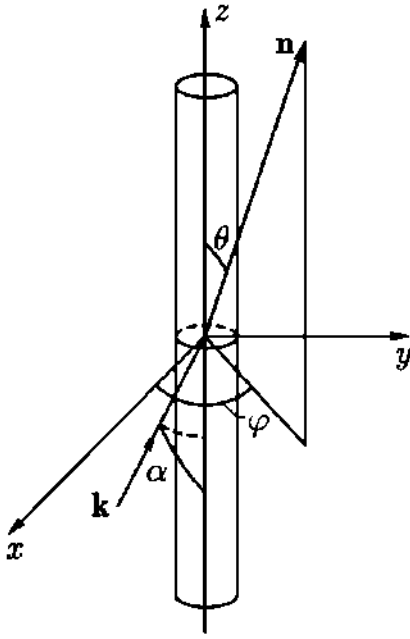


Рис. 87

Если продольная компонента E_0 равна нулю, рассеяние обусловлено поперечной составляющей электрического момента и магнитным моментом, имеющими одинаковый порядок величины. В этом случае

$$d\sigma_s = \frac{a^4 h^2 \omega^4}{9c^4} [(1 + 2n_x \sin \alpha)^2 + 3 \cos^2 \alpha + n_z^2(4 - \sin^2 \alpha) + 8n_z \cos \alpha + 2n_x n_z \sin 2\alpha] d\Omega,$$

$$\sigma_s = \frac{40\pi a^4 h^2 \omega^4}{27c^4} \left(1 + \frac{3}{5} \cos^2 \alpha\right),$$

где n_i ($i = x, y, z$) — компоненты единичного вектора, указывающего направление рассеяния.

Сечения рассеяния неполяризованной волны:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{\omega^4 h^6}{18c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta, \quad \sigma_s = \frac{4\pi \omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2 \alpha.$$

464. Вектор E_0 поляризован в плоскости xz (рис. 87):

$$d\sigma_{s\parallel} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4} \cdot \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 \left[(1 - n_x^2) \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}(\varepsilon + 1)^2 (1 - n_x^2) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)n_x n_z \sin 2\alpha \right] d\Omega.$$

Вектор E_0 поляризован нормально к плоскости xz :

$$d\sigma_{s\perp} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4} \cdot \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^2 \cdot (1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) d\Omega.$$

465. Полную напряженность электрического поля в некоторой точке пространства можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

— поле падающей волны, $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ — поле рассеянного (вторичного) излучения.

В каждой точке внутри тела (которое может быть неоднородным) вектор поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ пропорционален \mathbf{E} , а приближенно — \mathcal{E}_0 , так как рассеянное поле много меньше падающего ($E' \ll \mathcal{E}_0$) при $(\varepsilon - 1)/4\pi \ll 1$.¹

Рассеянное поле \mathbf{E}' может быть выражено через вектор Герца

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t)}{R} \exp[i(kR - \omega t)] dV' \quad (2)$$

(см. гл. XII, формула (XII.13)) формулой

$$\mathbf{E}' = \text{rot rot } \mathbf{Z} - 4\pi\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \text{rot rot } \mathcal{E}_0 \frac{\exp[ikr]}{r} \int \exp[i(\mathbf{k} - k\mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}'] dV'. \quad (3)$$

Разность $\mathbf{k} - k\mathbf{n}$ представляет собою изменение волнового вектора при рассеянии; обозначим ее через \mathbf{q} ($q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, θ — угол рассеяния). При вычислении интеграла выберем полярную ось вдоль \mathbf{q} , тогда

$$\int \exp[i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')] r'^2 dr' d\Omega = 4\pi \frac{\sin qa - qa \cos qa}{q^3}. \quad (4)$$

При вычислении двойного вихря в (3) оставляем только члены, пропорциональные $1/r$:

$$\text{rot rot } \mathcal{E}_0 \frac{\exp[ikr]}{r} = k^2 [\mathbf{n} \times (\mathcal{E}_0 \times \mathbf{n})] \frac{\exp[ikr]}{r}.$$

Окончательно, для рассеянного поля \mathbf{E}' получим

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2 a^3 \varepsilon - 1}{c^2} \frac{1}{3} [\mathbf{n} \times (\mathcal{E}_0 \times \mathbf{n})] \varphi(qa) \frac{\exp[ikr]}{r}, \quad (5)$$

где

$$\varphi(qa) = \frac{3(\sin q - qa \cos qa)}{(qa)^3} = 3 \sqrt{\frac{\pi}{(qa)^3}} J_{3/2}(qa).$$

¹Метод, применяемый при решении этой задачи, аналогичен методу Борна в квантовой механике. Последний широко применяется при решении задач о рассеянии частиц квантово-механическими системами.

Сравним выражение (5) с тем, которое имеет место при малых a (см. задачу 460). Переходя в (5) к пределу $qa \ll 1$, получим

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2 a^3 \varepsilon - 1}{c^2} \frac{1}{3} [\mathbf{n} \times (\mathcal{E}_0 \times \mathbf{n})] \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6)$$

так как $\varphi(qa) \approx 1$ при $qa \ll 1$.

С другой стороны, вычисляя \mathbf{E}' по формуле

$$\mathbf{E}' = \mathbf{n} \times (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{c^2 r}, \quad \text{где } \mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \mathcal{E}_0$$

— статический дипольный момент шара, найдем

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2 a^3 \varepsilon - 1}{c^2} \frac{1}{\varepsilon + 2} \mathbf{n} \times (\mathcal{E}_0 \times \mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6')$$

В (6') вместо множителя $1/3$ стоит $1/(\varepsilon + 2)$. Однако противоречия между (6) и (6') нет, так как (6) справедливо с точностью до $1/(\varepsilon - 1)$.

Дифференциальное сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{9c^4} \varphi^2(qa) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \theta) \quad (7)$$

(углы θ и α обозначены на рис. 85).

Это сечение отличается от сечения рассеяния малой диэлектрической сферой (см. ответ к задаче 460) заменой в знаменателе $(\varepsilon + 2)^2$ на 9 и множителем $\varphi^2(qa)$, учитывающим интерференцию вторичных волн от различных элементов сферы. Поэтому степень деполяризации рассеянного света будет такой же, как в случае малой диэлектрической сферы:

$$\rho = \cos^2 \theta. \quad (8)$$

Усреднение по поляризациям дает

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{18c^4} \varphi^2(qa) (1 + \cos^2 \theta).$$

Рассмотрим еще случай очень большой сферы, т. е. $ka \gg 1$. Если углы таковы, что и $qa \gg 1$, то $\varphi(qa) \rightarrow 0$, и сечение в этой области углов очень мало. Из явного вида q следует, что $qa \gg 1$ эквивалентно условию $\theta \gg 1/ka$; таким образом, если шар велик, то рассеяние происходит вперед в интервал углов $\theta \leq 1/ka$.

466. При $ka \gg 1$ функция $\varphi^2(qa)$, входящая в выражение дифференциального сечения (см. предыдущую задачу), заметно отлична от нуля только в узком интервале углов $\theta \leq \frac{1}{ka}$. В этом интервале множитель $(1 + \cos^2 \theta)$ может считаться постоянным и равным 2. Поэтому имеем:

$$\sigma_s = \frac{2\pi\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{9c^4} \int_0^\pi \varphi^2(qa) \sin \theta d\theta.$$

Введем новую переменную $y = qa = 2ka \sin \theta/2$. В предельном случае $ka \gg 1$, получим окончательно:

$$\sigma_s = \frac{\pi\omega^2 a^4 (\varepsilon - 1)^2}{18c^2}.$$

Для малого шара ($ka \ll 1$), заменяя (см. ответ к задаче 460) $\varepsilon + 2$ на 3, имеем:

$$\sigma_s = \frac{8\pi\omega^4 a^6 (\varepsilon - 1)^2}{27c^4}.$$

Как видно из этих результатов, сечения по-разному зависят от частоты ($\sim \omega^4$ и $\sim \omega^2$) и от размера шара ($\sim a^6$ и $\sim a^4$).

467. Исходим из соотношения

$$\sigma_a = -\frac{1}{E_0^2} \operatorname{Re} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega, \quad (1)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, σ_a — сечение поглощения и интегрирование ведется по поверхности сферы большого радиуса, окружающей рассеиватель. Формула (1) выражает тот факт, что сечение поглощения пропорционально потоку энергии через поверхность сферы, направленному к центру.

Подставляя в (1) выражение для \mathbf{E} из условия задачи и

$$\mathbf{H} = E_0 \left\{ (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}) e^{ikz} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}(\mathbf{n})] \frac{e^{ikr}}{r} \right\}$$

и используя условие поперечности $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{n}) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_0^2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) + \frac{|\mathbf{F}|^2}{r^2} + \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F})] \frac{e^{ik(r-z)}}{r} + \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{F}^*) + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{F}^*) - (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^*)] \frac{e^{-ik(r-z)}}{r}. \quad (2) \end{aligned}$$

При интегрировании по углам первое слагаемое даст нуль, а второе — полное сечение рассеяния σ_s . Интегралы от остальных слагаемых могут быть преобразованы с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) e^{ik(r-z)} r^2 d\Omega &= \\ &= \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ [(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) e^{ikr(1-\cos\vartheta)}] \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi} e^{ikr(1-\cos\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \cos\vartheta} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) d \cos\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

Последний интеграл при повторном интегрировании по частям дает члены, пропорциональные $1/r$, и поэтому может быть отброшен. Кроме того, нужно отбросить член с осциллирующим множителем e^{2ikr} , так как он дает нулевой вклад в полный поток энергии. Чтобы убедиться в этом, учтем, что представление о строго монохроматической волне является идеализацией. В действительности, всякая реальная «монохроматическая» волна является суперпозицией гармоник, частоты которых лежат в более или менее узком интервале $\Delta\omega$. При усреднении множителя e^{2ikr} по любому такому интервалу получим нуль, так как r очень велико. Поэтому

$$\frac{1}{r} \int (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) e^{ik(r-z)} r^2 d\Omega = \frac{2\pi i}{k} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{n}_0)].$$

Аналогично вычисляются интегралы от других слагаемых. Члены, содержащие множители $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})$ и $(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{n})$, при интегрировании не дадут вклада, вследствие того, что $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_0) = 0$. Подставляя вычисленные интегралы в (1), получим окончательно

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}[\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{n}_0)]. \quad (3)$$

Оптическая теорема (3) допускает простую физическую интерпретацию: полное сечение дает меру ослабления первичной волны. Это ослабление является результатом интерференции падающей волны с той частью рассеянной волны, которая имеет ту же поляризацию и направление распространения, что и падающая волна. Поэтому полное сечение оказывается связанным с амплитудой рассеяния «вперед».

468. Рассеянная волна создается электрическим и магнитным дипольными моментами, которые индуцируются падающей волной. Амплитуда рассеяния $F(\mathbf{n})$ (см. предыдущую задачу) определяется по формулам (XII.17) и (XII.20).

Окончательный результат:

$$\sigma_a = \frac{4\pi\omega}{c} (\beta_e'' + \beta_m'').$$

469. $\sigma_a = 6\pi b^2 \zeta'$.

470. Сила направлена вдоль волнового вектора падающей волны и имеет величину

$$\bar{F} = \frac{\bar{\gamma}_0}{c} \left[\sigma_a + \int (1 - \cos \vartheta) \left(\frac{d\sigma_s(\vartheta, \varphi)}{d\Omega} \right) d\Omega \right],$$

где $\bar{\gamma}_0$ — средняя плотность потока энергии в падающей волне и интегрирование производится по всему телесному углу.

471. Для идеально проводящего шара:

$$\bar{F} = \frac{43a^6\omega^4}{96c^4} E_0^2;$$

для диэлектрического шара:

$$\bar{F} = \frac{a^6\omega^4}{3c^4} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 E_0^2.$$

472. Применяем дифракционную формулу (VIII.25). В качестве поверхности интегрирования выберем плоскость, в которой находится экран. Тогда на поверхности интегрирования

$$u = A \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \quad dS_n = 3\pi r dr \cos(R_1, z) = 2\pi \frac{z_1 r}{R_1} dr,$$

где $A = \text{const}$. После подстановки этих выражений в (VIII.25) переходим к новой переменной интегрирования $\rho = R + R_1$:

$$u_P(z) = -ikAz_1 \int_a^\infty \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1^2} r dr = -ikAz_1 \int_{\rho_0}^\infty \frac{e^{ik\rho}}{\rho R_1(\rho)} d\rho, \quad (1)$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{a^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z_1^2}.$$

Интегрированием по частям можно представить (1) в виде ряда по возрастающим отрицательным степеням $k\rho$; условие $\lambda \ll a$ позволяет отбросить все члены ряда, кроме первого. Это дает

$$u_P(z) = u_0 \frac{z_1 e^{ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\rho_0},$$

где $u_0 = A \frac{e^{ik\sqrt{a^2+z_1^2}}}{\sqrt{a^2+z_1^2}}$ — амплитуда падающей волны на границе экрана.

Переходя к интенсивности $I \sim |u_P|^2$, имеем

$$I(z) = I_0 \frac{z_1^2}{(\sqrt{a^2+z_1^2} + \sqrt{a^2+z^2})^2}. \quad (2)$$

В точке, симметричной относительно экрана ($z_1 = z$):

$$I(z) = \frac{I_0}{4} \cdot \frac{z^2}{a^2 + z^2}.$$

Таким образом, в симметричной точке за экраном, не слишком близкой к нему, будет светлое пятно.

Этот результат, противоречащий представлению о прямолинейном ходе световых лучей, был теоретически предсказан Пуассоном (1818 г.), который выдвигал его в качестве возражения против теории дифракции Френеля и волновой теории света в целом. Однако эксперименты, выполненные Араго и Френелем, подтверждали наличие пятна, появляющегося вследствие симметрии экрана. Волны, огибающие его края, приходят в среднюю точку с одинаковыми фазами. Очевидно, таким свойством обладают все точки, лежащие на средней линии: в этих точках интенсивность света будет значительно больше, чем в соседних, не лежащих на оси z .

473. Используя принцип Бабинне (см. (VIII.31)), получим при $z = z_1 \gg a$:

$$I = I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{2z},$$

где I_0 — интенсивность первичной волны на краю отверстия.

474. При $z \gg a$, $I = 4I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{4z}$.

Интенсивность света на средней линии круглой диафрагмы осциллирует бесконечное число раз, уменьшаясь до нуля при $z \rightarrow \infty$. Убывание интенсивности по оси связано с тем, что параллельный пучок становится из-за дифракции на отверстии расходящимся и поток энергии через отверстие с увеличением z распределяется на все бóльшую площадь.

475. Пользуясь формулой (VIII.30) для дифракции Фраунгофера, находим

$$dI = I_0 \frac{[aJ_1(ak\alpha) - bJ_1(bk\alpha)]^2}{\alpha^2} d\Omega,$$

где α — угол дифракции, I_0 — интенсивность падающего света.

В случае круглого отверстия

$$dI = I'_0 \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\alpha^2} d\Omega,$$

где $I'_0 \sim \pi a^2 |u_0|^2$ — полная интенсивность падающего на отверстие света.

476. Дифрагированная волна будет описываться функцией

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}} dS_n,$$

где $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{q}$, \mathbf{q}_{\parallel} и \mathbf{q}_{\perp} — составляющие \mathbf{q} в плоскости экрана и в перпендикулярном направлении.

При интегрировании по плоскости отверстия воспользуемся полярными координатами с началом в центре отверстия и полярной осью вдоль \mathbf{q}_{\parallel} . Это дает

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0} k \cos \theta}{2\pi i R_0} \int e^{-iq_{\parallel} r \cos \varphi} r dr d\varphi,$$

где через θ обозначен угол падения.

С помощью формул (П 3.11) и (П 3.9) получим

$$dI = |u_P|^2 R_0^2 d\Omega = I_0 \frac{J_1^2(q_{\parallel} a)}{\pi q_{\parallel}^2} d\Omega,$$

где $I_0 \sim |u_0|^2 \pi a^2 \cos \theta$ — полная интенсивность падающего на отверстие света.

Считая угол дифракции α (угол между k и k') малым, выразим q_{\parallel} через α , угол падения θ и азимутальный угол α' между q и плоскостью падения:

$$q_{\parallel} = k\alpha \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \alpha'},$$

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(k\alpha \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \alpha'})}{\pi \alpha^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \alpha')} d\Omega.$$

Формула становится несправедливой при скользющем падении ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$).

477. Применение формулы Кирхгофа в векторной форме (VIII.32) позволяет получить следующие выражения для поля излучения:

$$E_{\vartheta} = H_{\alpha} = -ikabE_0 \frac{e^{ikR}}{\pi R} \left(\frac{\sin k'_x a}{k'_x a} \right) \left(\frac{\sin k'_y b}{k'_y b} \right) (1 + \cos \vartheta) \sin \alpha,$$

$$E_{\alpha} = -H_{\vartheta} = -ikabE_0 \frac{e^{ikR}}{\pi R} \left(\frac{\sin k'_x a}{k'_x a} \right) \left(\frac{\sin k'_y b}{k'_y b} \right) (1 + \cos \vartheta) \cos \alpha,$$

где ϑ , α — углы сферической системы координат с полярной осью, перпендикулярной плоскости отверстия, $k'_x = k \sin \vartheta \cos \alpha$, $k'_y = k \sin \vartheta \sin \alpha$ — проекции волнового вектора дифрагированной волны.

Угловое распределение излучения:

$$dI = I_0 \frac{abk^2}{4\pi^2} \left(\frac{\sin k'_x a}{k'_x a} \right)^2 \left(\frac{\sin k'_y b}{k'_y b} \right)^2 (1 + \cos \vartheta)^2 d\Omega,$$

где $I_0 = \frac{cab}{2\pi} E_0^2$ — интенсивность падающей на отверстие волны.

478. Если направить оси x , y , z вдоль векторов \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и \mathbf{k} соответственно, то поле излучения:

$$E_{\vartheta} = H_{\alpha} = -\frac{ika^2 E_0}{2} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right) (1 + \cos \vartheta) \cos \alpha,$$

$$E_{\alpha} = -H_{\vartheta} = \frac{ika^2 E_0}{2} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right) (1 + \cos \vartheta) \sin \alpha,$$

$$dI = \frac{1}{4} I_0 \left(\frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right)^2 (1 + \cos \vartheta)^2 d\Omega,$$

где $I_0 = \frac{ca^2}{8} E_0^2$ — интенсивность волны, падающей на отверстие.

При $\vartheta < 1$ имеем

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ka\vartheta)}{\pi\vartheta^2} d\Omega.$$

Этот результат был получен в задаче 475 с помощью скалярной дифракционной формулы.

§ 4. Когерентность и интерференция

481. $\Delta\Omega = \frac{l_{\perp}^2}{R^2} \sim \frac{c^2}{\nu^2} \frac{1}{L^2} = \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2$. Телесный угол когерентности не зависит от расстояния R до источника.

482. $\Delta\lambda \approx 3,52 \cdot 10^{-10}$ см; $l_{\perp} \sim \lambda \frac{R}{L} = 5,4 \cdot 10^{-3}$ см; $l_{\parallel} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 7,1$ см; $\Delta\Omega \sim 1,3 \cdot 10^{-31}$ стерад; $\Delta V = l_{\perp}^2 l_{\parallel} \sim 2,1 \cdot 10^{-4}$ см³.

483. $R = 9,46 \cdot 10^{18}$ км, т. е. в $6,3 \cdot 10^5$ раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Отсюда следует, что $l_{\perp} \approx 3,4 \cdot 10^3$ см — в $6,3 \cdot 10^5$ раз больше, чем l_{\perp} в предыдущей задаче. Что же касается $l_{\parallel} \approx \lambda^2 / \Delta\lambda \approx 7,1$ см и $\Delta\Omega \approx 1,3 \cdot 10^{-31}$ стерад, то они сохраняют те же значения, что и в предыдущей задаче. Объем когерентности $\Delta V \approx 8,3 \cdot 10^7$ см³ — в $4 \cdot 10^{11}$ раз больше, чем объем когерентности солнечного излучения на Земле. Характерным является увеличение степени когерентности света по мере его распространения. Это относится только к поперечной когерентности.

484. $l_{\parallel} \sim \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 3 \cdot 10^8$ см. Так как от оптического генератора идет конус лучей с углом раствора $\Delta\vartheta \sim \lambda/D = 10^{-5}$, то прилегающий к генератору объем когерентности имеет вид конуса, обращенного к генератору

вершиной.

$$l_{\perp} = \begin{cases} D = 5 \text{ см у генератора,} \\ l_{\parallel} \frac{\lambda}{D} \approx 6000 \text{ см у основания конуса когерентности,} \end{cases}$$

$$\Delta V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{l_{\perp}}{2} \right)^2 l_{\parallel} \approx 28 \cdot 10^{14} \text{ см}^3.$$

485.

$$\delta = \frac{1}{\exp\left[\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right] - 1} = \frac{1}{\exp\left[\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right] - 1};$$

$$\delta \approx \frac{\lambda kT}{2\pi\hbar c} \approx 200 \quad \text{при } \lambda = 1 \text{ см, } T = 273 \text{ К,}$$

$$\delta = e^{-100} \approx 10^{-43} \quad \text{при } \lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см, } T = 273 \text{ К,}$$

$$\delta = \frac{1}{e^{2,73} - 1} \approx 0,07 \quad \text{при } \lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см, } T = 10\,000 \text{ К.}$$

486. $\delta = 5 \cdot 10^{18}$, $T = 1,4 \cdot 10^{23} \text{ К.}$

487. $\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} I(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$

488. $\Gamma(\tau) = 2I \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau} \cos \omega_0\tau.$

489. Разность хода для света от одного из независимых излучателей, находящегося в точке (x', y') , есть $s_1 - s_2 \approx \frac{xx' + yy'}{R}$ (см. рис. 26), если учесть, что поперечные размеры источника много больше, чем $D = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поле в точках $\mathbf{r}_1(0, 0)$, $\mathbf{r}_2(0, 0)$ создается всеми излучателями источника:

$$u(\mathbf{r}_1, t) = \sum_i u_i(t), \quad u(\mathbf{r}_2, t) = \sum_i u_i(t) \exp\left[-i \frac{xx'_i + yy'_i}{R} k\right],$$

где $u_i(\mathbf{r}, t)$, $u_i(\mathbf{r}, t)$ — амплитуды поля i -го излучателя на первом и втором отверстиях в момент времени t . Корреляционная функция

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \overline{u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t)} = \\ = \sum_i \overline{u_i^*(t)u_i(t)} \exp\left[-ik \frac{xx'_i + yy'_i}{a}\right] + \sum_{i \neq j} \overline{u_i^*(t)u_j(t)} \exp\left[-ik \frac{xx'_j + yy'_j}{R}\right].$$

Второй член в Γ пропадает из-за некогерентности независимых излучателей. Первый же член представляет собой усредненную интенсивность излучения от отдельных излучателей с учетом разности хода $s_1 - s_2$. Перейдя от суммирования к интегрированию, получим

$$\gamma(x, y) = \frac{\iint_S I(x', y') \exp\left[-ik \frac{xx' + yy'}{R}\right] dx' dy'}{\iint_S I(x', y') dx' dy'},$$

где интегрирование выполняется по поперечному сечению источника.

490. а) $B(D) = |\gamma(D, 0)| = \cos \frac{\pi D \alpha}{\lambda}$;

б) $B(D) = (2\lambda/\pi D) J_1 \frac{\pi \alpha D}{\lambda}$.

491. а) $\rho = \alpha R = \frac{\lambda R}{2D_0} = 1,47 \times 10^8$ км;

б) $d = \alpha R = 1,22 \frac{\lambda R}{D_0} = 6,28 \times 10^8$ км;

диаметр звезды Бетельгейзе приблизительно в 450 раз больше диаметра Солнца и, следовательно, больше, чем диаметры орбит не только Земли, но и Марса!

492. От первого источника идет плоская волна $u_1 = A_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] = |A_1| \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \alpha_1)]$, фаза α_1 и амплитуда A_1 , которой меняются случайным образом, причем $\overline{A_1} = 0$, а $\overline{|A_1|^2}$ имеет постоянное ненулевое значение. От второго источника идет волна $u_2 = A_2 \exp[i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}]$, обладающая аналогичными свойствами. Обе эти волны поступают в фотоэлементы P_1 и P_2 . Неусредненный сигнал от фотоэлемента P_1 был бы пропорционален

$$I(\mathbf{r}_1, t) = |u_1(\mathbf{r}_1, t) + u_2(\mathbf{r}_1, t)|^2 = \\ = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* \exp[i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}] + A_1^* A_2 \exp[-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}]. \quad (1)$$

Сигнал (1) испытывает случайные флуктуации за счет флуктуаций фаз A_1 и A_2 на частотах, значительно меньших, чем частота волн u_1, u_2 , прошедших от источников. Эти флуктуации, тем не менее, не регистрируются и наблюдается усредненная интенсивность. При включении только одного детектора усредненная интенсивность

$$I(r_1, t) = |A_1|^2 + |A_2|^2 = I(r_2, t)$$

не зависит от $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ (фазы A_1 и A_2 флуктуируют независимо, так что $\overline{A_1 A_2^*} = \overline{A_1^* A_2} = 0$).

Пусть теперь сигналы от фотоэлементов P_1 и P_2 поступают сначала в умножитель, в котором интенсивности $I(\mathbf{r}_1, t)$ и $I(\mathbf{r}_2, t)$ перед регистрацией перемножаются. Наблюдаемый на выходе сигнал будет пропорционален

$$\overline{I(\mathbf{r}_1, t)I(\mathbf{r}_2, t)} = (|A_1|^2 + |A_2|^2) + 2|A_1|^2|A_2|^2 \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)].$$

Он зависит от $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ и, следовательно, от углового расстояния между удаленными источниками. Меняя расстояние $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ между детекторами и наблюдая ослабления и усиления сигнала, можно найти это угловое расстояние.

493. $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)x$, где координата x отсчитывается от преломляющего ребра перпендикулярно ему.

Если любым способом осуществить на плоскости xu фазовый сдвиг $\Delta\varphi \propto x$, то такая плоскость будет поворачивать фронт плоской волны в сторону больших x , т. е. действовать так же, как призма.

494. Фазовый сдвиг на расстоянии x от оси линзы в случае собирающей линзы есть

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi x^2}{f\lambda},$$

где f — фокусное расстояние, определяемое равенством

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

В случае рассеивающей линзы

$$\Delta\varphi = +\frac{\pi x^2}{f\lambda}.$$

495. Распределение интенсивности света на фотопластинке имеет вид

$$I(x) = |A_1 \exp[ikx\vartheta_1] + A_2 \exp[ikx\vartheta_2]|^2 = I_1 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k\vartheta x,$$

где $\vartheta_2 = \vartheta + \vartheta_1$, $k = 2\pi/\lambda$, $I_1 = |A_1|^2$, $I_2 = |A_2|^2$, координата x отсчитывается вдоль фотопластинки, как показано на рис. 29. Распределение почернения на проявленной фотопластинке определяется распределением интенсивности $I(x)$. Пропускание $T(x)$ пропорционально $[I(x)]^{-\gamma/2}$, где γ — коэффициент контрастности фотоэмульсии, и является периодической функцией x с периодом λ/ϑ . Оно может быть записано в виде $T(x) = a + b \cos k\vartheta x$ (a и b — постоянные), если оставить только две низшие гармоники. Проявленную фотопластинку можно рассматривать как дифракционную решетку, которая разбивает падающую плоскую волну на плоские пучки, направления θ распространения которых определяются соотношением $\frac{\lambda}{\vartheta} \sin \theta = n\lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Главными являются центральный пучок нулевого порядка и два пучка первого порядка в направлениях $\theta = \pm \vartheta$. Заметим, что эти три основных пучка можно получить, умножив падающую волну $A_0 \exp[ikz]$ на пропускание $T(x)$. При этом получим волновое поле за фотопластинкой вида

$$A_0 a \exp[ikx] + A_0 \frac{b}{2} \exp[ik(z + \vartheta x)] + A_0 \frac{b}{2} \exp[ik(z - \vartheta x)],$$

где первый член описывает неотклоненный центральный пучок, второй — пучок первого порядка, отклоненный на $+\vartheta$, третий — пучок первого порядка, отклоненный на $-\vartheta$.

496. Опорное поле на пластинке имеет вид

$$u_1 = A_0 \exp[-i\beta x],$$

$$\beta = \frac{2\pi(n-1)\alpha}{\lambda}.$$

Мы не пишем здесь и далее общего множителя $\exp[i(kz - \omega t)]$. Поле, дифрагировавшее на отверстии:

$$u_2 = A(x) \exp\left[i \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right].$$

Суммарное поле

$$u(x) = u_1 + u_2,$$

а интенсивность

$$I(x) = |u(x)|^2 = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x) \cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right).$$

Распределение интенсивности содержит информацию о фазе дифрагировавшей волны только благодаря наличию опорного пучка.

497. Пропускание $T(x)$ проявленной фотоэмульсии

$$\begin{aligned} T(x) \propto [I(x)]^{-\gamma/2} &= A_0^{-\gamma} \left\{ 1 + \frac{A^2(x)}{A_0^2} + 2\frac{A(x)}{A_0} \cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right) \right\}^{-\gamma/2} \approx \\ &\approx A_0^{-\gamma-2} \left\{ A_0^2 - \frac{\gamma}{2} A^2(x) - \gamma A_0 A(x) \cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right) \right\}, \end{aligned}$$

если использовать условие $A_0 \gg A(x)$. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T(x) \propto 2A_0^2 - \gamma A^2(x) - \gamma A_0 A(x) \exp\left[i\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right] - \\ - \gamma A_0 A(x) \exp\left[-i\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right]. \quad (1) \end{aligned}$$

Это равенство называется формулой голограммы Габора.

При освещении голограммы плоской монохроматической световой волной $A_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ за голограммой возникает волновое поле, представляющее собой результат дифракции на голограмме. Это поле можно получить (ср. решение задачи 495) просто путем умножения первичного волнового поля $A'_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ на пропускание $T(x)$, выражаемое формулой Габора (1). При этом получится поле вида

$$\begin{aligned} u \sim (2A_0^2 - \gamma A^2(x)) \exp[i(kz - \omega t)] - \\ - \gamma A_0 A(x) \exp[i(kz - \omega t)] \cdot \exp\left[i\left(\beta x - \frac{kx^2}{f\lambda}\right)\right] - \\ - \gamma A_0 A(x) \exp[i(kz - \omega t)] \cdot \exp\left[-i\left(\beta x + \frac{kx^2}{f\lambda}\right)\right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Первый член в (2) соответствует неравномерному дифракционному (из-за $A^2(x)$) ослаблению падающей волны. Угол дифракции мал, так

как $A(x)$ — плавно меняющаяся функция по сравнению с участвующими экспонентами. Второй член действует как комбинация призмы, отклоняющей пучок вверх, и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f (см. задачи 493, 494). Третий член действует как комбинация призмы, отклоняющей пучок вниз и собирающей линзы. В итоге при пропускании плоской

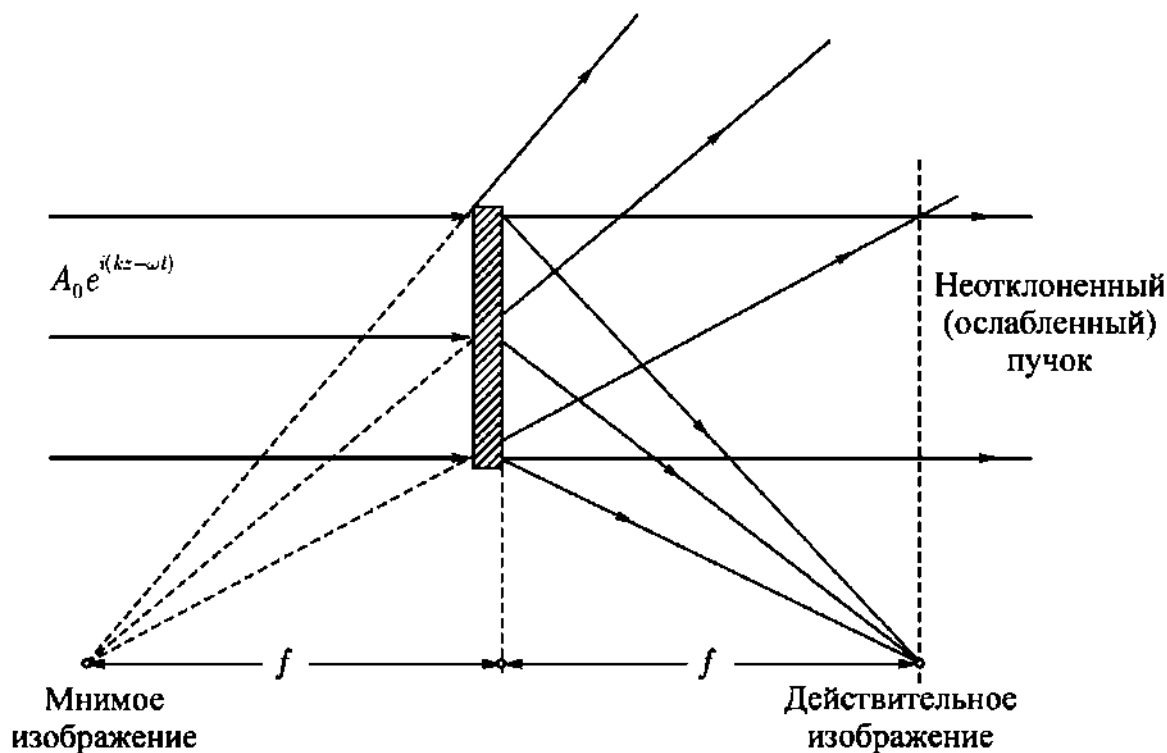


Рис. 88

монохроматической волны через голограмму восстанавливаются первоначальные волновые фронты (рис. 88): плоская волна и сферический фронт от отверстия. Последний воссоздается два раза: в виде волны от действительного и от мнимого изображений.

498.

$$\begin{aligned} \exp[ik'z]T(x) &\propto \left[2A_0^2 - 2\gamma A^2 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda f} Dx \right) \right] \exp[ik'z] - \\ &- \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda f} (x - D)^2 \right] + \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda f} (x + D)^2 \right] \right\} \exp[i(\beta x + k'z)] - \\ &- \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda f} (x - D)^2 \right] + \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda f} (x + D)^2 \right] \right\} \exp[-i(\beta x - k'z)]. \end{aligned}$$

Второй и третий члены, как и в задаче 497, описывают поле, отклоненное вверх и вниз и сфокусированное в две пары точек. Однако фокусные расстояния соответствующих рассеивающей и собирающей линз другие, а именно

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f.$$

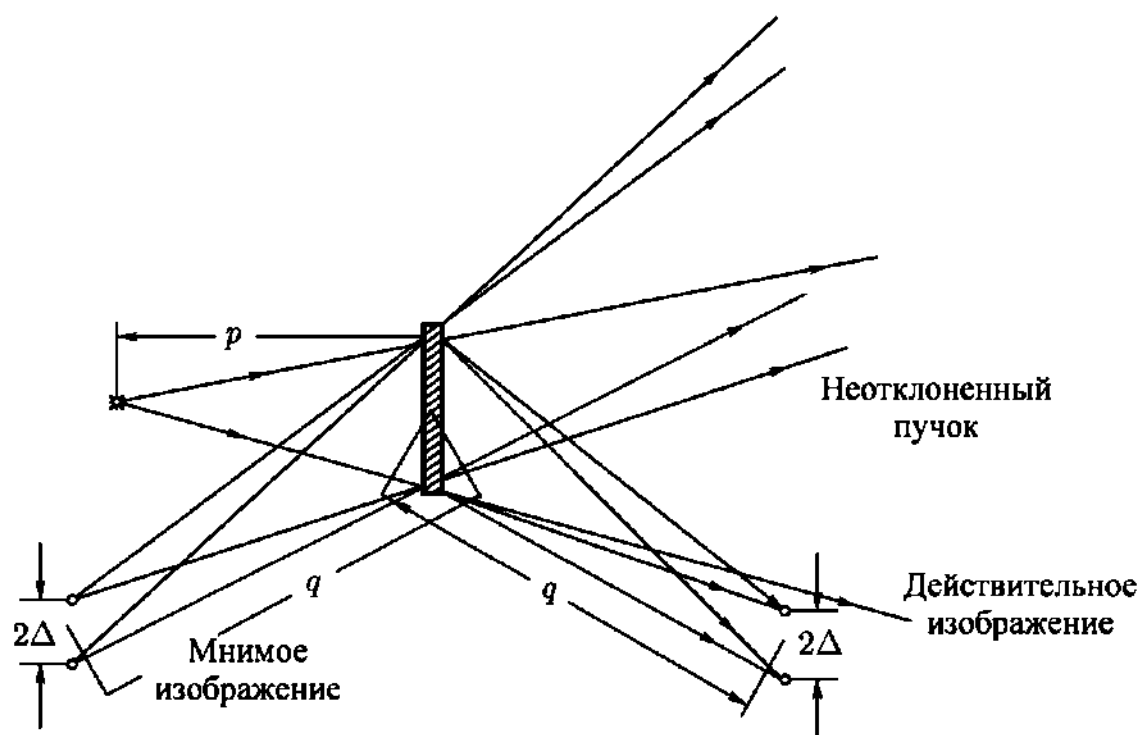


Рис. 89

Линейное увеличение выражается формулой

$$\frac{2\Delta}{2D} = \frac{p+q}{p} = \frac{\lambda' q}{\lambda f},$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'} = \frac{\lambda'}{\lambda f},$$

p — расстояние от источника волн λ' до голограммы, а q — расстояние изображения от голограммы (рис. 89). Чтобы достичь увеличения, надо использовать при восстановлении длину волны $\lambda' > \lambda$, а источник помещать на конечном расстоянии p от голограммы.

499. Распределение интенсивности на голограмме может быть передано без существенных искажений, если пространственный период дифракционной картины больше, чем d ,

$$\frac{1}{\left| \beta + \frac{\pi x}{f\lambda} \right|} \geq \vartheta$$

(см. решение задачи 496). Этим условием ограничивается максимальный размер голограммы в направлении x $2x_{\max} \approx 2\lambda f/d$. Этот размер играет роль диаметра линзы в теории разрешающей способности Рэля (ср. с задачей 426). Применяя критерий Рэля для минимального размера s предмета, который может быть разрешен, мы получим

$$s \approx \frac{\lambda}{2\vartheta} \approx \frac{\lambda f}{2x_{\max}} \approx \frac{d}{2}.$$

Здесь ϑ — половина угла раствора конуса лучей, идущего от голограммы к изображению.

§ 5. Дифракция рентгеновых лучей

500. Прежде всего необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\omega \gg \gg \omega_{\text{ат}}$. Однако этого недостаточно. Рассмотрим сначала случай, когда длина l когерентности велика по сравнению с размерами L тела. Тогда при достаточно малых углах рассеяния $\vartheta < \lambda/L$ произведение $qL \ll 1$, экспоненты в формулах (VIII.43) или (VIII.45) для сечений близки к единице $\int n \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV = NZ$. Если длина волны $\lambda \geq L$, то это выполняется при любых углах. При этом мы получим, например, из (VIII.43)

$$d\sigma = r_0^2 N^2 Z^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (1)$$

Эта формула соответствует когерентному томсоновскому рассеянию на всех NZ зарядах тела. Если же, например, длина когерентности меньше межатомного расстояния, но больше размера атома, то при $\vartheta < \lambda/l$ когерентно сложатся только вклады от Z электронов атома, и в формуле (1) вместо $N^2 Z^2$ нужно будет написать NZ^2 . При больших значениях углов величина сечения будет резко убывать из-за быстро осциллирующего множителя $\exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}]$ под интегралом.

501. Концентрацию электронов в газе можно представить в виде суммы членов, относящихся к отдельным атомам, $n(\mathbf{r}) = \sum_{a=1} n_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)$, где \mathbf{R}_a характеризует мгновенное расположение a -го атома. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 &= \left| \sum_a \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_a] \int n_a(\mathbf{r}') \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'] dV' \right|^2 = \\ &= |F_a(\mathbf{q})|^2 \left| \sum_a \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_a] \right|^2, \quad (1) \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}_a$, а $F_a(\mathbf{q})$ — атомный формфактор (VIII.47). Усреднение в (1) должно быть выполнено по всем положениям \mathbf{R}_a . Так как атомы в газе расположены хаотически, то $\overline{\left| \sum_a \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_a) \right|^2} = N$. В итоге, для неполяризованного излучения

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(q)|^2 N d\Omega. \quad (2)$$

Вычисление формфактора при заданной в задаче плотности $n_a(r)$ выполняется элементарно и дает

$$F_a(q) = \frac{8\pi}{a \left(\frac{1}{a^2} + q^2 \right)^2}. \quad (3)$$

Окончательно:

$$d\sigma(\vartheta) = 32\pi^2 \frac{r_0^2}{a^2} n_{0a} N \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\left[\frac{1}{a^2} + \left(\frac{4\pi}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]^4} d\Omega.$$

Из экспериментально найденного сечения (2) можно получить модуль формфактора. Для нахождения распределения электронов надо, вообще говоря, знать еще фазу формфактора.

502.
$$d\sigma = N r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} |F_a(q)|^2 \cdot 2 \left(1 + \frac{\sin qR}{qR} \right) d\Omega.$$

Сечение отличается от сечения рассеяния на изолированных атомах структурным множителем $2 \left(1 + \frac{\sin qR}{qR} \right)$, зависящим от взаимного расположения атомов в молекуле.

503.

$$\overline{d\sigma} = Nr_0^2(1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(q)|^2 \cdot \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin q(R_0 + x)}{q(R_0 + x)}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{b^2}\right] dx.$$

Существенна сравнительная величина $1/q$ и b . При $q \gg 1/b$ исчезает быстро осциллирующий член с $\sin q(R_0 + x)$. Тепловое движение уничтожает структурный эффект при таких передачах. При $q \ll 1/b$ структурный множитель имеет тот же вид $1 + \frac{\sin qR_0}{qR_0}$, что и в случае неподвижных ядер.

505. Направим оси x, y, z вдоль ребер L_1, L_2, L_3 монокристалла.

$$\begin{aligned} \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV &= F_a(\mathbf{q}) \sum_{\mathbf{R}} \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}] = \\ &= F_a(\mathbf{q}) \left(\sum_{n_1=0}^{N_1} \exp[iq_x a n_1] \right) \left(\sum_{n_2=0}^{N_2} \exp[iq_y a n_2] \right) \left(\sum_{n_3=0}^{N_3} \exp[iq_z a n_3] \right) = \\ &= F_a(\mathbf{q}) \frac{1 - \exp[iq_x a N_1]}{1 - \exp[iq_x a]} \frac{1 - \exp[iq_y a N_2]}{1 - \exp[iq_y a]} \frac{1 - \exp[iq_z a N_3]}{1 - \exp[iq_z a]}, \end{aligned}$$

где $N_1 = L_1/a$, $N_2 = L_2/a$, $N_3 = L_3/a$ — числа элементарных ячеек вдоль ребер L_1, L_2, L_3 ; очевидно, $N = N_1 N_2 N_3$. Используя (VIII.45), получим

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(\mathbf{q})|^2 \frac{\sin^2 \frac{q_x a N_1}{2}}{\sin^2 \frac{q_x a}{2}} \frac{\sin^2 \frac{q_y a N_2}{2}}{\sin^2 \frac{q_y a}{2}} \frac{\sin^2 \frac{q_z a N_3}{2}}{\sin^2 \frac{q_z a}{2}} d\Omega. \quad (1)$$

Положения главных максимумов определяются условием обращения знаменателей в нуль, откуда следует, что $q_x = 2\pi m_x/a$, $q_y = 2\pi m_y/a$, $q_z = 2\pi m_z/a$, где m_x, m_y, m_z — целые числа. Последние равенства представляют собой уравнение Лауэ, записанное в проекциях, поскольку компоненты \mathbf{g} выражаются формулами: $\mathbf{g} = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. В максимумах сечение

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 \frac{(L_1 L_2 L_3)^2}{a^6} d\Omega.$$

Оно пропорционально квадрату объема кристалла. Результаты задач 505–509 справедливы, только если монокристалл целиком расположен внутри объема когерентности (см. § 4).

506.

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(\mathbf{q})|^2 \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \frac{q_z a N_3}{2}}{4 \sin^2 \frac{q_y a}{2} \sin^2 \frac{q_z a}{2}} \times \left\{ \left[\frac{\sin \frac{q_x a N_1}{2}}{\sin \frac{q_x a}{2}} - \frac{\sin \frac{(q_x + q_y) a N_1}{2}}{\sin \frac{(q_x + q_y) a}{2}} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + 4 \sin^2 \frac{q_y a N_1}{2} \frac{\sin \frac{q_x a N_1}{2} \sin \frac{(q_x + q_y) a N_1}{2}}{\sin \frac{q_x a}{2} \sin \frac{(q_x + q_y) a}{2}} \right\},$$

где $N_1 = L_1/a$, $N_3 = L_3/a$. Положения главных максимумов выражаются условием Лауэ: $\mathbf{q} = 2\pi\mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. В максимумах сечение

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 \frac{(L_1^2 L_3)^2}{4a^6} d\Omega.$$

Угол ϑ_0 связан с $q = 2\pi g$ соотношением (VIII.44).

507. При $k \gg 1/a$ дифракционная картина сосредоточена в области малых углов, поскольку, согласно (VIII.44) и уравнению Лауэ, $k\vartheta = 2\pi g \sim \sim 1/a$ и $\vartheta \sim 1/ak \ll 1$; при этом $q \ll k$.

Введем обозначение: $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{q} - 2\pi\mathbf{g}$. В области дифракционного пятна вблизи данного главного максимума величина $\boldsymbol{\kappa} \ll 2\pi g \ll k$. Возведем равенство

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{g} + \boldsymbol{\kappa}$$

в квадрат и заметим, что $k^2 = k_0^2$, а

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}_0 = -\pi g^2. \quad (1)$$

При этом получится $(\mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}^2 = 0$, откуда видно, что при $\boldsymbol{\kappa} \ll g$ оказывается $\boldsymbol{\kappa} \perp \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{g}$, т. е. добавка $\boldsymbol{\kappa}$ перпендикулярна волновому вектору, отвечающему рассеянию в направлении главного максимума. Запишем равенство $(\mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\kappa} = 0$ в виде $\boldsymbol{\kappa}_z \approx -2\pi[(g_x/k_0)\boldsymbol{\kappa}_x + (g_y/k_0)\boldsymbol{\kappa}_y]$, откуда видно, что $|\boldsymbol{\kappa}_z| \ll |\boldsymbol{\kappa}_x|, |\boldsymbol{\kappa}_y|$. Благодаря этому в выражении (1) задачи 505 отношение

$$\frac{\sin^2 \frac{q_z a N_3}{2}}{\sin^2 \frac{q_z a}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\boldsymbol{\kappa}_z a N_3}{2}}{\sin^2 \frac{\boldsymbol{\kappa}_z a}{2}}$$

является значительно более пологой функцией от κ_z , чем первые два отношения, и может быть заменено значением N_3^2 в максимуме ($\kappa_z = 0$). Сечение принимает вид ($\vartheta \ll 1$)

$$d\sigma = 4r_0^2 |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 N_3^2 \frac{\sin^2 \frac{\kappa_x a N_1}{2}}{\left(\frac{\kappa_x a}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\kappa_y a N_2}{2}}{\left(\frac{\kappa_y a}{2}\right)^2} d\Omega,$$

откуда видно, что угловая ширина главного максимума по порядку величины составляет $1/kaN_1$ и $1/kaN_2$ в направлениях x и y соответственно. Записав элемент телесного угла в виде $d\Omega = d\kappa_x d\kappa_y / k^2$ и интегрируя по κ_x и κ_y в бесконечных пределах, получим

$$\sigma = 4r_0^2 |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 \left(\frac{\pi}{ak}\right)^2 N_3^2 N_1 N_2.$$

Сечение по-разному зависит от продольных и поперечных размеров. При приблизительном равенстве их полное сечение пропорционально $V^{4/3}$ (V — объем тела), а угловая ширина пропорциональна $(V^{4/3}/V^2)^{1/2} = 1/V^{1/3}$.

508.

$$d\sigma = 32r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 \frac{\sin^2 \frac{\kappa_x L_x}{2}}{\kappa_x^2} \frac{\sin^2 \frac{\kappa_y L_y}{2}}{\kappa_y^2} \frac{\sin^2 \frac{\kappa_z L_z}{2}}{\kappa_z^2} d\Omega,$$

где

$$\kappa_x k_{gx} + \kappa_y k_{gy} + \kappa_z k_{gz} = 0, \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{k}_0 + 2\pi\mathbf{g}.$$

509.
$$d\sigma = 8\pi r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |F_a(2\pi\mathbf{g})|^2 \frac{\sin \kappa R - \kappa R \cos \kappa R}{\kappa^6} d\Omega.$$

ГЛАВА IX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ

510. В случае E -волн:

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin \kappa_1 x \sin \kappa_2 y,$$

где

$$\kappa_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad \kappa_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots,$$

начало координат — в углу прямоугольного сечения, размеры которого по осям x и y равны соответственно a и b .

В случае H -волн:

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 \cos(\kappa_1 x) \cos(\kappa_2 y)$$

с теми же κ_1, κ_2 , однако одно из чисел n_1, n_2 может теперь принимать значение 0. Из приведенных формул следует, что в поперечных направлениях поле имеет характер стоячих волн. Зависимость постоянной распространения k от ω имеет вид:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Поперечные компоненты полей выражаются через $\mathcal{E}_z, \mathcal{H}_z$ с помощью уравнений Максвелла.

511. Для E -волн:

$$\alpha = \frac{2\zeta'\omega}{ck\kappa^2 ab} (\kappa_1^2 b + \kappa_2^2 a),$$

где

$$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2, \quad \zeta' = \operatorname{Re} \zeta.$$

Для волн типа H_{n0} :

$$\alpha = \frac{\zeta' \omega}{ckab} \left(a + \frac{2\kappa^2 b}{k^2 + \kappa^2} \right).$$

Для волн типа $H_{n_1 n_2}$ ($n_1, n_2 \neq 0$):

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2 \zeta'}{\omega kab} \left[a + b + \frac{k^2}{\kappa^4} (\kappa_1^2 a + \kappa_2^2 b) \right].$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

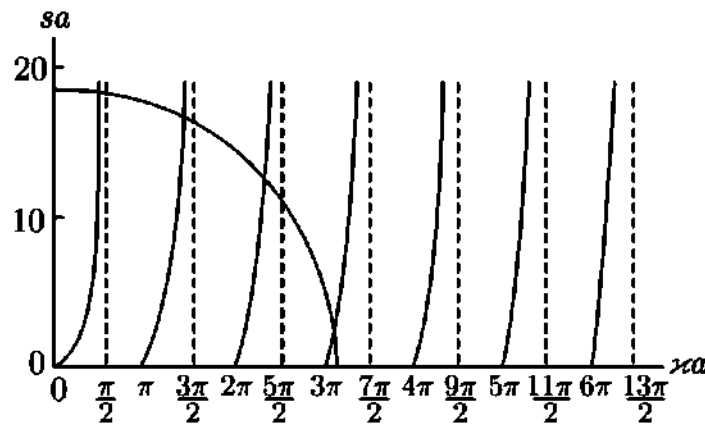


Рис. 90

512. Волны электрического типа.

а) Четные решения [$\mathcal{E}_x(x) = \mathcal{E}_x(-x)$, $\mathcal{H}_y(x) = \mathcal{H}_y(-x)$, $\mathcal{E}_z(x) = -c\mathcal{E}_z(-x)$]:
при $x > a$

$$\mathcal{E}_z = Ae^{-sx}, \quad \mathcal{E}_x = \frac{ik}{s} Ae^{-sx}, \quad \mathcal{H}_y = \frac{i\omega}{sc} Ae^{-sx};$$

при $-a \leq x \leq a$

$$\mathcal{E}_z = B \sin \kappa x, \quad \mathcal{E}_x = \frac{ik}{\kappa} B \cos \kappa x, \quad \mathcal{H}_y = \frac{i\omega \epsilon}{\kappa c} B \cos \kappa x; \quad (1)$$

при $x < -a$

$$\mathcal{E}_z = -Ae^{sx}, \quad \mathcal{E}_x = \frac{ik}{s} Ae^{sx}, \quad \mathcal{H}_y = \frac{i\omega}{sc} Ae^{sx},$$

где $A = eB^{sa} \sin \kappa a$; остальные компоненты \mathcal{E} и \mathcal{H} равны нулю. Параметры κ и s определяются из системы уравнений

$$(\kappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon \mu - 1); \quad (2)$$

$$sa = \frac{1}{\epsilon} \kappa a \operatorname{tg} \kappa a. \quad (3)$$

Эту систему легко решить графически. Возможные значения κ и s соответствуют точкам пересечения кривых (3) с окружностью радиуса $r = \frac{\omega a}{c} \sqrt{\epsilon \mu - 1}$ (рис. 90). При заданных ω , a , ϵ , μ имеется конечное число точек пересечения, т. е. конечное число типов волн, у которых распределение поля описывается формулами (1). В частности, при $r < \pi$ существует лишь одна волна типа E_{00} .

Рассмотрим зависимость постоянной распространения

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} - \kappa^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + s^2} \quad (4)$$

от частоты ω при заданных параметрах диэлектрического слоя для данного типа волны. Из рис. 90 видно, что при частотах, близких к граничной частоте, при которой появляется данный тип волны, s близко к нулю, а k — к ω/c . Волна при этих частотах имеет такую же постоянную распространения, как и в вакууме, и поле проникает на большие расстояния от границы слоя. С ростом ω параметр s возрастает, а κ остается ограниченным. При этом k стремится к $\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$, т. е. к тому значению, которое соответствует волне, распространяющейся в неограниченной диэлектрической среде с параметрами ϵ , μ . При достаточно больших ω и, следовательно, больших s , поле сосредоточено почти целиком внутри диэлектрического слоя.

б) Нечетные решения [$\mathcal{E}_x(x) = -\mathcal{E}_x(-x)$, $\mathcal{H}_y(x) = -\mathcal{H}_y(-x)$, $\mathcal{E}_z(x) = \mathcal{E}_z(-x)$]:

при $x > a$

$$\mathcal{E}_z = Ae^{-sx}, \quad \mathcal{E}_x = \frac{ik}{s} Ae^{-sx}, \quad \mathcal{H}_y = \frac{i\omega}{sc} Ae^{-sx}; \quad (5)$$

при $-a \leq x \leq a$

$$\mathcal{E}_z = B \cos \kappa x, \quad \mathcal{E}_x = -\frac{ik}{\kappa} B \sin \kappa x, \quad \mathcal{H}_y = -\frac{i\omega \epsilon}{\kappa c} B \sin \kappa x;$$

при $x < -a$

$$\mathcal{E}_z = Ae^{sx}, \quad \mathcal{E}_x = -\frac{ik}{s} Ae^{sx}, \quad \mathcal{H}_y = -\frac{i\omega}{sc} Ae^{sx},$$

где $A = Ve^{sa} \cos \kappa a$; остальные компоненты \mathcal{E} и \mathcal{H} равны нулю. Параметры s и κ определяются из системы уравнений:

$$(\kappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon \mu - 1), \quad sa = -\frac{1}{\epsilon} \kappa a \operatorname{ctg} \kappa a. \quad (6)$$

Постоянная распространения k связана с κ и s соотношениями (4).

Из графического анализа легко получить, что при $r < \frac{\pi}{2}$ нечетные электрические волны не могут существовать. Остальные закономерности качественно те же, что и для четных волн.

Волны магнитного типа можно проанализировать таким же путем.

513. Вдоль слоя могут распространяться четные волны электрического типа и нечетные волны магнитного типа с теми же характеристиками (постоянная распространения, конфигурация полей в области $x > 0$ и др.), что и в предыдущей задаче.

514. Волны электрического типа.

Для определения волн этого типа нужно решить уравнение для продольной компоненты электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \alpha^2} + \kappa^2 \mathcal{E}_z = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) интегрируется путем разделения переменных. Частные решения имеют вид

$$\mathcal{E}_z(r, \alpha) = J_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m), \quad (2)$$

где J_m — функция Бесселя, ψ — произвольная постоянная. Чтобы поле возвращалось к исходному значению при изменении α на 2π , нужно считать m целым числом ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Поперечные компоненты электрического и магнитного полей выражаются через \mathcal{E}_z с помощью уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{ik}{\kappa} J'_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m), \\ \mathcal{E}_\alpha &= \frac{imk}{\kappa^2 r} J_m(\kappa r) \cos(m\alpha + \psi_m), \\ \mathcal{H}_r &= -\frac{i\omega}{\kappa^2 cr} J_m(\kappa r) \cos(m\alpha + \psi_m), \\ \mathcal{H}_\alpha &= \frac{i\omega}{\kappa c} J'_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m). \end{aligned}$$

Возможные значения параметра κ определяются из граничных условий на стенке волновода:

$$\mathcal{E}_r|_{r=a} = 0, \quad \mathcal{E}_\alpha|_{r=a} = 0.$$

Это дает $\kappa_{mn}a = \alpha_{mn}$, где α_{mn} — n -й корень функции Бесселя: $J_m(\alpha_{mn}) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, волны рассматриваемого типа характеризуются двумя индексами m, n ; при $m = 0$ поле обладает симметрией вращения относительно оси z . Фазы ψ_m в случае идеального волновода определяются условиями возбуждения. В реальных случаях, однако, они существенно зависят от дефектов стенок волновода (отступления от круговой формы сечения, продольные царапины и т. д.).

Распространение волны вдоль волновода возможно, если $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2}$ будет вещественной величиной. Поэтому волна типа m, n будет распространяться в волноводе, если ее частота удовлетворяет неравенству

$$\omega^2 \geq \frac{c^2 \alpha_{mn}^2}{a^2}.$$

Наименьшая частота возможна для волны типа $(0, 1)$:

$$\omega_0 = \frac{c\alpha_{01}}{a} \approx 2,4 \frac{c}{a}.$$

Соответствующая длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 2,6a$$

— порядка радиуса волновода.

Волны магнитного типа:

$$\mathcal{H}_z = J_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Значения постоянной распространения k определяются из равенства

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta_{mn}^2}{a^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где β_{mn} — n -й корень уравнения $J'_m(\beta_{mn}) = 0$. Наименьший корень $\beta_{11} \approx 1,8$; ему соответствуют граничная частота $\omega_0 \approx 1,8 \frac{c}{a}$ и граничная длина волны $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 3,5a$.

Для волн магнитного типа граничная частота ниже, чем для волн электрического типа. Если частота волны лежит в пределах $\omega_{0эл} > \omega > \omega_{0магн}$, то эта волна может быть только типа H_{11} .

515. Для E -волны:

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{c a k};$$

для H -волна типа (m, n) :

$$\alpha = \frac{c \zeta' \kappa^2}{\omega a k} \left[1 + \frac{m^2 \omega^2}{c^2 \kappa^2 (a^2 \kappa^2 - m^2)} \right],$$

где $\zeta' = \operatorname{Re} \zeta$.

516. Волновой вектор k и частота ω волн в волноводе связаны соотношением

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \kappa^2,$$

где κ — постоянная, зависящая от типа волны и размеров поперечного сечения волновода. По обычным формулам имеем

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}},$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2},$$

где λ_0 — граничная длина волны.

Из полученных формул видно, что всегда $v_\varphi > c$, $v_g < c$, причем $v_\varphi \cdot v_g = c^2$. Этот результат справедлив для волновода, внутри которого вакуум (диэлектрические свойства воздуха для рассматриваемой области явлений практически не отличаются от свойств вакуума).

Если волновод заполнен диэлектриком, причем дисперсией ϵ и μ можно пренебречь, все вышеприведенные формулы остаются справедливыми при замене c на $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Поэтому в таком волноводе $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}$ может стать меньше c , волна «замедляется» (см. задачу 522).

517. $H_z = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0 [e^{i(\kappa_1 x + kz)} + e^{i(-\kappa_1 x + kz)}] e^{-i\omega t}$. Направления распространения двух плоских волн, на которые разлагается волна H_{10} , составляют с осью волновода угол θ (рис. 91), который определяется условием

$$\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \kappa_1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}.$$

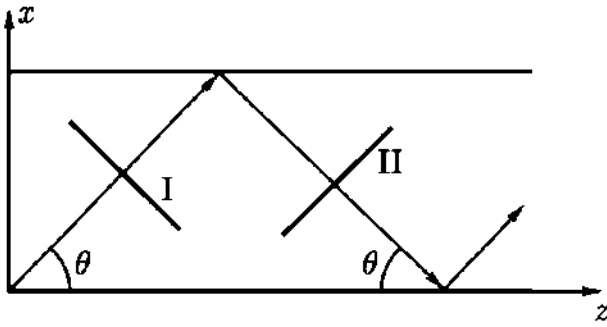


Рис. 91

фазовая плоскость I перемещается со скоростью c в направлении, составляющем угол θ с осью z ; однако скорость ее перемещения вдоль оси волновода будет больше:

$$v = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} = v_\varphi.$$

Это и есть фазовая скорость волны в волноводе.

Групповая скорость совпадает со скоростью движения энергии. Но в плоской волне в вакууме энергия движется со скоростью c в направлении распространения волны. Каждая плоская волна, входящая в состав рассматриваемой волны H_{10} , будет испытывать многократные отражения от стенок волновода, и ее «путь» будет зигзагообразным. Результирующая скорость вдоль оси волновода будет

$$v = c \cos \theta = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2},$$

что совпадает с групповой скоростью v_g .

518.

$$H_\alpha = E_r = \frac{A}{r} e^{i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)}, \quad (1)$$

где A — постоянная, а остальные компоненты полей равны нулю.

Поток энергии

$$\bar{\gamma} = \frac{A^2 c}{4} \ln \frac{b}{a}. \quad (2)$$

В случае одиночного идеально проводящего провода поля во всем пространстве вне провода описываются формулами (1); полный поток энергии через плоскость $z = \text{const}$ бесконечно велик: $\gamma \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$. Поэтому такая волна не может поддерживаться источником конечной мощности, и, следовательно, рассматриваемый случай не имеет физического смысла.

519. Волны электрического типа:

$$\mathcal{E}_z = [A_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) + B_{mn} N_m(\kappa_{mn} r)] \sin(m\alpha + \psi_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где κ_{mn} — n -й корень уравнения

$$J_m(\kappa a) N_m(\kappa b) - J_m(\kappa b) N_m(\kappa a) = 0.$$

Здесь N_m , J_m — цилиндрические функции (см. приложение 3), A_{mn} и B_{mn} — постоянные, связанные условием

$$A_{mn}J_m(\kappa_{mn}a) + B_{mn}N_m(\kappa_{mn}a) = 0.$$

Волны магнитного типа:

$$\mathcal{H}_z = [C_{mn}J_m(\kappa_{mn}r) + D_{mn}N_m(\kappa_{mn}r)] \sin(m\alpha + \psi_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где κ_{mn} — n -й корень уравнения

$$J'_m(\kappa a)N'_m(\kappa b) - N'_m(\kappa a)J'_m(\kappa b) = 0,$$

а C_{mn} и D_{mn} связаны условием:

$$C_{mn}J'_m(\kappa_{mn}a) + D_{mn}N'_m(\kappa_{mn}a) = 0.$$

Остальные компоненты электрического и магнитного полей выражаются через \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z с помощью уравнений Максвелла.

$$520. \quad \alpha = \frac{\zeta'(a+b)}{2ab \ln(b/a)},$$

где $\zeta' = \operatorname{Re} \zeta$.

521. Если поле симметрично относительно оси провода, продольная компонента \mathcal{E}_z удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_z}{dr} + \kappa^2 \mathcal{E}_z = 0. \quad (1)$$

Поскольку рассматривается проводник с конечной проводимостью, параметры k и κ будут комплексными. Определим знак κ так, чтобы $\operatorname{Im} \kappa = \kappa'' > 0$.

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$\mathcal{E}_z(r) = A' H_0^{(1)}(\kappa r) + B' H_0^{(2)}(\kappa r),$$

где $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ — функции Ханкеля. Из асимптотического поведения этих функций (см. приложение 3) и условия $\operatorname{Im} \kappa > 0$ следует, что должно быть $B' = 0$, так как в противном случае поле будет возрастать на бесконечности. Остальные компоненты \mathcal{E} и \mathcal{H} выразим через \mathcal{E}_z с помощью уравнений Максвелла:

$$\mathcal{E}_z = A' H_0^{(1)}(\kappa r), \quad \mathcal{E}_r = \frac{ik}{\kappa} A' H_1^{(1)}(\kappa r), \quad H_\alpha = \frac{i\omega}{\kappa c} A' H_1^{(1)}(\kappa r). \quad (2)$$

При достаточно больших значениях κr функции $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ пропорциональны $\frac{1}{\sqrt{\kappa r}} e^{-\kappa'' r}$ и, следовательно, электромагнитное поле затухает экспоненциально на больших расстояниях от провода. Максимальная концентрация поля существует вблизи провода, волна имеет поверхностный характер.

Граничное условие Леонтовича на поверхности провода

$$\mathcal{E}_z = \zeta \mathcal{H}_\alpha$$

приводит к характеристическому уравнению для определения κ :

$$\kappa a \frac{H_0^{(1)}(\kappa a)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} = i \zeta \frac{\omega}{c} a.$$

Здесь ζ — поверхностный импеданс металла. Для хорошего проводника $|\zeta| \ll 1$, поэтому последнее равенство может выполняться только при малых κa . Пользуясь приближенными формулами для $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ (приложение 3), получим

$$(\kappa a)^2 \ln\left(\frac{\gamma \kappa a}{2i}\right) = i \zeta \frac{\omega}{c} a, \quad \ln \gamma = 0,5772. \quad (3)$$

Трансцендентное уравнение (3) нельзя решить графическим методом, так как входящие в него величины комплексны. Зоммерфельд использовал для решения этого уравнения метод итераций, основанный на том, что $\ln \kappa a$ изменяется значительно медленнее, чем κa . Обозначим $\left(\frac{\gamma \kappa a}{2i}\right)^2 = u$, $\frac{i \gamma^2 \omega}{2c} \zeta a = v$. Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$u \ln u = v.$$

Если найдено приближенное значение u_n (n -е приближение), то более точное значение u_{n+1} ($(n+1)$ -е приближение) можно получить по формуле

$$u_{n+1} \ln u_n = v.$$

В нулевом приближении можно положить $u_0 = v$, тогда

$$u_1 = \frac{v}{\ln v}, \quad u_2 = \frac{v}{\ln\left(\frac{v}{\ln v}\right)}, \quad u_3 = \frac{v}{\ln\left(\frac{v}{\ln\left(\frac{v}{\ln v}\right)}\right)} \quad \text{и т. д.}$$

Для дециметровых радиоволн ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 30 \text{ см}$), распространяющихся вдоль медного провода радиусом 1 мм (проводимость меди $\sigma = 5,2 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$), расчет указанным методом с использованием формул (VIII.9)–(VIII.11) дает

$$u \approx (4,2 + 4,5i) \cdot 10^{-8},$$

откуда

$$k = \frac{\omega}{c} [1 + (6,0 + 6,4i) \cdot 10^{-5}].$$

Фазовая скорость волны

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re } k} = (1 - 6 \cdot 10^{-5})c < c,$$

волна несколько замедлилась.

Этот результат можно понять из следующих соображений. В случае идеальной проводимости провода поперечная электромагнитная волна имеет фазовую скорость c , поле внутри провода равно нулю. При конечной проводимости часть энергии будет распространяться внутри провода; так как скорость распространения в металле значительно меньше c , то «в среднем» электромагнитная волна замедлится. Кроме того, появится затухание.

Исследуем характер поля в предельном случае $\zeta \rightarrow 0$ (идеальная проводимость). При этом, как следует из (3), $\kappa \rightarrow 0$, $k \rightarrow \frac{\omega}{c}$. Используя выражение функций $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ при малых аргументах, получим из формул (2)

$$\mathcal{E}_z = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{2iA'}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa r}{2i}\right), \quad \mathcal{E}_r = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2} \cdot \frac{1}{r},$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

Поскольку компоненты поля не могут принимать бесконечных значений, нужно предположить, что величина A' пропорциональна κ^2 . Положим $A' = A \frac{\kappa^2}{k}$, тогда

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{H}_\alpha = \frac{A}{r}, \quad \mathcal{E}_z = 0.$$

Это — чисто поперечная электромагнитная волна, распространяющаяся со скоростью c .

522. Составляющие электромагнитного поля в волноводе определяются следующими выражениями:

при $r \leq a$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 J_0(\kappa_1 r), \quad \mathcal{E}_r = -i \frac{k}{\kappa_1} \mathcal{E}_0 J_1(\kappa_1 r), \quad \mathcal{H}_\alpha = -i \frac{\omega}{c \kappa_1} \mathcal{E}_0 J_1(\kappa_1 r);$$

при $a \leq r \leq b$

$$\mathcal{E}_z = A J_0(\kappa_2 r) + B N_0(\kappa_2 r), \quad \mathcal{E}_r = -i \frac{k}{\kappa_2} [A J_1(\kappa_2 r) + B N_1(\kappa_2 r)],$$

$$\mathcal{H}_\alpha = -i \frac{\varepsilon \omega}{c \kappa_2} [A J_1(\kappa_2 r) + B N_1(\kappa_2 r)].$$

Здесь $\kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$, $\kappa_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} - k^2}$; \mathcal{E}_0 , A , B — постоянные.

Граничные условия запишутся в виде

$$\mathcal{E}_z|_{r=b} = 0, \quad \mathcal{E}_z|_{r=a-0} = \mathcal{E}_z|_{r=a+0}, \quad \mathcal{H}_\alpha|_{r=a-0} = \mathcal{H}_\alpha|_{r=a+0}.$$

При этом граничное условие для \mathcal{E}_α будет выполняться автоматически.

Исключая постоянные A , B , \mathcal{E}_0 , получим трансцендентное уравнение, связывающее k и ω :

$$\frac{\varepsilon \kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{J_0(\kappa_1 a)}{J_1(\kappa_1 a)} = \frac{J_0(\kappa_2 a) N_0(\kappa_2 b) - N_0(\kappa_2 a) J_0(\kappa_2 b)}{J_1(\kappa_2 a) N_0(\kappa_2 b) - N_1(\kappa_2 a) J_0(\kappa_2 b)}. \quad (1)$$

При $a \ll b$ это уравнение существенно упрощается. Рассмотрим волну, которая будет иметь наибольшее k . Если бы волновод был заполнен диэлектриком целиком ($a = 0$), то соответствующее значение κ_2 было бы равно $\kappa_{02} = \frac{\alpha_{01}}{b}$, где $\alpha_{01} = 2,4$, $J_0(\alpha_{01}) = 0$ (см. задачу 514).

Будем искать решение, мало отличающееся от κ_{02} :

$$\kappa_2 = \kappa_{02} + \kappa'_2 = \frac{\alpha_{01}}{b} + \frac{\Delta \alpha}{b},$$

где $\Delta \alpha$ имеет порядок не ниже a/b . Считая $\alpha_{01} \frac{a}{b} \ll 1$, используем приближенные формулы для J_0 , N_0 , J_1 , N_1 из приложения 3. Это дает вместо (1) уравнение

$$\varepsilon \left[(\kappa_2 a)^2 N_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi} J_0(\kappa_2 b) \right] = (\kappa_2 a)^2 \left[N_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa_2 a} J_0(\kappa_2 b) \right].$$

Положим в нем $N_0(\kappa_2 b) = N_0(\alpha_{01} + \Delta\alpha) \approx N_0(\alpha_{01})$, $J_0(\kappa_2 b) = -J_1(\alpha_{10} \Delta\alpha)$. Тогда, отбрасывая малый член с логарифмом, получим

$$\Delta\alpha = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\kappa\alpha_{01}^2}{4} \cdot \frac{N_0(\alpha_{01})}{J_1(\alpha_{01})} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Фазовая скорость волны

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon\omega^2 - \frac{(\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01}\Delta\alpha)}{b^2}}}.$$

Вводя обозначение $\omega_0 = \alpha_{01} \frac{c}{b} \approx 2,4 \frac{c}{b}$ (минимальная частота для волновода, не содержащего диэлектрика) и подставляя табличные значения $N_0(\alpha_{01})$ и $J_1(\alpha_{01})$, получим

$$v_\varphi = c \left\{ \varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left[1 + 3,7 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Если волновод заполнен диэлектриком целиком ($a = 0$), то

$$v_\varphi = c \left[\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Граничная частота частично заполненного волновода

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} \left[1 + 1,85 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right]$$

лежит между граничными частотами незаполненного и целиком заполненного волновода:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega_{\text{гр}} < \omega_0.$$

Фазовая скорость (2) становится меньше скорости c при частотах

$$\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \left[1 + 1,85 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{a^2}{b^2} \right].$$

Таким образом, волновод, частично или целиком заполненный диэлектриком, является замедляющей системой: фазовая скорость электромагнитных волн в нем может быть меньше c . Важной особенностью медленных

волн является то, что они могут эффективно взаимодействовать с пучками заряженных частиц. Взаимодействие волн с пучком частиц может быть использовано как для генерации и усиления электромагнитных колебаний сверхвысокой частоты (клистрон, лампа с бегущей волной, магнетрон), так и для ускорения частиц (линейный ускоритель).

523. Граничные условия на анизотропно проводящей плоскости имеют вид

$$E_{1x} - E_{2x} = 0, \quad H_{1x} = H_{2x}, \quad E_{1z} = E_{2z}.$$

Индексом 1 обозначена область $y > 0$, индексом 2 — область $y < 0$. Первые два равенства являются следствием идеальной проводимости полосок, последние два выражают отсутствие тока в направлении, перпендикулярном полоскам. Кроме того, $E_y = E_z = 0$ при $x = \pm a$ и все составляющие поля должны быть ограничены при $y \rightarrow \pm\infty$.

Решая уравнения Максвелла с указанными граничными условиями, найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1x} &= 0, \quad \mathcal{E}_{1y} = -Be^{-\beta y} \cos \alpha x, \\ \mathcal{E}_{1z} &= iB \frac{\beta}{k} e^{-\beta y} \cos \alpha x, \\ \mathcal{H}_{1x} &= B \left(\frac{k_0 \varepsilon}{k} - \frac{\alpha^2}{k_0 k} \right) e^{-\beta y} \cos \alpha x, \\ \mathcal{H}_{1y} &= B \frac{\alpha \beta}{k k_0} e^{-\beta y} \sin \alpha x, \\ \mathcal{H}_{1z} &= -iB \frac{\alpha}{k_0} e^{-\beta y} \sin \alpha x, \end{aligned}$$

где $k_0 = \omega/c$, B — постоянная.

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_m = \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta &= \beta_m = \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon + \alpha_m^2}. \end{aligned}$$

Постоянная распространения k выражается через ω по формуле

$$k = k_m = \alpha_m = \left[\frac{\left(\frac{k_0^2 \varepsilon}{\alpha_m^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{k_0^2 \varepsilon}{\alpha_m^2} \right)}{1 - (\varepsilon + 1) \frac{k_0^2 \varepsilon}{\alpha_m^2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для заданного m волна может распространяться, если ее частота ω заключена в пределах

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{\omega}{c\alpha_m} \leq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + 1}};$$

при этом k меняется от 0 до ∞ .

Если $\varepsilon = 1$ (диэлектрик отсутствует), то система превращается в резонатор: в ней возможны колебания при дискретных частотах $\omega_m = c\alpha_m$. При $\varepsilon > 1$ рассмотренное устройство является замедляющей системой. Групповая и фазовая скорости волн в ней меньше скорости света c .

524. Волны электрического типа в рассматриваемом случае существовать не могут. Волны магнитного типа:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z &= \frac{i\mathcal{E}_0 c}{\omega\mu} \left(\kappa \cos \kappa x - k \frac{\mu_a}{\mu_\perp} \sin \kappa x \right), \\ \mathcal{H}_x &= \frac{\mathcal{E}_0 c}{\omega\mu} \left(k \sin \kappa x - \kappa \frac{\mu_a}{\mu_\perp} \cos \kappa x \right), \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin \kappa x, \\ \mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_y = \mathcal{H}_y = 0, \end{aligned}$$

где $\kappa = \frac{n\pi}{a}$, $k = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_\parallel \mu}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\mu = \mu_\perp - \frac{\mu_a^2}{\mu_\perp}.$$

Граничная частота $\omega_0^{(n)} = \frac{c\kappa_n}{\varepsilon_\parallel \mu}$.

Как следует из формул для \mathcal{H}_z и \mathcal{H}_x , конфигурация магнитного поля для волны данного типа зависит от знака k , т. е. от направления распространения волны, и от знака μ_a , т. е. от направления постоянного магнитного поля. Этот эффект связан с гиротропией среды, заполняющей волновод.

525. Уравнения Максвелла для комплексно-сопряженных амплитуд \mathcal{E}_0^* , \mathcal{H}_0^* имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{E}_0^* - ik_0(\mathbf{e}_z \times \mathcal{E}_0^*) &= -\frac{i\omega}{c} \mathcal{H}_0^*, \\ \text{rot } \mathcal{H}_0^* - ik_0(\mathbf{e}_z \times \mathcal{H}_0^*) &= \frac{i\omega}{c} \mathcal{E}_0^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Амплитуды \mathcal{E} , \mathcal{H} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{E} + ik(\mathbf{e}_z \times \mathcal{E}) &= \frac{i\omega}{c} \hat{\mu}' \mathcal{H}, \\ \text{rot } \mathcal{H} + ik_0(\mathbf{e}_z \times \mathcal{H}) &= -\frac{i\omega}{c} \hat{\varepsilon}' \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\hat{\mu}'\mathcal{H}$, $\hat{\varepsilon}'\mathcal{E}$ — векторы с компонентами $\mu'_{ik}\mathcal{H}_k$, $\varepsilon'_{ik}\mathcal{E}_k$; $\mu'_{ik} = \varepsilon'_{ik} = \delta_{ik}$, — вне области, занятой диэлектриком, $\mu'_{ik} = \mu_{ik}$, $\varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik}$ — внутри этой области.

Из уравнений для $\text{rot } \mathcal{E}_0^*$ и $\text{rot } \mathcal{H}$ следует:

$$\mathcal{H} \text{ rot } \mathcal{E}_0^* - \mathcal{E}_0^* \text{ rot } \mathcal{H} + i(k - k_0)(\mathbf{e}_z \times \mathcal{E}_0^*)\mathcal{H} = -i\omega(\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0^* - \hat{\varepsilon}'\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0^*). \quad (3)$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по поперечному сечению волновода S . Первые два члена можно преобразовать следующим образом:

$$\int_S (\mathcal{H} \text{ rot } \mathcal{E}_0^* - \mathcal{E}_0^* \text{ rot } \mathcal{H}) dS = \frac{1}{l} \int_V \text{div}(\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) dV.$$

В последнем выражении интеграл берется по объему, ограниченному стенкой волновода и двумя сечениями, отстоящими друг от друга на расстояние l (подынтегральное выражение не зависит от z).

Применяя затем теорему Остроградского — Гаусса, получим

$$\int \text{div}(\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) dV = \int (\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int (\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0^*) \cdot \mathcal{H} dS.$$

На стенке волновода $\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0^* = 0$ в силу граничного условия $\mathcal{E}_{0\tau} = 0$, а интегралы по сечениям входят с противоположными знаками и взаимно сокращаются. Поэтому

$$\int (\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0^*) \cdot \mathcal{H} dS = 0$$

и равенство (3) дает

$$(k - k_0) \int_S (\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) \cdot \mathbf{e}_z dS = -\omega \left[\int_S (\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0^*) dS - \int_S (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0^*) dS - \int_{\Delta S} \Delta \hat{\varepsilon} \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0^* dS \right], \quad (4)$$

где $\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} - \hat{1}$ и ΔS — поперечное сечение области, занятой диэлектриком.

Таким же путем из уравнений для $\text{rot } \mathcal{E}$ и $\text{rot } \mathcal{H}_0^*$ находим

$$(k - k_0) \int_S (\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) \cdot \mathbf{e}_z dS = \omega \left[\int_S (\mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0^*) dS - \int_S (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0^*) dS + \int_{\Delta S} \Delta \hat{\mu} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0^* dS \right], \quad (5)$$

где $\Delta \hat{\mu} = \hat{\mu} - \hat{1}$.

Складывая равенства (4) и (5), получаем формулу, приведенную в условии задачи. Она представляет собой точное соотношение, связывающее изменение Δk постоянной распространения с амплитудами полей. Однако в большинстве случаев точное решение задачи о волноводе, частично заполненном диэлектриком, не может быть получено. Только при достаточно малых поперечных размерах области, занятой диэлектриком, удастся приближенно определить амплитуды возмущенных полей \mathcal{E} и \mathcal{H} . Тогда с помощью полученной формулы для Δk можно подсчитать изменение постоянной распространения, которая является важной характеристикой волны в волноводе. Примеры расчета волноводов таким методом приведены в задачах 526–528.

526. В случае пластинки малой толщины амплитуды возмущенных полей можно приближенно выразить через невозмущенные амплитуды, которые для волны типа H_{10} имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0z} &= \mathcal{H}_0 \cos \frac{\pi x}{a}, & \mathcal{H}_{0x} &= -\frac{ik_0 a}{\pi} \mathcal{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a}, \\ \mathcal{E}_{0y} &= \frac{i\omega a}{\pi c} \mathcal{H}_0 \sin \frac{\pi x}{a}, & \mathcal{E}_{0x} &= \mathcal{E}_{0z} = \mathcal{H}_{0y} = 0. \end{aligned}$$

(Эти выражения могут быть получены из результатов задачи 510.) Пренебрежем изменением амплитуд поля вне объема, занятого пластинкой. Кроме того, пренебрежем изменением полей по толщине пластинки. Это эквивалентно отбрасыванию членов порядка d^2 и выше. На поверхности пластинки должны выполняться граничные условия:

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y}, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_{0z}, \quad \mu_{\perp} \mathcal{H}_x - i\mu_a \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{0x}, \quad \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{0y} = 0,$$

где невозмущенные амплитуды в правых частях берутся при $x = x_1$. Эти равенства определяют амплитуды возмущенного поля в пластинке.

Интеграл, стоящий в числителе выражения для Δk (см. условие предыдущей задачи), равен произведению подинтегральной функции на площадь поперечного сечения пластинки bd , так как поле не зависит от y , а зависимостью от x пренебрегаем.

В интеграл, стоящий в знаменателе, можно подставить невозмущенные значения амплитуд. В результате получим:

$$\Delta k = \frac{d}{k_0 a} \left\{ \left[\frac{(\varepsilon - 1)\omega^2}{c^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_{\perp}}\right) k_0^2 \right] \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} + (\mu_{\parallel} - 1) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x_1}{a} \right\}.$$

Так как μ_{\perp} зависит от величины постоянного подмагничивающего поля H_0 (см. задачу 331), то и Δk будет зависеть от этого поля. Изменение H_0 вызывает изменение фазы волны. Устройства, основанные на этом явлении, широко применяются в радиотехнике для преобразования фазы.

$$527. \Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_{\perp}} \right).$$

528.

$$а) \Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_{\parallel}} \right);$$

$$б) \Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_{\perp}} \right).$$

В случае а) Δk практически не зависит от величины постоянного магнитного поля H_0 , так как $\mu_{\parallel} \approx 1$ (см. задачу 331). Это объясняется тем, что внутри пластины высокочастотное магнитное поле совпадает по направлению с постоянным полем и не поддерживает прецессии намагниченности M . В случае б) высокочастотное магнитное поле внутри пластины перпендикулярно постоянному полю, μ_{\perp} зависит от H_0 , причем эта зависимость носит резонансный характер.

529. Интегрируя уравнения (IX.1) с граничным условием (IX.2), находим

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z), \\ E_y &= A_2 \cos(k_2 y) \sin(k_1 x) \sin(k_3 z), \\ E_z &= A_3 \cos(k_3 z) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y), \end{aligned} \quad (1)$$

где A_i — постоянные,

$$k_1 = n_1 \pi / a, \quad k_2 = n_2 \pi / b, \quad k_3 = n_3 \pi / h, \quad \omega^2 = c^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2),$$

$n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен).

Вектор \mathbf{H} выражается через \mathbf{E} с помощью уравнений Максвелла.

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ приводит к условию поперечности $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$, где вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Отсюда следует, что колебания при заданных $k_x, k_y, k_z \neq 0$ двукратно вырождены, так как вектор \mathbf{A} можно выбрать в плоскости, перпендикулярной \mathbf{k} , двумя независимыми и произвольными способами. Положим для каждого такого \mathbf{k} :

$$\mathbf{A}_{k\sigma} = A \mathbf{e}_{k\sigma}, \quad \sigma = 1, 2,$$

где $\mathbf{e}_{k\sigma}$ — единичный вектор такой, что $\mathbf{e}_{k1} \cdot \mathbf{e}_{k2} = 0$ и $\mathbf{e}_{k\sigma} \cdot \mathbf{k} = 0$, а постоянная $A = \sqrt{\frac{32\pi}{V}}$, причем $V = abh$ — объем резонатора.

Тогда все собственные функции будут взаимно ортогональны и нормированы условием

$$\int \mathbf{E}_{\nu'} \cdot \mathbf{E}_{\nu} dV = 4\pi \delta_{\nu\nu'}.$$

Это соотношение легко проверить, непосредственно интегрируя (1). Индексы ν, ν' введены для обозначения четырех чисел: n_1, n_2, n_3 и σ .

Если одна из проекций \mathbf{k} равна нулю, то вырождение отсутствует, так как в решение (1) входит в этом случае только одна постоянная.

$$530. \Delta N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta \omega.$$

531. Колебания электрического типа:

$$E_z = \mathcal{E}_0 J_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \cos(kz) e^{-i\omega t}, \quad H_z = 0,$$

$$E_r = -\frac{k}{\kappa} \mathcal{E}_0 J'_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \sin(kz) e^{-i\omega t},$$

$$E_\alpha = -\frac{mk}{\kappa^2 r} \mathcal{E}_0 J_m(\kappa r) \cos(m\alpha + \psi_m) \sin(kz) e^{-i\omega t},$$

$$H_r = -\frac{i m \omega}{\kappa^2 c r} \mathcal{E}_0 J_m(\kappa r) \cos(m\alpha + \psi_m) \cos(kz) e^{-i\omega t},$$

$$H_\alpha = \frac{i \omega}{\kappa c} \mathcal{E}_0 J'_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \cos(kz) e^{-i\omega t};$$

$$k = \frac{l\pi}{h}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \kappa_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad \alpha_{mn} -$$

корни уравнения $J_m(\alpha_{mn}) = 0, \omega^2 = c^2(\kappa_{mn}^2 + k^2)$.

Колебания магнитного типа:

$$H_z = \mathcal{H}_0 J_m(\kappa r) \sin(m\alpha + \psi_m) \sin(kz) e^{-i\omega t};$$

$k = l\pi/h, l = 1, 2, \dots$; значение $l = 0$ невозможно; $\kappa_{mn} = \beta_{mn}/a$, где β_{mn} — корень уравнения $J'_m(\beta_{mn}) = 0; \omega^2 = c^2(\kappa_{mn}^2 + k^2)$. Остальные компоненты полей выражаются через H_z с помощью уравнений Максвелла.

При $m \neq 0$ колебания как электрического, так и магнитного типов в общем случае двукратно вырождены, так как каждой собственной частоте соответствуют две собственные функции, например,

$$H_z = \mathcal{H}_0 J_m(\kappa r) \sin m\alpha \sin(kz) e^{-i\omega t}$$

и

$$H_z = \mathcal{H}_0 J_m(\kappa r) \cos m\alpha \sin(kz) e^{-i\omega t}.$$

532. В квазистационарном приближении можно рассматривать указанную систему как колебательный контур, состоящий из конденсатора

емкостью $C = R^2/(4d)$ и катушки индуктивности с самоиндукцией $L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)$. (Вычисление самоиндукции проволочного кольца см. в задаче 272). По формуле Томсона (VII.3)

$$\omega_0 = \frac{c}{R \sqrt{\frac{\pi b}{d} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)}}.$$

Квазистационарное приближение применимо, если $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ много больше размеров системы (т. е. $\lambda \gg R, b$).

$$533. \quad \omega_0 = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{d}{\pi b}}.$$

534. В квазистационарном приближении ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \gg a, b$) считаем, что электрическое поле целиком сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное поле — внутри тороидальной камеры. При таких предположениях резонатор эквивалентен обычному колебательному контуру, состоящему из емкости и индуктивности. Емкость конденсатора $C = \frac{(b-a)^2}{4d}$, самоиндукция тора $L = 4\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2})$ (см. задачу 269).

Собственная частота:

$$\omega_0 = \frac{c}{(b-a)} \sqrt{\frac{d}{\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2})}}.$$

Высшие типы колебаний рассмотренного резонатора не могут быть вычислены в квазистационарном приближении, так как для них не выполняется условие $\lambda \gg a, b$.

$$535. \quad \omega_0 = \frac{2c}{2b-a} \sqrt{\frac{d}{2\pi h \ln \frac{2b+a}{2b-a}}}.$$

536. В коаксиальном волноводе, закороченном с одной стороны (при $z = 0$) идеально проводящей перегородкой, устанавливается стоячая поперечная волна с напряженностями поля:

$$E_r = \frac{A}{r} \sin \frac{\omega z}{c} e^{-i\omega t}, \quad H_\alpha = -\frac{iA}{r} \cos \frac{\omega z}{c} e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

В любой плоскости, перпендикулярной оси волновода, распределение электрического поля такое же, как в цилиндрическом конденсаторе, и можно

считать, что оно создается разностью потенциалов

$$\Delta\varphi = A \ln \frac{b}{a} \sin \frac{\omega z}{c} \quad (2)$$

между центральным стержнем и оболочкой.

Эту разность потенциалов следует приравнять напряжению на обкладках конденсатора, образованного торцом стержня и верхней крышкой резонатора:

$$\Delta\varphi|_{z=h} = q/C. \quad (3)$$

Здесь $C = a^2/(4d)$ — емкость конденсатора; q — заряд одной из обкладок, который можно выразить через силу тока \mathcal{I} , протекающего по стержню (или равный ему по величине и противоположный по направлению ток в оболочке)

$$\mathcal{I} = -i\omega q.$$

Вычисляя силу тока по известному магнитному полю (1) и подставляя ее, а также разность потенциалов (2) в формулу (3), найдем трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют собственные частоты:

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega h}{c} = \frac{2\pi a^2 \omega}{cd} \ln \frac{b}{a}.$$

Это уравнение легко решается графически. При $\omega h/c \ll 1$ (это означает, что $\lambda \gg 2\pi h$ — квазистационарное приближение) получаем

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\frac{a^2}{4d} \cdot 2h \ln \frac{b}{a}}} = \frac{c}{\sqrt{LC}},$$

где L — коэффициент самоиндукции отрезка коаксиальной линии длиной h . В этом приближении вычисляется только одна — низшая — собственная частота (ср. решения предыдущих задач 532–535).

При $d = 0$ (закороченный с двух сторон отрезок коаксиального волновода) имеем

$$\omega_m = \frac{\pi c}{h} \cdot m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Это означает, что на длине резонатора должно укладываться целое число полуволн: $h = \frac{\lambda_m}{2} m$.

537. Поле в резонаторе описывается уравнениями Максвелла (VIII.1), (VIII.2), причем $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. Умножим первое из них скалярно на \mathbf{H}_ν , а второе — на \mathbf{E}_ν и проинтегрируем по объему резонатора:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_\nu dV &= -c \int \mathbf{H}_\nu \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV, \\ \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\nu dV &= c \int \mathbf{E}_\nu \cdot \text{rot } \mathbf{H} dV. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Считая собственные функции \mathbf{E}_ν , \mathbf{H}_ν ортонормированными в соответствии с условием (IX.3), вычислим интегралы в правых частях равенств (1):

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_\nu dV = 4\pi \dot{p}_\nu, \quad \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_\nu dV = 4\pi \dot{q}_\nu. \quad (2)$$

Собственные функции \mathbf{E}_ν , \mathbf{H}_ν удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_\nu &= ik_\nu \mathbf{H}_\nu, & \text{rot } \mathbf{H}_\nu &= -ik_\nu \mathbf{E}_\nu, \\ \text{rot rot } \mathbf{E}_\nu &= k_\nu^2 \mathbf{E}_\nu, & \text{rot rot } \mathbf{H}_\nu &= k_\nu^2 \mathbf{H}_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $k_\nu (k_1, k_2, k_3)$ — соответствующие собственные числа (они вычислялись в задачах 529, 531). С помощью (3) можно преобразовать интегралы, стоящие в правых частях равенств (1),

$$\text{div}[\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}_\nu] = \text{rot } \mathbf{E}_\nu \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot rot } \mathbf{E}_\nu = ik_\nu \mathbf{H}_\nu \cdot \text{rot } \mathbf{E} - k_\nu^2 \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int \mathbf{H}_\nu \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV &= -ik_\nu \int \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{ik_\nu} \int \text{div}[\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}_\nu] dV = \\ &= -4\pi ik_\nu q_\nu + \oint \mathbf{H}_\nu \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] dS, \end{aligned} \quad (4)$$

где последний интеграл берется по внутренней поверхности резонатора и \mathbf{n} — орт нормали, направленный в глубь проводника. Но поле на стенке резонатора удовлетворяет условию (VIII.10), которое можно записать в виде

$$\zeta \mathbf{H}_\tau = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (5)$$

Собственная функция \mathbf{H}_ν резонатора с идеальной проводимостью имеет на стенке только касательную составляющую, поэтому при подстановке (5) в интеграл (4) можно заменить \mathbf{H}_τ на \mathbf{H} . В итоге, собирая формулы (1)–(5), получим уравнение

$$\dot{p}_\nu - i\omega_\nu q_\nu = -\frac{c\zeta}{4\pi} \oint \mathbf{H}_\nu \cdot \mathbf{H} dS. \quad (6)$$

Второе уравнение выводится аналогичным путем:

$$\dot{q}_\nu - i\omega_\nu p_\nu = 0. \quad (7)$$

Исследуем влияние конечной проводимости стенок на ν -й тип колебаний идеального резонатора. Возмущенное поле \mathbf{H} при $\zeta \rightarrow 0$ должно переходить в невозмущенное поле, т. е. в сумме

$$\mathbf{H} = \sum_{\nu'} p_{\nu'} \mathbf{H}_{\nu'}$$

должен оставаться один член с $\nu' = \nu$. Следовательно, амплитуды $p_{\nu'}$ с $\nu' = \nu$ пропорциональны ζ и их подстановка в (6) дает члены порядка ζ^2 и выше. Пренебрегая такими членами, заменим \mathbf{H} в (6) на $p_\nu \mathbf{H}_\nu$ и получим уравнение вида

$$\dot{p}_\nu - i\omega_\nu q_\nu = -p_\nu \frac{c\zeta}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS. \quad (8)$$

Если исключить одну из переменных (p_ν) с помощью (8), то для другой получится уравнение

$$\ddot{q}_\nu + \omega_\nu^2 q_\nu + \left(\frac{c\zeta}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS \right) \dot{q}_\nu = 0. \quad (9)$$

Величина, стоящая в скобке, комплексна. Поэтому уравнение (9) описывает гармонический осциллятор, на который действует «сила трения» $-\left(\frac{c\zeta'}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS \right) \dot{q}_\nu$, где ζ' — действительная часть поверхностного импеданса.

Решая последнее уравнение, найдем комплексную добавку $\Delta\omega_\nu - i\gamma_\nu$ к собственной частоте идеального резонатора. Потери приводят к затуханию собственных колебаний с декрементом

$$\gamma_\nu = \frac{c\zeta'}{8\pi} \oint H_\nu^2 dS \quad (10)$$

и к сдвигу собственных частот на величину

$$\Delta\omega_\nu = \frac{c\zeta''}{8\pi} \oint H_\nu^2 dS, \quad (11)$$

так что измененная собственная частота $\tilde{\omega}_\nu = \omega_\nu + \Delta\omega_\nu$.

Связь между добротностью резонатора и декрементом затухания дается формулой (IX.4).

538. $Q_\nu = \frac{\omega_\nu a}{4c\zeta'} = \sqrt{\frac{\pi a^2 \sigma \omega_\nu}{2c^2}}$. Система потеряет резонансные свойства

при достаточно высоких частотах, когда расстояние между соседними собственными частотами станет сравнимым с шириной резонансной кривой, определяемой декрементом затухания $\gamma_\nu = \omega_\nu/2Q_\nu$. При высоких частотах, как следует из результатов задачи 530, расстояние между соседними собственными частотами:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta N} = \frac{\pi^2 c^3}{a^3} \frac{1}{\omega^2}.$$

Приравнивая эту величину декременту γ , найдем область частот, для которых система обладает резонансными свойствами:

$$\omega \leq 10^9 \sigma^{1/5} a^{4/5}.$$

При $a \approx 1$ см и $\sigma = 10^{17}$ сек⁻¹ имеем: $\omega \leq 3 \cdot 10^{12}$ сек⁻¹.

539. Производя разложение \mathbf{E} и \mathbf{H} по собственным функциям идеального резонатора, как это сделано в задаче 537, получим для амплитуд p_ν и q_ν систему уравнений:

$$\dot{p}_\nu - i\omega q_\nu + 2i \sum_{\nu'} \Delta\Omega_{\nu'} j_{\nu'} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{q}_\nu - i\omega_\nu p_\nu = -\frac{1}{c} j_\nu e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где $\Delta\Omega_\nu = \Delta\omega - i\gamma_\nu$ — комплексный сдвиг собственных частот;

$$j_\nu = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_\nu dV. \quad (3)$$

Ищем решение уравнений (1), (2) в виде

$$p_\nu = p_\nu^0 e^{-i\omega t}, \quad q_\nu = q_\nu^0 e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

Исключив величины q_ν^0 , получим

$$p_\nu^0 (\omega^2 - 3\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2) = \frac{i\omega_\nu}{c} j_\nu + 2\omega \sum_{\nu'}' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0. \quad (5)$$

Знак «'» у суммы означает, что член с $\nu' = \nu$ отсутствует (он перенесен в левую часть равенства).

Решаем систему (5) методом последовательных приближений. В нулевом приближении отбрасываем сумму (\sum') и получаем

$$p_{\nu}^0 = \frac{i\omega_{\nu}j_{\nu}}{c(\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_{\nu} - \omega_{\nu}^2)}. \quad (6)$$

В следующем приближении получим добавку к (6), равную

$$\frac{2\omega}{\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_{\nu} - \omega_{\nu}^2} \sum' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0.$$

Она мала, если ω близко к ω_{ν} , а все остальные собственные частоты $\omega_{\nu'}$ удовлетворяют условию $|\omega - \omega_{\nu'}| \gg |\Delta\Omega_{\nu'}|$.

Выразим знаменатель (6) через добротность Q_{ν} и измененную собственную частоту $\tilde{\omega}_{\nu} = \omega_{\nu} + \Delta\omega_{\nu}$. Имеем:

$$\omega\Delta\Omega_{\nu} = \omega\Delta\omega_{\nu} - i\omega\gamma_{\nu} \approx \omega_{\nu}\Delta\omega_{\nu} - \frac{i\omega\tilde{\omega}_{\nu}}{2Q_{\nu}},$$

что справедливо вблизи резонанса ($|\omega - \omega_{\nu}| \ll \omega$). Отсюда

$$p_{\nu}^0 \approx \frac{i\omega_{\nu}j_{\nu}}{c\left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{\nu}^2 + \frac{i\omega\tilde{\omega}_{\nu}}{Q_{\nu}}\right)}, \quad q_{\nu}^0 \approx -\frac{i\omega j_{\nu}}{c\left(\omega^2 - \tilde{\omega}_{\nu}^2 + \frac{i\omega\tilde{\omega}_{\nu}}{Q_{\nu}}\right)}. \quad (7)$$

Зависимость амплитуд поля от частоты имеет резонансный характер. при заданном j поле при резонансе тем больше, чем выше добротность резонатора:

$$q_{\nu \text{ рез}}^0 = p_{\nu \text{ рез}}^0 = \frac{j_{\nu}Q_{\nu}}{c\omega_{\nu}}. \quad (8)$$

Из полученных формул следует также, что проводник с током следует помещать в пучность электрического поля E_{ν} и ориентировать вдоль E_{ν} . При этом величины j_{ν} и, следовательно, p_{ν}^0 , q_{ν}^0 будут иметь наибольшее значение.

540. Если волновое поле с энергией W , заполняющее резонатор, отражается от зеркала один раз, то потеря энергии составляет $W(1 - R)$. За время dt теряется энергия

$$dW = -W(1 - R)\frac{c dt}{L},$$

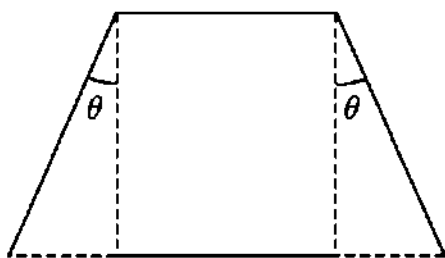


Рис. 92

где $c dt/L$ — число отражений. По определению добротности (IX.4)

$$Q_1 = \frac{\omega W}{-\frac{dW}{dt}} = \frac{\omega L}{c(1-R)},$$

где ω — частота рассматриваемых колебаний.

Излучение через боковую поверхность вызвано тем, что ограниченный в поперечном направлении пучок света не может быть строго направленным. Он обязательно имеет поперечную составляющую волнового вектора Δk_{\perp} , которую можно оценить из условия $\Delta k_{\perp} \cdot D \approx 1$ (см. задачу 424). Это приведет к тому, что лучи света, распространяющиеся от одного зеркала к другому, образуют слегка расходящийся пучок с углом раствора

$$2\theta = \frac{2\Delta k_{\perp}}{k} = \frac{2c}{D\omega}.$$

Часть лучей не попадет на второе зеркало (рис. 92), и потеря энергии при одном отражении составит $WL\theta/D$. За время dt потеря

$$dW = -W \frac{L\theta}{D} \frac{c dt}{L} = -W \frac{c^2}{D^2 \omega} dt.$$

Добротность за счет излучения:

$$Q_2 = \frac{D^2 \omega^2}{c^2}.$$

Если потери в зеркалах и на излучение малы, они складываются. Полная добротность Q определяется по формуле

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}.$$

При указанных в условии задачи значениях параметров:

$$Q_1 \approx 4 \cdot 10^5; \quad Q_2 \approx 4 \cdot 10^8 \gg Q_1; \quad Q \approx Q_1 \approx 4 \cdot 10^5.$$

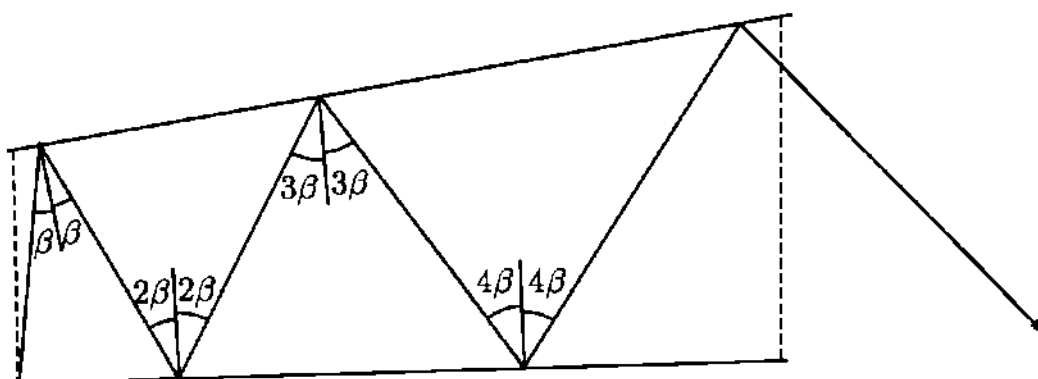


Рис. 93

541. Если первоначально луч распространялся по нормали к плоскости одного из зеркал, то после n -го отражения угол между нормалью и лучом будет равен $n\beta$ (рис. 93). За n -е прохождение между зеркалами луч смещается на расстояние $n\beta L$; число отражений N до выхода луча из резонатора оценивается из соотношения

$$\sum_{n=1}^N n\beta L \approx D.$$

При $N \gg 1$ получим $N = \left(\frac{2D}{\beta L}\right)^{1/2}$, что соответствует времени затухания собственного типа колебаний

$$\tau = N \frac{L}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}.$$

Это время можно отождествить с обратным декрементом затухания γ :

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = c \left(\frac{\beta}{2DL}\right)^{1/2}.$$

Добротность за счет непараллельности зеркал:

$$Q_3 = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega}{2c} \left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}.$$

Чтобы непараллельность зеркал не уменьшила существенно добротности резонатора, требуется выполнение условия $Q_3 \leq Q$, где Q —

добротность резонатора с параллельными зеркалами. Отсюда

$$\beta \leq \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{DL}{Q^2}.$$

Для параметров резонатора, приведенных в условии предыдущей задачи, находим

$$\beta \leq 0,0012.$$

542. а) Угол ϑ принимает дискретные значения, определяемые условием

$$\frac{L}{\cos \vartheta} = \frac{n\lambda}{2}, \quad (1)$$

где $n \gg 1$ — целое положительное число. Если при заданном λ возможно значение $\vartheta = 0$, которое соответствует $n = n_0$ ($L = n_0\lambda/2$), то дискретные значения угла $\vartheta_k \ll 1$ определяется формулой

$$\vartheta_k = \left(\frac{k\lambda}{L} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

б) Добротность Q_1 , учитывающая потери в зеркалах, была найдена в задаче 540. Добротность Q_2 , связанная с потерями на излучение, по порядку величины составляет

$$Q_2 = \frac{\omega D}{c\vartheta} \quad \text{при} \quad \vartheta > \theta, \quad Q_2 = \frac{\omega D}{c\vartheta} = \frac{D^2\omega^2}{c^2} \quad \text{при} \quad \vartheta < \theta, \quad (3)$$

где θ — угол дифракции, определенный в задаче 540.

Если $Q_1 < Q_{2\max}$, то полная добротность Q резонатора для тех типов колебаний, у которых $Q_2(\vartheta) > Q_1$, будет практически одинаковой и близкой к Q_1 . Если $Q_1 > Q_{2\max}$, то Q будет определяться, в основном, величиной Q_2 в соответствии с формулами (3).

ГЛАВА X

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Преобразования Лоренца

$$543. \quad x - x_0 = \frac{x' - x'_0 + V(t' - t'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y - y_0 = y' - y'_0,$$

$$z - z_0 = z' - z'_0, \quad t - t_0 = \frac{t' - t'_0 + \frac{V}{c^2}(x' - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

546. Координаты часов, показывающих равное время $t = t'$ в системах S и S' :

$$x = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) t, \quad x' = -\frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) t.$$

Из этих формул видно, что точка, в которой $t = t'$, движется равномерно в каждой из систем S и S' . Если ввести систему отсчета, относительно которой эта точка неподвижна, то S и S' движутся в противоположные стороны с равными скоростями $V_0 = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$ (V_0 представляет собой релятивистскую «половину» скорости V в том смысле, что релятивистское сложение двух скоростей V_0 даст V).

547. В системе S' продолжительность одного периода $T' = 2l/c$; в системе S время T_1 движения «зайчика» вдоль стержня в направлении относительной скорости V вычисляется из уравнения

$$T_1 = \frac{1}{c} (l\sqrt{1 - V^2/c^2} + VT_1),$$

время движения в обратном направлении T_2 получается заменой V на $-V$. Для отношения T' к $T = T_1 + T_2$ находим

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

откуда следует (X.7).

549. а) Нельзя. 12 час 00 мин могут показывать одновременно двое часов в одной из систем отсчета и только одни часы в другой системе отсчета.

б) Показания пространственно совпадающих часов не зависят от выбора системы отсчета:

$$t_{A'} = 12 \text{ час } 00 \text{ мин} + \frac{l_0}{V} = 13 \text{ час } 00 \text{ мин};$$

$$t_A = 12 \text{ час } 00 \text{ мин} + \frac{l_0}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}.$$

Показания оставшихся часов B и B' будут зависеть от выбора системы отсчета вследствие относительности одновременности.

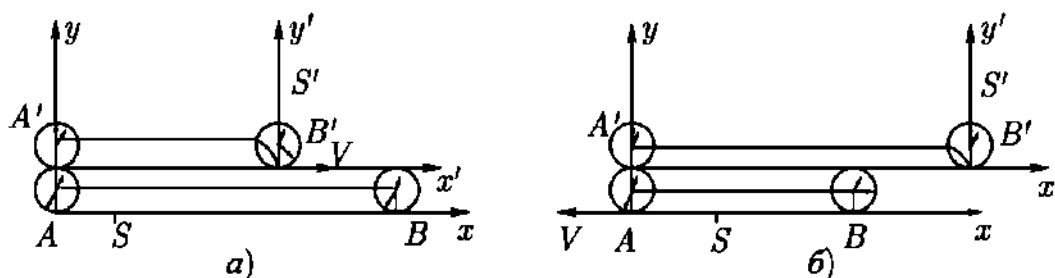


Рис. 94

С точки зрения наблюдателя на «платформе» (рис. 94а):

$$t_{B'} = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин}, \quad t_B = t_A = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}.$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде» (рис. 94б):

$$t_{B'} = t_{A'} = 13 \text{ час } 00 \text{ мин}, \quad t_B = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин}.$$

в) С точки зрения наблюдателя на «платформе»:

$$t_A = 13 \text{ час } 00 \text{ мин} = t_B, \quad t_{B'} = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}, \quad t_{A'} = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин}.$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде»:

$$t_A = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин}, \quad t_{A'} = t_{B'} = 12 \text{ час } 36 \text{ мин}, \quad t_B = 13 \text{ час } 00 \text{ мин}.$$

Во всех случаях отстают те часы, показания которых приходится сравнивать с показаниями двух часов в другой системе отсчета.

550. По земным часам: $\Delta t = 8$ лет. При расчете запасов снаряжения следует брать в основу промежуток времени $\Delta t_0 = 0,01\Delta t \approx \approx 1$ месяц по часам в ракете;

$$T = mc^2(\gamma - 1) \equiv 2,5 \cdot 10^{16} \text{ квт-ч.}$$

Это количество энергии в 10 000 раз превышает годовую выработку электроэнергии во всем мире в настоящее время.

551.
$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}.$$

Для наблюдателя, связанного с первым масштабом (рис. 95а), сначала совпадут левые концы, потом правые; для наблюдателя, связанного со

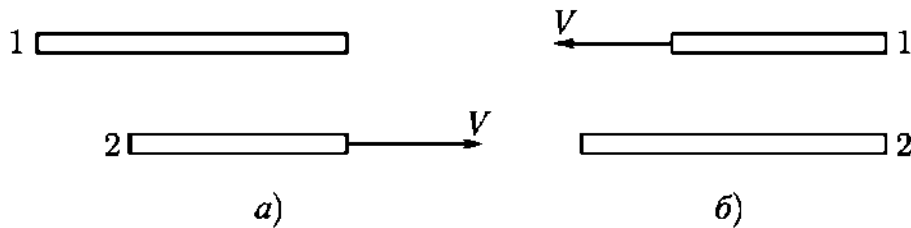


Рис. 95

вторым масштабом (рис. 95б), — наоборот. С точки зрения наблюдателя, относительно которого масштабы движутся с одинаковой по величине скоростью, концы совпадают одновременно.

552. Введем поперечную и продольную компоненты радиуса-вектора \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2}, \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{V^2};$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\parallel}.$$

Применив к \mathbf{r}_{\parallel} и \mathbf{r}_{\perp} преобразования Лоренца (X.1), получим

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V}t'), \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}.$$

Окончательно:

$$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t') + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}}{V^2}, \quad t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right).$$

$$553. \mathbf{A} = \gamma \left(\mathbf{A}' + \frac{\mathbf{V}}{c} A'_0 \right) + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{A}' \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}}{V^2}, \quad A_0 = \gamma \left(A'_0 + \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{V}}{c} \right).$$

$$554. \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{V} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V}}{V^2} [(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}) + V^2]}{\gamma \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right)}, \quad \text{где } \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{v}' -$$

скорости в системах S и S' . Можно также просто продифференцировать по времени радиус-вектор \mathbf{r} , выраженный через \mathbf{r}' и t' по формуле, полученной в задаче 552.

558. Угол томасовской прецессии определяется соотношением

$$\varphi = -\arccos \frac{v^2 \sqrt{1 - V^2/c^2} + V^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{V^2 + v^2 - V^2 v^2/c^2}.$$

При $v, V \ll c$ угол $\varphi \approx 0$.

При $v \rightarrow c$ угол $\varphi \rightarrow -\arccos \sqrt{1 - V^2/c^2}$; если при этом и $V \rightarrow c$, то $\varphi \rightarrow \pi/2$.

$$559. l = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}.$$

$$560. \text{ а) } V = 2 \cdot 0,9c = 1,8c; \quad \text{ б) } V = 0,994c.$$

561. Относительная скорость двух частиц в системе, связанной с одной из них: $V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = mc^2 \left[2 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 - 1 \right].$$

В ультрарелятивистском случае $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ и, следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{mc^2}.$$

Если ускорению подвергаются электроны ($mc^2 = 0,5 \text{ Мэв}$), то, например, при $\mathcal{E}_0 = 50 \text{ Мэв}$ получается выигрыш мощности ускорителя в 200 раз: $\mathcal{E} = 10\,000 \text{ Мэв}$.

562. Эту задачу, как и задачу 554, можно решить двумя способами. Результат:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\gamma^2 s^2} \dot{\mathbf{v}}' - \frac{(\gamma - 1)(\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{V})\mathbf{v}'}{\gamma^2 s^3 c^2},$$

где

$$s = 1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}.$$

Из этих формул видно, что если в одной системе отсчета частица движется с постоянным ускорением $\dot{\mathbf{v}}'$, то в другой системе отсчета ускорение $\dot{\mathbf{v}}$, вообще говоря, зависит от времени (так как в формулы преобразования входит переменная скорость \mathbf{v}' частицы).

563. $w_i^2 = -\gamma^6 \left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v})^2}{c^2} \right] = -\gamma^4 \left[\dot{\mathbf{v}}^2 + \gamma^2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right] < 0$, т. е. четырехмерное ускорение — пространственноподобный вектор.

564. Пусть S' — мгновенно сопутствующая частице система. Согласно ответу к задаче 562,

$$\dot{\mathbf{v}}' = \gamma^2 \left[\dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right]. \quad (1)$$

Отсюда квадрат ускорения

$$\dot{\mathbf{v}}'^2 = \gamma^4 \left[\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{\gamma^2 (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2} \right] = \gamma^6 \left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \left(\dot{\mathbf{v}} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Если скорость частицы меняется только по величине, то $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$ и

$$\dot{\mathbf{v}}' = \gamma^3 \dot{\mathbf{v}}. \quad (3)$$

Если скорость частицы меняется только по направлению, то $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$, так что

$$\dot{\mathbf{v}}' = \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}. \quad (4)$$

Результат (2) можно получить и другим, более простым способом, воспользовавшись выражением квадрата четырехмерного ускорения, найденным в предыдущей задаче. Квадрат ω_i^2 является 4-инвариантом. Это значит, что вычисление ω_i^2 как в системе S , так и в системе S' должно дать один и тот же результат. Замечая, что скорость частицы $\mathbf{v}' = 0$, получим формулу (2).

$$565. \quad v(t) = \frac{wt + v_0(1 - \beta_0^2)^{-1/2}}{\sqrt{1 + c^{-2}(wt + v_0(1 - \beta_0^2)^{-1/2})^2}},$$

$$x(t) = \frac{c^2}{w} \left\{ \sqrt{1 + c^{-2}(wt + v_0(1 - \beta_0^2)^{-1/2})^2} - (1 - \beta_0^2)^{-1/2} \right\} + x_0.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$v(t) \approx c, \quad x(t) \approx ct + x_0 + \frac{cv_0}{w\sqrt{1 - \beta_0^2}}.$$

В нерелятивистском пределе:

$$v(t) = v_0 + \omega t, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\omega t^2.$$

566. Время разгона по часам в неподвижной системе:

$$T = \frac{1}{|\dot{v}|} \int_0^v \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{v}{|\dot{v}|\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 47,5 \text{ лет.}$$

Время разгона по часам в системе, связанной с ракетой,

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|} \ln \left| \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right| = 2,5 \text{ года.}$$

567. Формулы (1) описывают преобразование Лоренца с малой относительной скоростью Δv и поворот на угол $\Delta\varphi = |\Delta\varphi|$, причем ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору $\Delta\varphi$. Эти преобразования вследствие малости Δv и $\Delta\varphi$ могут производиться в любой последовательности. Таким образом, мгновенно сопутствующая система является вращающейся. Это вращение представляет собой чисто кинематический релятивистский эффект и называется прецессией Томаса (см. задачу 558).

При $v \ll c$ формулы (2) принимают вид

$$\Delta v \approx \delta v, \quad \Delta\varphi \approx \frac{1}{2c^2} \delta v \times v.$$

В этом пределе величину

$$\omega_T = \frac{\delta\varphi}{\delta t} \frac{1}{2c^2} \dot{v} \times v.$$

можно рассматривать как угловую скорость томасовской прецессии мгновенно сопутствующей системы относительно лабораторной системы S .

568. В системе S : $\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$. В системе S' :

$$\cos \alpha' = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{V})}{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{V})^2} \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{V})^2}}.$$

569. Угол в системе S' стремится к нулю. Для того чтобы убедиться в этом, положим $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 c$, где $|\mathbf{V}_0| = 1$. Вычислим $\cos \alpha'$ по формуле, полученной в предыдущей задаче. Воспользовавшись формулой

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}),$$

получим

$$\cos \alpha' = \frac{c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V})}{\sqrt{\left(c - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V}}{c}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(c - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V}}{c}\right)^2}} = 1,$$

откуда $\alpha' = 0$. Это сужение углового распределения является характерным релятивистским эффектом, проявляющимся во многих явлениях.

570. Определение угла aberrации сводится к вычислению двух углов (рис. 96): угла α_1 между направлением луча AC и направлением скорости \mathbf{v} Земли в первом ее положении и угла α_2 между направлением BC луча и направлением скорости \mathbf{v}' Земли во втором ее положении (через полгода). Угол aberrации δ можно определить как $\delta = (\pi - \alpha_2) - \alpha_1 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$. Углы α_1 и α_2 вычислим по формулам (X.15), выразив их через угол ϑ , который наблюдается в системе отсчета, связанной с Солнцем, между лучом OC света и вектором скорости Земли:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \beta}, \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \beta},$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}} = \beta \gamma \sin \vartheta.$$

Заметим, что все три угла между скоростями, изображенные на рис. 96, относятся к разным системам отсчета и что сам рисунок условен (например, изображенные на нем отрезки $AC = CO = CB = c$).

Из полученных результатов видно, в частности, что угол абберации δ зависит только от относительной скорости v Земли и Солнца и не зависит от скорости Солнечной системы относительно звезды.

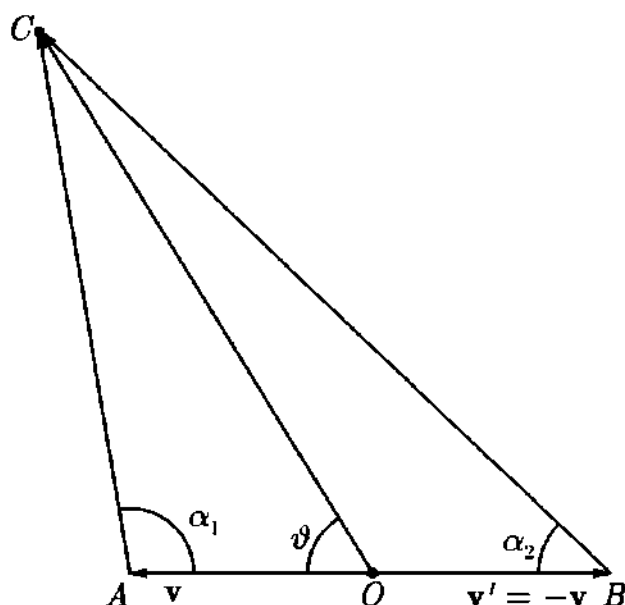


Рис. 96

571. Если положение Земли на орбите определяется азимутальным углом φ , и $\mathbf{a} = (0, a_\vartheta, a_\alpha)$ — вектор, проведенный из точки (ϑ, α) небесной сферы в точку видимого положения звезды на небесной сфере, то

$$a_\vartheta = -\beta \cos \vartheta \cdot \sin(\alpha - \varphi),$$

$$a_\alpha = -\beta \cos(\alpha - \varphi).$$

Отсюда видно, что видимое положение звезды на небосводе в течение года описывает эллипс с полуосями $\beta \cos \vartheta$ и β .

572. Рассмотрим в системе S пучок внутри телесного угла $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$. В системе S' этот пучок будет наблюдаться внутри угла $d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha'$. Угол $\alpha = \alpha'$, а $\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta}$. Отсюда

$$d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} d\Omega.$$

При этом, разумеется, $\int d\Omega' = \int d\Omega = 4\pi$.

573. $\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \vartheta')^2}$, где N_0 — полное число видимых звезд.

574. $\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{V}}{c}\right)$ или $\omega = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}}{c}\right)}$, $\mathbf{k} = \gamma \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{V} \omega'}{c^2}\right) + (\gamma - 1)(\mathbf{k}' \times \mathbf{V}) \times \frac{\mathbf{V}}{V^2}$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$, $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{k}'}{k'}$, $k = \frac{\omega}{c}$.

575. Если ω_0 — частота в той системе, где источник покоится и V — скорость источника относительно приемника света, то приемник зарегистрирует меньшую частоту $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ (красное смещение).

Угол α луча с направлением движения источника в системе его покоя определяется формулой:

$$\cos \alpha = -\frac{V}{c}.$$

Угол α близок к 90° только при $V \ll c$. Если $V \rightarrow c$, то $\alpha \rightarrow \pi$.

576. а) $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$; б) $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}$.

577. $\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$, $J = J_0 \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta \cos \theta)^2}$.

Частоты совпадают, $\omega = \omega_0$ при $\theta = \theta_0$, где $\cos \theta_0 = (1 - \sqrt{1 - \beta^2})/\beta$; при этом $J = J_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Интенсивности сравниваются, $J = J_0$ при $\theta = \theta_1 < \theta_0$, $\cos \theta_1 = [1 - (1 - \beta^2)^{3/4}]/\beta$. Когда источник света находится далеко от наблюдателя, приближаясь к нему, так что $\theta < \theta_0$, частота $\omega > \omega_0$ из-за эффекта Доплера («фиолетовое» смещение). Если к тому же $\theta < \theta_1$, то интенсивность J также превышает J_0 — движущийся источник выглядит более ярким, чем неподвижный. Интенсивность максимальна при $\theta = 0$ и составляет $J_{\max} = J_0(1 + \beta)^{3/2}/\sqrt{1 - \beta}$. При $\theta > \theta_0$ частота $\omega < \omega_0$, и наблюдатель видит «красное» смещение; интенсивность света теперь меньше, чем у неподвижного источника. Эти эффекты особенно заметны при $V \approx c$, когда

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \gg \omega \quad \text{и} \quad J_{\max} = J_0 \frac{(1 + \beta)^{3/2}}{(1 - \beta)^{1/2}} \gg J_0,$$

а угол

$$\theta_0 \approx \sqrt{2}(1 - \beta)^{1/4} \ll 1,$$

так что покраснение света начинается, когда источник находится еще далеко от наблюдателя, приближаясь к нему. Это происходит, начиная с расстояний $l \approx d/\theta_0$.

Число фотонов, излучаемых в единицу лабораторного времени в интервале углов $0 < \theta < \theta_0$, есть

$$N_1 = J_0(1 - \beta^2) \int_0^{\theta_0} \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{1 + \beta - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \\ = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} (1 + \cos \theta_0),$$

а в интервале $\theta_0 < \theta < \pi$

$$N_2 = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta}{\beta} = 2\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2} (1 - \cos \theta_0).$$

Очевидно, что $N_1 + N_2 = 4\pi J_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ соответствует полному числу фотонов, излучаемому в единицу времени по всем направлениям. N_1 и N_2 равны между собой при $\beta \ll 1$, когда $\cos \theta_0 \approx 0$. Если же β приближается к единице, то N_1 делается много больше, чем N_2 . Таким образом в этом ультрарелятивистском случае подавляющая часть света излучается в узком конусе $\theta < \theta_0$, испытывая при этом фиолетовое смещение.

578. Используя решение предыдущей задачи, получим

$$I = J\hbar\omega = I_0 \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3},$$

где $I_0 = J_0\hbar\omega_0$ — изотропно распределенная сила света в системе покоя источника. Полный световой поток

$$\Phi = \int_{(4\pi)} I d\Omega = 2\pi I_0 (1 - \beta^2)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^3} = 4\pi I_0 = \Phi_0$$

одинаков в системе покоя источника и в лабораторной системе (сравнить с результатом задачи 767).

579. Введем систему S' , связанную с зеркалом (S — лабораторная система). Обозначим через α'_1 и α'_2 углы, образуемые волновыми векторами \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 падающей и отраженной волн с направлением скорости \mathbf{V}

зеркала (рис. 97). Частоту до и после отражения будем обозначать ω'_1 и ω'_2 соответственно. Аналогичные величины в системе S будем обозначать теми же буквами без штрихов. Будем исходить из известных законов отражения в системе S' : $\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'$ и $\alpha'_2 = \pi - \alpha'_1$, откуда $\cos \alpha'_2 = -\cos \alpha'_1$.

Выражая ω' через ω , $\cos \alpha'$ через $\cos \alpha$ с помощью формул (X.4) и (X.14) и решая получившиеся уравнения относительно ω_2 и $\cos \alpha_2$, найдем:

$$\cos \alpha_2 = -\frac{(1 + \beta^2) \cos \alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Если $\beta \rightarrow 1$, то при нормальном падении на удаляющееся зеркало $\omega_2 \rightarrow 0$, а при нормальном падении на приближающееся зеркало $\omega_2 \rightarrow \infty$.

580. $\omega_1 = \omega_2$.

Угол падения равен углу отражения.

581. Изображение создается квантами света, одновременно достигающими фотопластинки. Но эти кванты испускаются точками движущегося тела, вообще говоря, неодновременно. Это происходит как вследствие неодинаковости расстояний различных точек тела до фотопластинки, так и из-за того, что события, одновременные в одной системе отсчета, неодновременны в другой. Поэтому изображение движущегося предмета будет не таким, как изображение неподвижного предмета.

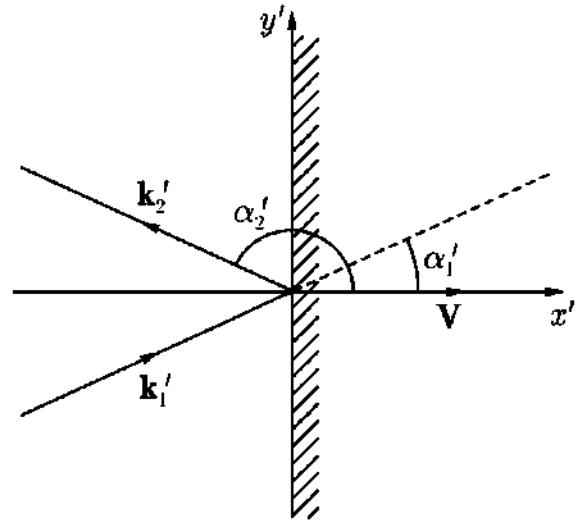


Рис. 97

Кванты, испущенные разными точками ребра $A'B'$ одновременно в системе S' (куба), достигнут фотопластинки одновременно. Длина изображения AB будет такой же, как и в случае неподвижного куба, и будет определяться только тем сокращением, которое обусловлено расстоянием до предмета и фокусным расстоянием фотоаппарата. Примем эту длину за 1.

У неподвижного куба изображение ребра $E'F'$ было бы слито с изображением $A'B'$ (в предельном случае сколь угодно малого телесного угла, когда все лучи параллельны). В случае движущегося куба кванты от ребра $E'F'$ достигнут фотопластинки одновременно с квантами от ребра $A'B'$,

если первые будут испущены раньше на время $\Delta t = l_0/c$ (в системе S). В это время ребро $E'F'$ занимало положение $E'_1F'_1$ и до испускания света ребром $A'B'$ проделало путь, равный Vl_0/c . Следовательно, теперь ребро $E'F'$ не будет загорожено ребром AB , изображения ребер $A'E'$ и $B'F'$ будут иметь длину $V/c = \beta$, а не нуль, как у неподвижного куба, и вся грань $A'B'F'E'$ сфотографируется в виде прямоугольника $ABFE$ (рис. 98а) с соотношением сторон $1 : \beta$.

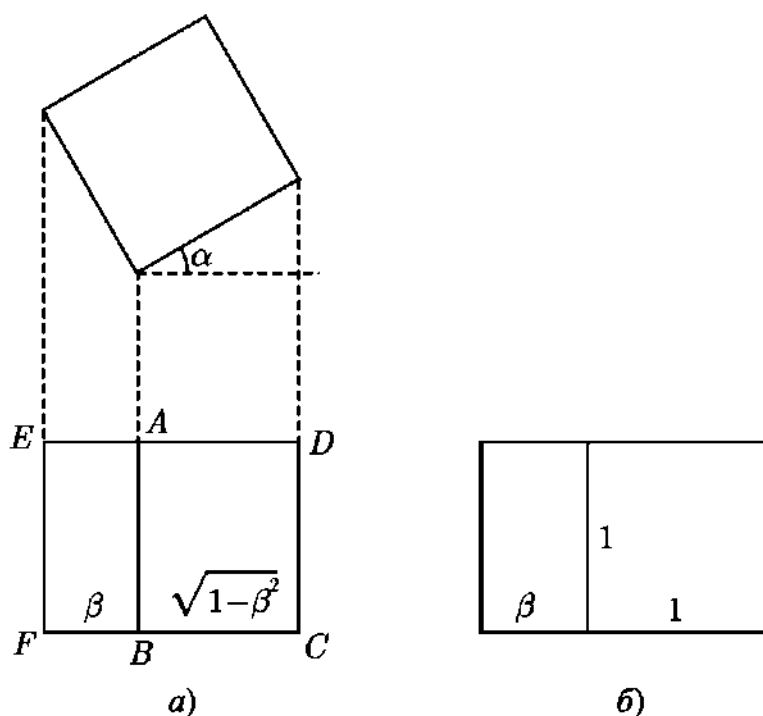


Рис. 98

Кванты, создающие изображения ребер $A'B'$ и $C'D'$, испускаются кубом одновременно в системе S . В системе S' , как следует из преобразований Лоренца (X.1), кванты с ребра $C'D'$ должны быть испущены раньше, чем с ребра $A'B'$, на время $\Delta t' = \frac{1}{c^2} \gamma V l$, где l — длина ребер $B'C'$ и $A'D'$ в системе S . Можно считать, что в системе S' в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x' = l_0$, произошли два события, одно на $\Delta t'$ позже другого. Расстояние между ними в системе S определяется с помощью (X.1):

$$l \equiv \Delta x = \gamma(\Delta x' - V \Delta t'),$$

откуда, подставляя $\Delta x'$ и $\Delta t'$, находим $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ — длину ребер BC и AD в системе S . Они испытали обычное лоренцево сокращение. Их

изображения (с учетом сокращения в фотоаппарате) будут иметь длины $\sqrt{1 - \beta^2}$.

Чертеж изображения куба приведен на рис. 98а. Любопытно отметить, что такое же изображение даст неподвижный куб, повернутый относительно V на угол $\alpha = \arcsin(V/c)$. Видимая форма предмета в данном случае не испытывает деформации из-за лоренцева сокращения — предмет только «повернулся» на угол α . Этот результат, как оказывается (см. [24], а также следующие задачи), имеет место для любого предмета и любого угла между скоростью и направлением наблюдения. Нужно только, чтобы предмет был виден под малым под малым телесным углом.

Если бы были справедливы преобразования Галилея, то ребра $A'D'$ и $B'C'$ не испытали бы лоренцева сокращения, и изображение приняло бы вид, показанный на рис. 98б. Задняя (по отношению к направлению движения) грань куба по-прежнему была бы сфотографирована. Таким образом, видимая форма движущегося предмета подверглась бы искажению.

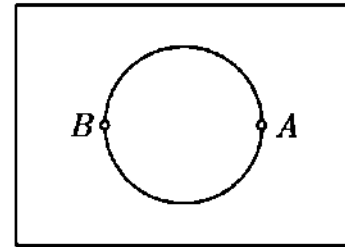
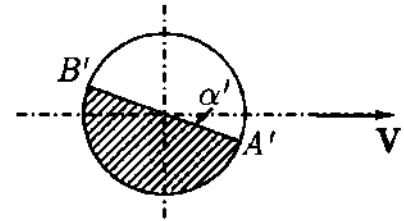


Рис. 99

582. а) $l = l_0 |\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha' - \beta \sin \alpha'|$, $\beta = V/c$. Значение α'_{\max} , при котором функция $|\sqrt{1 - \beta^2} \cos \alpha' - \beta \sin \alpha'|$ имеет максимум, определяется условием $\text{tg } \alpha'_{\max} = -\beta / \sqrt{1 - \beta^2}$. При этом $l = l_0$: таким образом, наибольшая длина l равна l_0 . Изображение в этом случае эквивалентно изображению неподвижного стержня, ориентированного параллельно фотопластинке. Стержень «повернулся» на угол $\pi - \alpha'_{\max}$.

а) $\alpha' = \text{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right)$; в этом случае изображение получится таким, как если бы стержень был неподвижен и ориентирован перпендикулярно фотопластинке.

б) Если два наблюдателя, неподвижных в системе S , одновременно сделают зарубки на плоскости xy в точках M и N , мимо которых в данный момент проходят концы стержня, то полученный ими отрезок MN будет составлять с осью x угол

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{\text{tg } \alpha'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

583. Изображение будет иметь форму круга. Сфотографируется полусфера, заштрихованная на рис. 99. Она ограничена плоскостью $A'B'$, составляющей угол

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

с направлением V (в системе шара). Вопреки естественному интуитивному представлению, движущийся шар не воспринимается наблюдателем как эллипсоид, сплюснутый в направлении движения. Лоренцево сокращение оказывается невидимым! Но это, разумеется, не означает, что оно отсутствует.

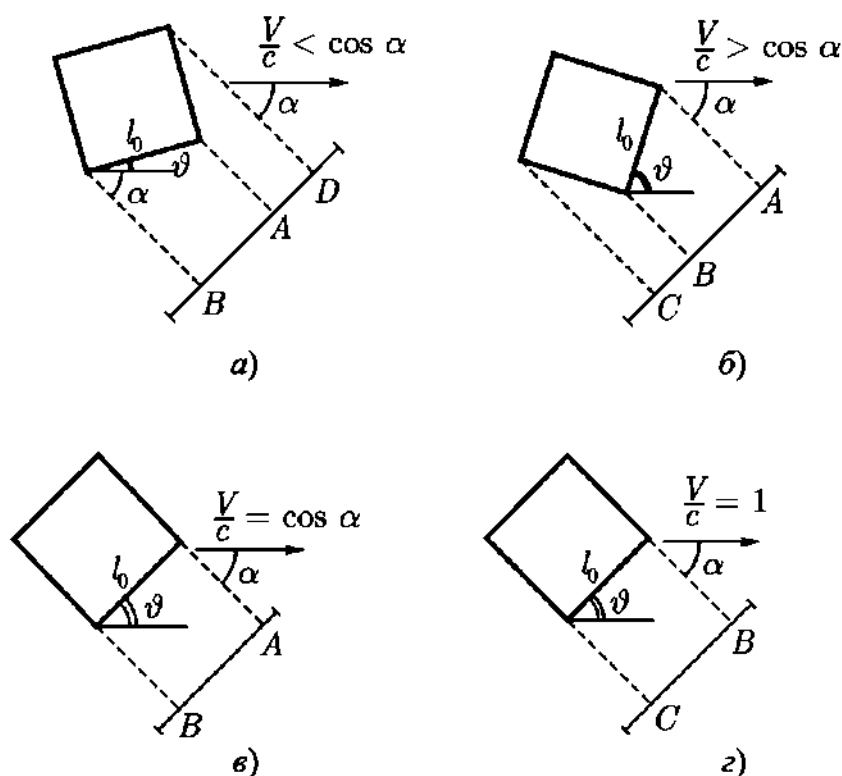


Рис. 100

584. Видимые положения куба изображены схематически на рис. 100. При $V/c < \cos \alpha$ видна передняя грань $A'D'$ и нижняя грань $A'B'$. Если в оптической системе фотоаппарата не происходит сокращения размеров предмета, то

$$AB = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad AD = l_0 \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

С помощью этих формул находим угол ϑ поворота куба:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta, \quad \text{где} \quad \text{tg } \theta = \frac{\cos \alpha - \beta}{\sin \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

При $V/c = \cos \alpha$ имеем $\vartheta = \pi/2 - \alpha$ и видна только нижняя грань $A'B'$.
При $V/c > \cos \alpha$ видны нижняя и задняя грани,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \text{arctg} \frac{\beta - \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha}.$$

Наконец, при $V/c \rightarrow 1$ видна только задняя грань, нижняя грань испытала лоренцево сокращение до нуля, $\vartheta = \pi - \alpha$.

585. Пусть в системе отсчета S' , связанной со средой, распространяется плоская волна с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}'(k' \cos \alpha', k' \sin \alpha', 0)$, $\mathbf{k}' \perp Oz$. Фазовая скорость волны $v' = \frac{c}{n} = \frac{\omega'}{k'}$ в системе S' не зависит от угла α' , определяющего направление распространения волны. Компоненты поля пропорциональны $e^{-ik'_i x'_i}$, где $k'_i = (\frac{\omega'}{c}, \mathbf{k}')$. Так как фаза $k_i x_i = k'_i x'_i$ — инвариант относительно преобразования Лоренца, то k_i представляет собой 4-вектор (волновой 4-вектор). Используя (X.4) и (X.14), мы можем найти компоненты k_i в системе отсчета S , относительно которой среда движется со скоростью $\mathbf{V} \parallel Ox$, откуда

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta n \cos \alpha'), \tag{1}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha'}{\gamma (\cos \alpha' + \beta/n)}, \tag{2}$$

$$v = c \frac{1 + \beta n \cos \alpha'}{\sqrt{n^2 + 2\beta n \cos \alpha' + \beta^2 (1 - n^2 \sin^2 \alpha')}}}, \tag{3}$$

где $\beta = V/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Из (3) видно, что фазовая скорость в движущейся среде зависит от направления распространения. Возникает своеобразная анизотропия, связанная с движением среды.

586. Искомую скорость можно найти по формуле (3) предыдущей задачи ($\alpha' = 0$):

$$v = c \frac{1 + \beta n(\lambda')}{n(\lambda') + \beta} \approx \frac{c}{n(\lambda')} + V \left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda')} \right).$$

Здесь $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, ω' — частота, наблюдаемая в системе S' , относительно которой среда покоится. По формуле (1) предыдущей задачи находим с точностью до членов первого порядка по V/c :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{nV}{c},$$

откуда

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \lambda \frac{nV}{c}$$

и окончательно

$$v = \frac{c}{n(\lambda)} + V \left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right).$$

§ 2. Четырехмерные векторы и тензоры

590. На трехмерный тензор II ранга $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), два трехмерных вектора $A_{0\alpha}$ и $A_{\alpha 0}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), трехмерный скаляр A_{00} .

591. Антисимметричный 4-тензор A_{ik} может быть представлен в виде:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 0 & A_3 & -A_2 \\ B_2 & -A_3 & 0 & A_1 \\ B_3 & A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ — трехмерные векторы (точнее, \mathbf{B} — полярный, а \mathbf{A} — аксиальный вектор).

595. Инвариантная величина

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3$$

имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета; поскольку dx_i ($i = 0, 1, 2, 3$) — компоненты 4-вектора, то совокупность величин

$$\nabla_i \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \right)$$

также является 4-вектором. Таким образом, оператор четырехмерного градиента, определенный в виде

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right),$$

где ∇ — оператор трехмерного градиента, преобразуется как 4-вектор.

596. $T_{ik} = \nabla_k A_i,$

$$\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Четырехмерная дивергенция

$$\nabla_i A_i = \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \text{inv.}$$

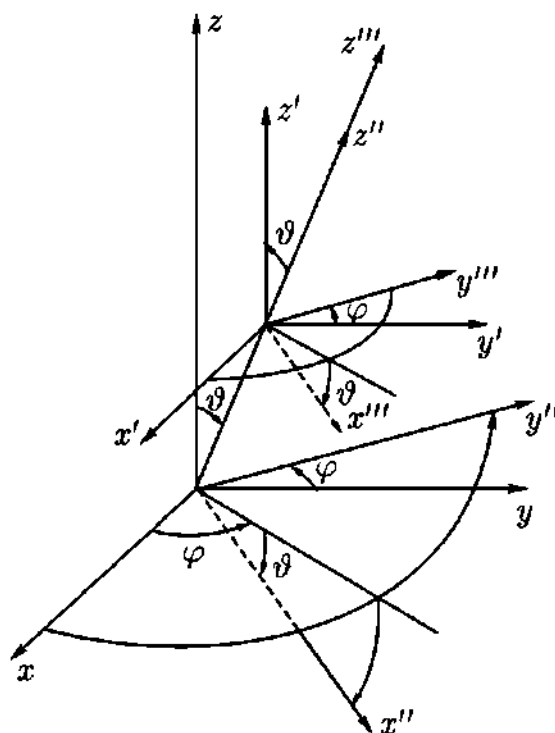


Рис. 101

597. а) скаляр; б) 4-вектор.

598. Перепишем условие параллельности векторов A_i и B_i в виде (умножив числитель и знаменатель каждой из дробей на одно и то же число):

$$\frac{\alpha_{0i} A_0}{\alpha_{0i} B_0} = \frac{-\alpha_{1i} A_1}{-\alpha_{1i} B_1} = \frac{-\alpha_{2i} A_2}{-\alpha_{2i} B_2} = \frac{-\alpha_{3i} A_3}{-\alpha_{3i} B_3}.$$

Воспользовавшись теперь известным свойством равных отношений, получим:

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{\alpha_{0i} A_0 - \alpha_{1i} A_1 - \alpha_{2i} A_2 - \alpha_{3i} A_3}{\alpha_{0i} B_0 - \alpha_{1i} B_1 - \alpha_{2i} B_2 - \alpha_{3i} B_3} = \frac{A'_i}{B'_i}.$$

599. Существенно различны четыре компоненты. Они совпадают с точностью до знака с компонентами вектора $A_i = \frac{1}{6} e_{iklm} A_{klm}$, откуда $A_0 = A_{123} = A_{231} = \dots$, $A_1 = -A_{230} = A_{320} = \dots$, $A_2 = -A_{310} = A_{130} = \dots$, $A_3 = -A_{120} = A_{210} = \dots$. Остальные компоненты A_{ikl} равны нулю (у них имеются совпадающие индексы). Отсюда следует, что не равные нулю компоненты A_{ikl} преобразуются при четырехмерных поворотах и отражениях как компоненты четырехмерного псевдовектора.

601. Если $x_i = \alpha_{ik}x'_k$, то матрица $\hat{\alpha}$ имеет вид (координату x_0 пишем на четвертом месте):

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & -\text{sh } \alpha & 0 & 0 \\ \text{sh } \alpha & -\text{ch } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

602. Искомую матрицу \hat{g} можно представить в виде произведения трех матриц:

$$\hat{g} = \hat{g}(\vartheta, \varphi) \hat{g}(\alpha) \hat{g}^{-1}(\vartheta, \varphi).$$

Матрица

$$\hat{g}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \vartheta \cos \varphi & \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 & -\cos \vartheta \sin \varphi & -\cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & \sin \vartheta & 0 & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

описывает пространственный поворот системы отсчета (рис. 101):

$$x_i = g_{ik}(\vartheta, \varphi)x''_k.$$

Матрица

$$\hat{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & 0 & 0 & -\text{sh } \alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \text{sh } \alpha & 0 & 0 & -\text{ch } \alpha \end{pmatrix}$$

соответствует переходу к системе отсчета S'' от системы S''' , движущейся вдоль оси x''_3 со скоростью $V/c = \text{th } \alpha$ (т.е. описывает преобразование Лоренца для координат x_0, x_3). Наконец, матрица $g^{-1}(\vartheta, \varphi)$ описывает поворот, в результате которого система отсчета S' переходит в S''' (см. рис. 101). $g^{-1}(\vartheta, \varphi)$ совпадает с матрицей, транспонированной к $\hat{g}(\vartheta, \varphi)$. Перемножив матрицы, найдем:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & -\omega_1 \text{sh } \alpha & -\omega_2 \text{sh } \alpha & -\omega_3 \text{sh } \alpha \\ \omega_1 \text{sh } \alpha & \omega_1^2(1 - \text{ch } \alpha) - 1 & \omega_1 \omega_2(1 - \text{ch } \alpha) & \omega_1 \omega_3(1 - \text{ch } \alpha) \\ \omega_2 \text{sh } \alpha & \omega_1 \omega_2(1 - \text{ch } \alpha) - 1 & \omega_2^2(1 - \text{ch } \alpha) - 1 & \omega_2 \omega_3(1 - \text{ch } \alpha) \\ \omega_3 \text{sh } \alpha & \omega_1 \omega_3(1 - \text{ch } \alpha) & \omega_2 \omega_3(1 - \text{ch } \alpha) - 1 & \omega_3^2(1 - \text{ch } \alpha) - 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \omega_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \omega_3 = \cos \vartheta.$$

§ 3. Релятивистская электродинамика

603. В вакууме:

$$\mathbf{E} = \gamma \left(\mathbf{E}' - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H}' \right) - (\gamma - 1) \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}')}{V^2},$$

$$\mathbf{H} = \gamma \left(\mathbf{H}' + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}' \right) - (\gamma - 1) \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}')}{V^2}.$$

В средах:

$$\mathbf{P} = \gamma \left(\mathbf{P}' + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{M}' \right) - (\gamma - 1) \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}')}{V^2},$$

$$\mathbf{M} = \gamma \left(\mathbf{M}' - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{P}' \right) - (\gamma - 1) \mathbf{V} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{M}')}{V^2}.$$

Формулы преобразования для пар векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{D} , \mathbf{H} аналогичны формулам преобразования пары \mathbf{E} , \mathbf{H} в вакууме.

604. Задача имеет бесчисленное множество решений. Если найдена система S' (движущаяся со скоростью \mathbf{V}), в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$, то в любой системе отсчета, движущейся относительно S' вдоль этого общего направления, \mathbf{E} и \mathbf{H} будут параллельны, как это следует из (X.25). Будем искать в связи с этим только ту систему отсчета S' , которая движется перпендикулярно плоскости \mathbf{E} , \mathbf{H} . Воспользовавшись условием параллельности векторов \mathbf{E}' и \mathbf{H}' , $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = 0$ и формулами преобразования из задачи 603, найдем:

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}}{2(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2}.$$

С помощью инвариантов поля получим далее

$$E'^2 = \frac{1}{2} [E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}],$$

$$H'^2 = \frac{1}{2} [H^2 - E^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2}].$$

605. Для предварительного исследования удобно воспользоваться инвариантами поля. При $E > H$ должна существовать система отсчета, в которой $H' = 0$, $E' = \sqrt{E^2 - H^2}$. При $E < H$ существует система отсчета, в которой $E' = 0$, $H' = \sqrt{H^2 - E^2}$.

В случае $E > H$ имеем:

$$\mathbf{V} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2}, \quad \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{E} \sqrt{E^2 - H^2}.$$

В любой системе S'' , движущейся вдоль \mathbf{E}' с произвольной скоростью, магнитное поле также будет отсутствовать.

В случае $E < H$

$$\mathbf{V} = c \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{E}}{H^2}, \quad \mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H}}{H} \sqrt{H^2 - E^2}.$$

606. При $\kappa < \mathcal{J}/c$ в системе отсчета, движущейся со скоростью $V = c^2 \kappa / \mathcal{J}$ параллельно оси цилиндра в направлении вектора $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, электрическое поле $E' = 0$, а магнитное поле $H' = \frac{2\mathcal{J}}{cr} \sqrt{1 - \frac{c^2 \kappa^2}{\mathcal{J}^2}}$.

При $\kappa > \mathcal{J}/c$ в системе отсчета, движущейся со скоростью $V = \mathcal{J}/\kappa$ параллельно оси цилиндра в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, $H' = 0$ и $E' = \frac{2\kappa}{r} \left(1 - \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \kappa^2}\right)^{1/2}$.

При $\kappa = \mathcal{J}/c$ не существует такой системы отсчета, в которой имелось бы только электрическое или только магнитное поле. Как видно из приведенных формул, при $\kappa \rightarrow \mathcal{J}/c$ скорость такой системы отсчета стремилась бы к c , а величины обоих полей — к нулю.

607. а) В фиксированный момент времени ($dt = 0$) получаем уравнения $d\mathbf{r} \times \mathbf{H} = 0$, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Первое из них показывает, что $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$, т. е. $d\mathbf{r}$ является элементом магнитной силовой линии. Систему (2) можно записать в виде $F_{ik} dx_k = 0$, откуда следует ее релятивистская инвариантность. Здесь F_{ik} — тензор поля, dx_k — приращения координат.

б) Условие совместности системы имеет вид $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$. Оно релятивистски инвариантно и показывает, что релятивистски инвариантные магнитные силовые линии можно ввести только для взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей.

в) Условие интегрируемости системы имеет вид

$$\left[\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{H} = 0,$$

или в ковариантной записи, $F_{ik} \epsilon_{klmn} \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_l} = 0$, и всегда удовлетворяется в силу уравнений Максвелла.

г) Записав уравнения (2) в виде ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$):

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r})}{H^2} + c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2} dt,$$

убеждаемся в справедливости сделанного в условии задачи утверждения г).

608. В трехмерной записи система, приведенная в условии задачи, принимает вид

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{E} - c\mathbf{H} dt = 0, \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

откуда следует, что в любой фиксированный момент времени ($dt = 0$) выполняется условие параллельности $d\mathbf{r} \times \mathbf{E} = 0$ приращения $d\mathbf{r}$ и электрического вектора \mathbf{E} . Уравнения совместны при $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ и интегрируемы при

$$\left[\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{E} = 0.$$

Последнее уравнение накладывает на распределение зарядов и токов условие вида

$$\mathbf{E} \times \mathbf{j} + c\mathbf{H}\rho = 0.$$

Если перечисленные условия не выполняются, то инвариантных силовых линий электрического поля ввести не удастся. Силовые линии движутся поперек своего направления со скоростью $\mathbf{u} = -c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{E^2}$.

$$\mathbf{610.} \quad \varphi = \frac{e}{R^*}, \quad \mathbf{A} = e \frac{\mathbf{V}}{cR^*},$$

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{\gamma^2 R^{*3}} = \frac{e\mathbf{R}(1 - V^2/c^2)}{R^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E},$$

где $R^* = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}$, $(vt, 0, 0)$ — координаты движущегося заряда в момент t , $\mathbf{R}(x - vt, y, z)$ — радиус-вектор от заряда в точку наблюдения в момент t , ϑ — угол между \mathbf{R} и \mathbf{v} .

611. Из формул предыдущей задачи следует, что вдоль линии движения заряда ($\vartheta = 0, \pi$) поле E ослаблено по сравнению с кулоновым $E_{\text{кул}} = e/R^2$ в $1 - V^2/c^2$ раз, а в перпендикулярном направлении ($\vartheta = \pi/2$) поле E усилено в $\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ раз. При $V \sim c$ поле велико только в узком интервале углов $\Delta\vartheta \sim \sqrt{1 - V^2/c^2}$ вблизи экваториальной плоскости.

Условие $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ относится к одним и тем же точкам 4-пространства. Но если в системе покоя заряда какая-то точка A находится на оси x на расстоянии R от заряда, то в лабораторной системе та же точка будет находиться от него на расстоянии $R\sqrt{1-\beta^2}$. Сравнивая значения E_{\parallel} в точке $R\sqrt{1-\beta^2}$ и E'_{\parallel} в точке R , получим

$$E_{\parallel} = \frac{eR\sqrt{1-\beta^2}(1-\beta^2)}{(R\sqrt{1-\beta^2})^3} = \frac{e}{R^2} = E'_{\parallel},$$

как и должно быть.

$$612. \quad \varphi = \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}^*}{\gamma r^{*3}}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi, \quad \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}^*) - \mathbf{p}_0 r^{*2}}{\gamma^3 r^{*5}}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E},$$

где $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$, $\mathbf{r}^* = (x - vt, \frac{1}{\gamma}y, \frac{1}{\gamma}z)$, диполь движется по оси x , находясь в момент времени t в точке с радиусом-вектором $\mathbf{V}t$.

613.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{m} - (\gamma - 1)\mathbf{V} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{p}'}{\gamma V^2},$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{p}' - (\gamma - 1)\mathbf{V} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{m}'}{\gamma V^2},$$

где \mathbf{p}' и \mathbf{m}' — дипольные моменты в системе покоя.

614. Используя формулы преобразования четырехмерной плотности тока, найдем, что стороны 2 и 4 прямоугольника (рис. 102) не заряжены,

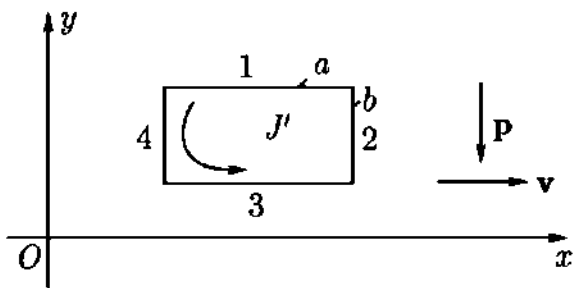


Рис. 102

а стороны 1 и 3 несут заряды $q_1 = -q_3 = -\frac{V}{c} \cdot \frac{\mathcal{I}' a}{c}$, где \mathcal{I}' — ток в системе S' , связанной с петлей. Отсюда (или из результата задачи 613) следует, что электрический дипольный момент петли, наблюдаемый в S' , равен $p = q_3 b = \frac{V}{c} m'$, где $m' = \frac{\mathcal{I}' ab}{c}$ — магнитный момент петли, наблюдаемый в системе S' .

615. Пусть u_i — четырехмерная скорость среды. Составим 4-инвариант (см. формулу (X.37)):

$$f_i u_i = \gamma(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) - \gamma(Q + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) = -\gamma Q = \text{inv.}$$

Если обозначить через Q_0 количество тепла, выделяемого в единице объема среды в единицу времени в той системе, где среда покоится, то $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$.

616. $\omega = \gamma^2 \left(\omega' + \frac{2\beta}{c} S'_x + \beta^2 T'_{xx} \right), S_x = \gamma^2 [(1 + \beta^2) S'_x + V \omega' + V T'_{xx}],$
 $S_y = \gamma (S'_y + V T'_{xy}), S_z = \gamma (S'_z + V T'_{xz}), T_{xx} = \gamma^2 \left(T'_{xx} + \frac{2\beta}{c} S'_x + \beta^2 \omega' \right),$

$$T_{yy} = T'_{yy}, \quad T_{yz} = T'_{yz}, \quad T_{zz} = T'_{zz},$$

$$T_{xy} = \gamma \left(T'_{xy} + \frac{\beta}{c} S'_y \right), \quad T_{xz} = \gamma \left(T'_{xz} + \frac{\beta}{c} S'_z \right).$$

617. $T_{ii} = 0.$

618. Импульс и энергию поля в объеме V в момент $t = \frac{x_0}{ic}$ можно выразить интегралами $\int T_{0\alpha} dS$ и $\int T_{00} dS$ соответственно, где dS — элемент гиперповерхности $x_0 = \text{const}$ (очевидно, $dS = dV$). Аналогичными интегралами выражаются импульс и энер-

гия поля в момент $t' = \frac{x'_0}{ic}$. Введем произвольный вспомогательный постоянный 4-вектор a_i и составим сумму $T_{0i} a_i$. Рассмотрим далее 4-объем Ω , ограниченный цилиндрической гиперповерхностью S , образующая которой параллельна оси x_0 , и двумя гиперплоскостями: $x_0 = \text{const}$ и $x'_0 = \text{const}$ (рис. 103).

Применим 4-теорему Гаусса к интегралу по этой гиперповерхности от функции $T_{0i} a_i$:

$$\oint T_{0i} a_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial T_{0i}}{\partial x_i} a_i d\Omega = 0,$$

так как $\frac{\partial T_{0i}}{\partial x_i} = 0$ при отсутствии зарядов. На цилиндрической гиперповерхности $T_{0i} = 0$, поскольку на границах объема V системы поле отсутствует.

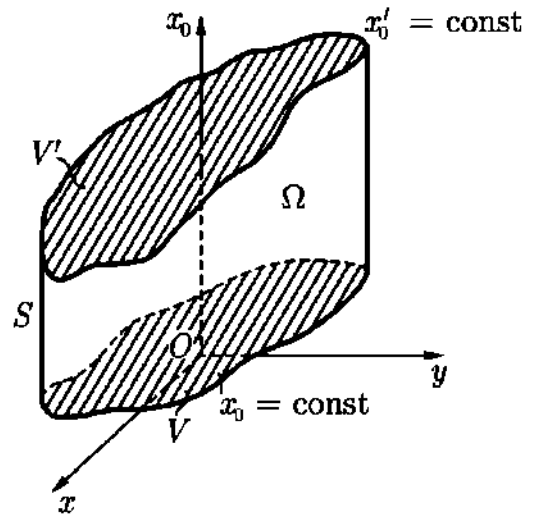


Рис. 103

Тогда (учитывая направление нормали) получим

$$a_i \int T_{0i} dV = a'_i \int T'_{0i} dV'.$$

Другими словами, величина $a_i \int T_{0i} dV$ — инвариант относительно преобразования Лоренца. Но тогда $\int T_{0i} dV$ должен быть 4-вектором (ср. с задачами 597 и 4).

619. Вычислим изменение K_{ik} ¹ за время dt . При этом придется сравнивать значения K_{ik} на двух близких гиперплоскостях $t = \text{const}$ и $t + dt = \text{const}$. Учитывая, что на бесконечности поле отсутствует, можно преобразовать разность интегралов по этим гиперплоскостям в интеграл по замкнутой гиперповерхности S , образуемой дополнением этих гиперплоскостей бесконечно удаленной боковой гиперповерхностью. Полученный интеграл преобразуется по теореме Остроградского — Гаусса

$$\oint_S A_{ikl} dS_l = \int_{\Omega} \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l} d\Omega$$

(Ω — объем внутри замкнутой гиперповерхности S). Преобразуем правую часть последнего выражения:

$$\frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = T_{ki} - T_{ik} + x_i \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} - x_k \frac{\partial T_{il}}{\partial x_l}.$$

Здесь $T_{ik} = T_{ki}$ вследствие симметрии 4-тензора натяжений.

Рассмотрим $\int x_i \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} d\Omega = -\frac{1}{c} \int x_i F_{kl} j_l d\Omega$. Так как мы имеем дело с системой точечных частиц, то

$$\int x_i F_{kl} j_l dV = \sum e x_i F_{kl} \frac{dx_l}{dt};$$

в правой части последнего выражения стоят координаты частиц и их функции в момент t . Согласно уравнениям движения частиц, $\frac{e}{c} F_{kl} \frac{dx_l}{dt} = \frac{dp_k}{dt}$.

Аналогично можно рассмотреть $\int x_k \frac{\partial T_{il}}{\partial x_l} d\Omega$. Таким образом, интеграл по $d\Omega$ обращается в $-\sum \left(x_i \frac{dp_k}{dt} - x_k \frac{dp_i}{dt} \right) dt$ и сокращается с такой же суммой по частицам.

¹ K_{ik} — функционал от пространственноподобной гиперповерхности $t = \text{const}$.

Поэтому

$$\frac{dK_{ik}}{dt} = 0, \quad K_{ik} = \text{const.}$$

620. Полный момент импульса частиц и поля в объеме

$$K_{\alpha\beta}(t) = \sum k_{\alpha\beta} - \frac{i}{c} \int_t (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma}) dS_\gamma,$$

где $k_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ — момент импульса одной из частиц, интеграл берется по той части гиперплоскости $t = \text{const}$, проекция которой на трехмерное пространство равна V . Аналогичным образом записывается $K_{\alpha\beta}(t + dt)$. Рассмотрим момент импульса, теряемый системой за промежуток времени dt :

$$\begin{aligned} -dK_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta}(t) - K_{\alpha\beta}(t + dt) = \\ &= -\sum dk_{\alpha\beta} + \frac{i}{c} \int_{t+dt} \dots - \frac{i}{c} \int_t \dots \end{aligned}$$

Разность интегралов по близким гиперплоскостям можно представить в другом виде, заметив, что $\int_t + \int_{t+dt} + \int_{S_{\text{бок}}} = \oint$ по замкнутой цилиндрической гиперповерхности (см. рис. 104)¹, образующие которой параллельны оси времени. Так же, как это было сделано в предыдущей задаче, можно убедиться, что \oint сокращается с $-\sum dk_{\alpha\beta}$. Тогда

$$-dK_{\alpha\beta} = \frac{i}{c} \int_{S_{\text{бок}}} (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma}) dS_\gamma.$$

Элементы гиперповерхности $S_{\text{бок}}$, очевидно, нормальны к оси t и могут быть представлены в форме $dS_\gamma = ic dt n_\gamma df$, где df — элемент обычной поверхности, замыкающей объем V , \mathbf{n} — орт нормали к этому элементу. Отсюда получаем выражение для убыли момента импульса системы в единицу времени:

$$-\frac{dK_{\alpha\beta}}{dt} = \int (-x_\alpha T_{\beta\gamma} + x_\beta T_{\alpha\gamma}) n_\gamma df. \quad (1)$$

¹ Не следует забывать об условности таких рисунков.

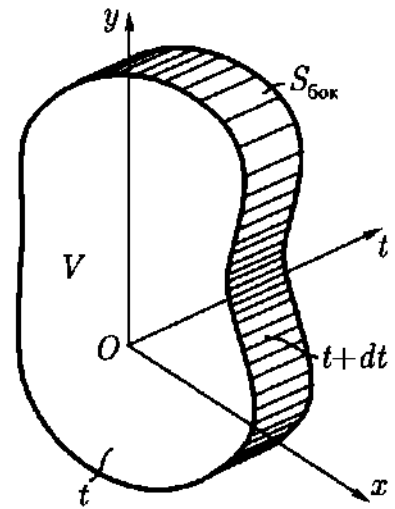


Рис. 104

Введем антисимметричный по значкам α, β тензор $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma} = x_\beta T_{\alpha\gamma} - x_\alpha T_{\beta\gamma}$. Этот тензор должен быть интерпретирован как плотность потока момента импульса, что ясно из формулы (1). Компонента $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma}$ равна количеству $\alpha\beta$ -компоненты полного момента импульса $K_{\alpha\beta}$, протекающему в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к оси x_γ . Подобно тому, как вместо $K_{\alpha\beta}$ можно ввести псевдовектор момента \mathbf{K} , можно ввести также псевдовектор, эквивалентный $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma$. Тогда равенство (1) принимает вид:

$$-\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int \mathfrak{R} df, \quad (2)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi}[(\mathbf{r} \times \mathbf{E})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{H})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})]. \quad (3)$$

При выводе (3) использовано выражение (X.29) для компонент $T_{\alpha\beta}$.

ГЛАВА XI

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Энергия и импульс

621. $p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$.

622. $v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$.

623. $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}\right)^2}$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

В нерелятивистском случае $\beta \approx \sqrt{\frac{2T}{\mathcal{E}_0}}$, в ультрарелятивистском $\beta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}\right)^2$.

624. а) $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$,

б) $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \cdot \frac{p^4}{m^3c^2} + \dots$

625. $v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \cdot \frac{1 + \frac{eV}{2mc^2}}{\left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^2}}$.

В частности, при $eV \ll mc^2$,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2}\right)} \ll c;$$

при $eV \gg mc^2$,

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \approx c.$$

626. а) $v = 3,42 \cdot 10^{-2} c$; б) $v = 0,9999985 c$; в) $0,81 c$; г) $0,9956 c$.

$$627. F = \frac{e}{ce} \sqrt{T(T + 2mc^2)}, W = \frac{e}{e} T.$$

$$628. p = \frac{2mv^2 N}{1 - v^2/c^2}.$$

Давление имеет одинаковое значение в системе, связанной с телом, и в системе, связанной с газом. В этом можно убедиться как путем прямого вычисления давления в каждой из этих систем отсчета, так и произведя преобразование Лоренца для четырехмерной силы (см. (XI.18)).

629. Длина n -й трубки

$$L_n = \frac{v_n}{2\nu} = \frac{c}{2\nu} \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2} \right)^2},$$

где v_n — скорость частицы в n -й трубке. В начале ускорения $mc^2 \gg neV_e$ и $L_n \approx \frac{1}{2\nu} \sqrt{\frac{2eV_e}{m}} \cdot \sqrt{n}$. В ультрарелятивистском пределе $T_n \gg mc^2$, $v \approx c$ и $L_n \approx \frac{c}{2\nu}$.

Оценим длину ускорителя:

$$\begin{aligned} L &= \sum_n L_n \approx \frac{c}{2\nu} \int_0^N \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2} \right)^2} dn = \\ &= \frac{c}{2\nu e V_e} \left[\sqrt{(NeV_e + mc^2)^2 - m^2 c^4} - mc^2 \arccos \frac{mc^2}{NeV_e + mc^2} \right]. \end{aligned}$$

630. Отношение интенсивностей

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp \frac{h}{v\tau} \approx \exp \left[\frac{h}{\tau_0 c} \cdot \frac{m_\mu c^2}{e} \right] \approx 2,5$$

($\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — период полураспада μ -мезона, движущегося со скоростью v). Если бы релятивистское преобразование времени не имело места, мы получили бы для отношения интенсивностей (считая, что скорость мезонов равна c):

$$\frac{I'_h}{I'_0} \approx \exp \frac{h}{\tau_0 c} \approx 94,4.$$

Наблюдения согласуются с первым результатом ($I_h/I_0 \approx 2,5$) и тем самым дают прямое экспериментальное доказательство существования релятивистского эффекта замедления хода движущихся часов.

$$631. \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{p' \sin \vartheta'}{p' \cos \vartheta' + V \frac{\mathcal{E}'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \mathcal{E} = \gamma(\mathcal{E}' + p'V \cos \vartheta'),$$

p, p' — импульсы частицы в системах S и S' соответственно.

Приведенной в условии для ультрарелятивистского случая приближенной формулой можно пользоваться, если $\cos \frac{\vartheta'}{2} \gg \sqrt{\left|1 - \frac{V}{v'}\right|}$, где $v' = \frac{p' c^2}{\mathcal{E}'}$ — скорость частицы в S' . Энергия в ультрарелятивистском случае принимает вид:

$$\mathcal{E} \approx pc \approx 2\gamma \mathcal{E}' \cos^2 \frac{\vartheta'}{2}.$$

632. Рассмотрим dN частиц, движущихся в системе S' внутри телесного угла $d\Omega'$. В системе S те же dN частиц будут двигаться внутри телесного угла $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$, образованного векторами скоростей этих частиц в системе S . Угловое распределение частиц в системе S будет описываться функцией $F(\vartheta, \alpha)$, определяемой из равенства

$$F(\vartheta, \alpha) d\Omega = F'(\vartheta', \alpha') d\Omega' = dW = \frac{dN}{N}. \quad (1)$$

Угол ϑ' должен быть выражен через ϑ с помощью формулы:

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{\left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2}{\left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta'}$$

следующей из решения задачи 631 ($v' = p' \frac{c^2}{\mathcal{E}'}$ — скорость частиц в системе S'). Учитывая, что $\alpha = \alpha'$, получим окончательно:

$$F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha] \frac{\gamma^2 \left[\left(\cos \vartheta' + \frac{V}{v'} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta' \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{V}{v'} \cos \vartheta'}. \quad (2)$$

В случае ультррелятивистских частиц $v' = c$ и угловое распределение в системе S упрощается (ср. с задачей 572):

$$F(\vartheta, \alpha) = F'[\vartheta'(\vartheta), \alpha] \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2}. \quad (3)$$

Заметим, что частицы, движущиеся в системе S под разными углами ϑ , обладают различной энергией, несмотря на то, что в системе S' у них одна и та же энергия.

633. Функция распределения f является инвариантной величиной. Это означает, что при переходе к другой системе отсчета S' :

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

где в правой части равенства надо выразить \mathbf{r} , \mathbf{p} и t через штрихованные величины по формулам (X.4).

634. Обозначим через n_1 и n_2 числа рассеиваемых и рассеивающих частиц в единице объема. Рассмотрим процесс рассеяния в системе S . Общее число частиц dN , рассеянных в интервал телесного угла $d\Omega$ за время t рассеивающими частицами, заключенными в объеме V , выражается, согласно определению сечения, формулой: $dN = d\sigma_{12} J_{12} n_2 V t$, где $J_{12} = n_1 v_1$. В системе S' можно написать для того же числа dN аналогичное выражение: $dN = d\sigma'_{12} J'_{12} n'_2 V' t'$, где $J'_{12} = n'_1 |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|$ (в этой системе dN представляет собой число частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega'$, соответствующий $d\Omega$). Таким образом,

$$dN = d\sigma_{12} n_1 n_2 v_1 V t = d\sigma'_{12} n'_1 n'_2 |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2| V' t'. \quad (1)$$

Величина $n_i = \frac{\text{inv}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$, поэтому совокупность четырех величин $(n_i v_i, i n_i c)$ представляет собой 4-вектор (он пропорционален 4-скорости частицы). Отсюда следует, что

$$n_1 n_2 = n'_1 n'_2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right), \quad (2)$$

так как скалярное произведение двух 4-векторов инвариантно. Учитывая (2) и то, что 4-объем инвариантен: $Vt = V't'$, мы получим окончательно

$$d\sigma'_{12} = d\sigma_{12} \frac{v_1 \left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)}{|\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|}. \quad (3)$$

В том частном случае, когда $\mathbf{v}'_1 \parallel \mathbf{v}'_2$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2}{1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2}}$$

(см. задачу 554) и из (3) следует, что сечение инвариантно:

$$d\sigma_{12} = d\sigma'_{12}. \quad (4)$$

Этот случай имеет место, например, при преобразовании от лабораторной системы отсчета к системе ц. и. Заметим, что если поток определить формулой $J_{12} = n_1 \tilde{v}$, где $\tilde{v} = v_1 \left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)$, то сечение будет инвариантно при произвольном преобразовании Лоренца (см. [6], § 28.3).

635. $dW = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1 - \beta \cos \vartheta)^2}$, $\int_{4\pi} dW = 1$, где $\beta = \frac{v}{c}$.

636. $f = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$, откуда $\mathcal{E} = mc^2 \frac{f + 1}{2\sqrt{f}}$, где m — масса π^0 -мезона.

638. Поскольку импульс фотона $p = \frac{\mathcal{E}}{c}$, то (ср. с задачей 631):

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}'}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)}, \quad \mathcal{E}' = \frac{mc^2}{2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Сопоставив следующее отсюда выражение $d\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}' d(1 - \beta \cos \vartheta)}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)^2}$ с угловым распределением γ -квантов распада, найденным в ответе к задаче 635, получим распределение вероятностей для энергий фотонов распада:

$$dW(\mathcal{E}) = \frac{|d\mathcal{E}|}{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}},$$

где $\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ — минимальное значение энергии γ -кванта распада (при $\vartheta = \pi$), $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ — максимальное значение энергии γ -кванта распада (при $\vartheta = 0$). Отсюда видно, что спектр γ -квантов распада имеет в лабораторной системе отсчета прямоугольную форму, т. е. любые значения энергии в промежутке от \mathcal{E}_{\min} до \mathcal{E}_{\max} равновероятны.

$$639. \quad m = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2}}{c^2}.$$

$$640. \quad m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p_1 p_2 \cos \vartheta], \quad c = 1;$$

$$m_\pi = 139,58 \text{ Мэв}.$$

$$641. \quad m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2[\sqrt{(p^2 + m^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p p_2 \cos \vartheta], \quad c = 1.$$

$$642. \quad m^2 = \mathcal{E}^2 - p^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$V = \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1-v^2}}, \quad c = 1.$$

$$643. \quad T_1 = \frac{(m_0 - m_1)^2 - m_2^2}{2m_0}; \quad T_2 = \frac{(m_0 - m_2)^2 - m_1^2}{2m_0}, \quad c = 1;$$

$$\text{а) } T_\alpha/T_\alpha = 58,5;$$

$$\text{б) } T_\nu/T_\mu = 7,27;$$

$$\text{в) } T_\gamma/T_\alpha \approx \frac{2mc^2}{\Delta\mathcal{E}},$$

где m — масса исходного ядра, $\Delta\mathcal{E}$ — энергия его возбуждения, причем $mc^2 \gg \Delta\mathcal{E}$.

Из общих формул для T_1, T_2 , а также из рассмотренных примеров видно, что большая часть энергии приходится на долю более легкой частицы.

$$644. Q_a = T_b \left[1 + \frac{T_b + 2m_b}{m_a + \sqrt{T_b^2 + 2T_b m_b + m_b^2}} \right];$$

$$Q_{\Sigma^+} = 109,6 \text{ Мэв}; \quad M_{\Sigma^+} = 1188,7 \text{ Мэв} (\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+);$$

$$Q_{\Sigma^+} = 116,1 \text{ Мэв}; \quad M_{\Sigma^+} = 1189,3 \text{ Мэв} (\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^0).$$

Оба обозначения M_{Σ^+} находятся в хорошем согласии друг с другом.

645.

$$\omega = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{E}}{2mc^2} \right).$$

Энергия $\hbar\omega$, уносимая квантом, меньше, чем $\Delta \mathcal{E}$, на величину энергии $(\Delta \mathcal{E})^2 / (2mc^2)$, уносимой ядром отдачи. В условиях жесткой связи ядра с кристаллической решеткой последняя не получает энергии (так как ее масса $M \gg m$ очень велика) и квант уносит всю энергию, $\hbar\omega = \Delta \mathcal{E}$.

646. а) Закон сохранения энергии ограничивает равнобедренный треугольник ABC (рис. 105а), высота BO которого равна энергии распада $Q = m - m_1 - m_2 - m_3$ ($c = 1$). Расстояние от точки D до основания AC равно T_1 по построению, расстояния от D до AB и BC легко вычисляются и оказываются равными T_2 и T_3 соответственно.

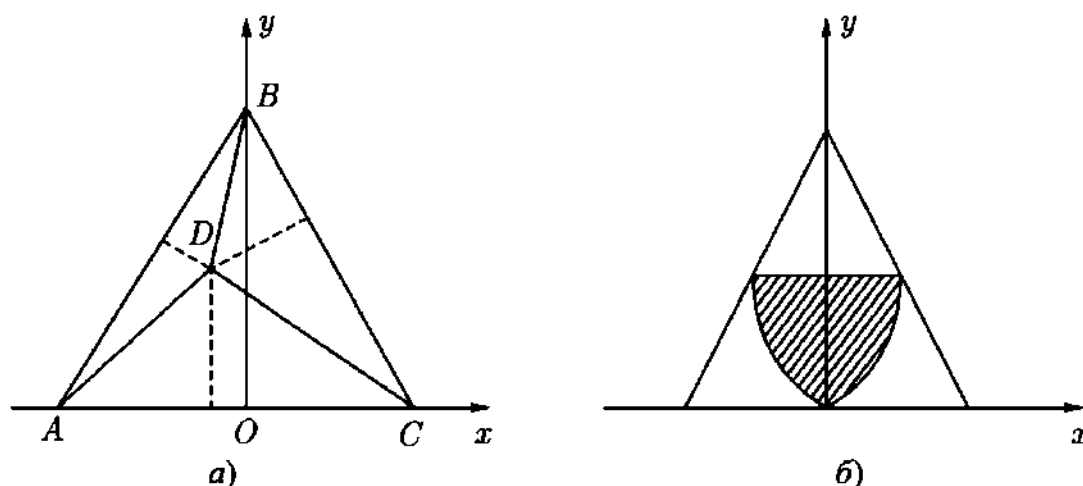


Рис. 105

б) Величины импульсов при заданных массах всех частиц определяются заданием двух энергий, например T_1 и T_2 (так как $T_3 = Q - T_1 - T_2$), или их двумя линейными комбинациями x и y . Импульсы частиц, образовавшихся при распаде, являются сторонами треугольника ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$

в системе покоя распадающейся частицы). Углы треугольника характеризуют относительные направления вылета частиц и могут быть найдены по известным p_1, p_2, p_3 .

в) Границы разрешенной области определяются условиями

$$p_1 + p_2 \geq p_3, \quad -p_3 \leq p_1 - p_2 \leq p_3.$$

Эти условия приводят к области, заштрихованной на рис. 105б. Сверху область ограничена прямой $y = (m - m_1)^2 / 2m$, снизу — гиперболой $x =$

$$= \pm \sqrt{\frac{y^2 + 2m_1 y}{3}}.$$

647. Диаграмма Далица имеет вид, изображенный на рис. 105б.

а) $T_{1 \max} \approx T_{2 \max} \approx T_{3 \max} \approx 69,8 \text{ Мэв}$.

б) $T_{1 \max} = \frac{(m - m_1)^2}{2m} \approx 127 \text{ Мэв}$, $T_{2 \max} = T_{3 \max} = \frac{m^2 - m_1^2}{2m} \approx 228 \text{ Мэв}$.

Максимальные импульсы всех трех частиц одинаковы.

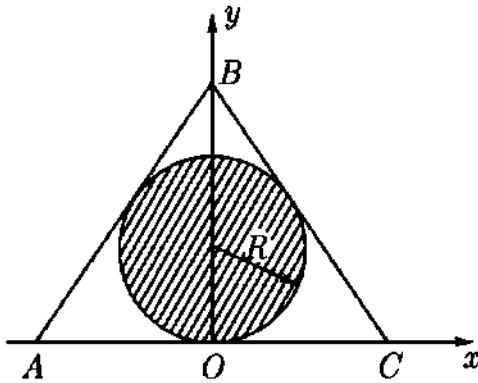


Рис. 106

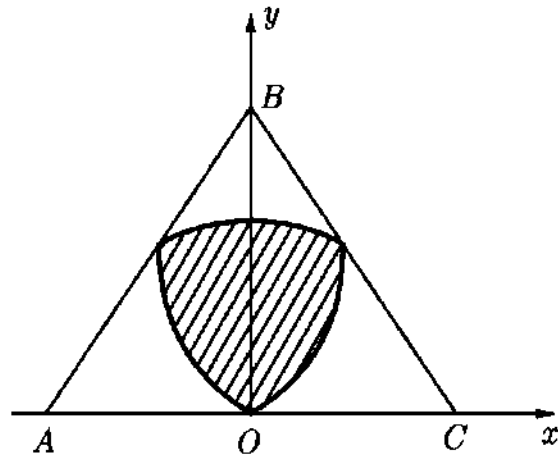


Рис. 107

648. Диаграмма Далица в приближении $Q \ll m_\pi$ приведена на рис. 106.

$$OB = Q, \quad R = Q/3, \quad T_{\max} = 2Q/3 \approx 50 \text{ Мэв}.$$

649. Диаграмма Далица приведена на рис. 107. $OB = Q$, $T_{\max} \approx 210 \text{ Мэв}$. Внутренняя замкнутая кривая дается уравнением

$$x = \pm \sqrt{\frac{(2m_\pi y + y^2)[(m_\omega - m_\pi)^2 - 4m_\pi^2 - 2m_\omega y]}{3[(m_\omega - m_\pi)^2 - 2m_\omega y]}}.$$

650. δ -функцию от 4-вектора нужно понимать как произведение четырех δ -функций от его компонент:

$$\delta(p_i - p_{i1} - p_{i2} - p_{i3}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) = \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3). \quad (1)$$

Произведя интегрирование по $(d\mathbf{p}_3)$ с помощью (1), придем к выражению

$$\Gamma = \int \frac{(d\mathbf{p}_1)(d\mathbf{p}_2)}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3} \delta(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1 p_2 \cos \vartheta} - \mathcal{E}_3), \quad (2)$$

где $\mathcal{E}_3 = m - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, ϑ — угол между \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 .

Представим $(d\mathbf{p}_2)$ в виде $(d\mathbf{p}_2) = p_2^2 dp_2 d\Omega_2$, где $d\Omega_2$ — элемент телесного угла. Примем за полную ось направление \mathbf{p}_1 ; тогда $d\Omega_2 = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Кроме того, $p_2 dp_2 = \mathcal{E}_2 d\mathcal{E}_2$, как следует из (XI.3). Преобразуем δ -функцию в (2), используя формулу (П 1.18):

$$\delta(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1 p_2 \cos \vartheta} - \mathcal{E}_3) = 2\mathcal{E}_3 \delta(2p_1 p_2 \cos \vartheta + p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 - \mathcal{E}_3^2). \quad (3)$$

Поскольку $-1 \leq \cos \vartheta \leq 1$, то интеграл (2) будет отличен от нуля только при выполнении неравенств

$$p_1 + p_2 \geq p_3, \quad p_1 - p_2 \leq p_3, \quad p_1 - p_2 \geq -p_3,$$

но именно эти неравенства определяют границы разрешенной области на диаграмме Далица.

С помощью (3) и (П 1.5), выполнив интегрирование по $d\vartheta$, получим

$$\Gamma = \pi \int \frac{dp_1 d\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 p_1} = 4\pi^2 \int d\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2.$$

Перейдем теперь к интегрированию по переменным

$$x = \frac{T_2 - T_3}{\sqrt{3}} = \frac{\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 + m_3 - m_2 - m}{\sqrt{3}}, \quad y = T_1 = \mathcal{E}_1 - m_1,$$

которые использовались при построении диаграммы Далица. Преобразовав элемент $d\mathcal{E}_1 d\mathcal{E}_2$, найдем

$$\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2 \int dx dy,$$

где область интегрирования ограничена внутренней кривой диаграммы (см. рис. 1056–107).

Последняя формула показывает, что элемент фазового объема $d\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2 dx dy$ пропорционален элементу площади на диаграмме Далица. Энергии T_1, T_2 и T_3 частиц, образующихся при распаде, можно измерять экспериментально и наносить соответствующие точки на диаграмму Далица. При этом густота точек будет пропорциональна величине ρ (см. условие задачи), которая, таким образом, может быть найдена из данных эксперимента.

651. Рассмотрим 4-вектор энергии-импульса системы частиц p_i . Он сохраняется, т. е. его соответствующие компоненты до и после реакции равны между собой. При значении кинетической энергии T_0 , соответствующем порогу реакции, образовавшиеся частицы покоятся в системе ц. и. (заметим, что в лабораторной системе отсчета частицы не могут покоиться при пороговом значении T_0 , так как это означало бы нарушение закона сохранения импульса). Вектор полного 4-импульса системы до реакции имеет в лабораторной системе вид:

$$p_i^{(0)} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{c} + m_1 c, \mathbf{p}_0 \right),$$

где \mathcal{E}_0 — полная энергия и \mathbf{p}_0 — полный импульс на пороге.

После же реакции в системе ц. и. 4-импульс равен $p'_i = (Mc, 0)$. Вследствие инвариантности квадрата 4-вектора и закона сохранения 4-импульса, $p_i^{(0)2} = p_i'^2$. Запишем последнее равенство в развернутом виде:

$$M^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} + 2m_1 \mathcal{E}_0 + m_1^2 c^2 - p_0^2,$$

откуда

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1} (M - m_1 - m)(M + m_1 + m).$$

652. а) $T_0 = 288$ Мэв; б) $T_0 = 160$ Мэв; в) $T_0 = 763$ Мэв;

г) $T_0 = \frac{2m_p(m + 2m_p)c^2}{m},$

где m_p — масса протона.

В частном случае столкновения с протоном $m = m_p$, имеем

$$T_0 = 6m_p c^2 = 5,63 \text{ Гэв.}$$

Приближенная формула для пороговой энергии:

$$T_0 = \frac{2(A+2)}{A} m_p c^2.$$

При больших A , $T_0 \approx 2m_p c^2$.

$$653. T_0 = \left(1 + \frac{m}{m+1}\right) \Delta \mathcal{E}.$$

В случае а) имеем по приведенной выше приближенной формуле

$$\Delta \mathcal{E} = T_0 = 2,18 \text{ Мэв} \quad (m = 0).$$

По точной формуле (см. задачу 574) мы получили бы больше на $\frac{|Q|^2}{2m_1 c^2} \approx 0,0012 \text{ Мэв}$, где $Q = -(M - m_1 - m)c^2$ — тепловой эффект реакции. В случае б) приближенная формула дает $T_0 = 2|Q| = 7,96 \text{ Мэв}$. Отличие от точной формулы составляет $0,003 \text{ Мэв}$.

654. Уравнение реакции имеет вид:

$$\gamma + (\text{частица}) \rightarrow e^+ + e^- + (\text{частица}).$$

Порог можно найти по общей формуле (см. задачу 651):

$$T_0 = \hbar\omega_0 = \frac{c^2}{2m_1} (m_1 + 2m - m_1)(m_1 + 2m + m_1) = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{m_1}\right),$$

где m — масса электрона (или позитрона). Когда частицы нет, так что $m_1 \rightarrow 0$, пороговая энергия $T_0 \rightarrow \infty$, что и означает невозможность реакции.

Последний результат можно также получить, показав невозможность выполнения равенства $k_i = p_{+i} + p_{-i}$, где k_i, p_{+i}, p_{-i} — 4-импульсы фотона, позитрона и электрона. Возводя обе части равенства в квадрат, будем иметь

$$k_i^2 = (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)^2 - (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2.$$

Но $k_i^2 = 0$, а инвариантная величина, стоящая в правой части, не равна нулю ни при каких значениях $\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-$. Это становится очевидным, если перейти в систему отсчета, в которой $\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- = 0$.

$$656. v = \frac{c\sqrt{\mathcal{E}^2 - m_1^2 c^4}}{\mathcal{E} + m_2 c^2}.$$

657. По закону сохранения 4-импульса

$$p_{1i}^{(0)} + p_{2i}^{(0)} = p_{1i} + p_{2i}. \quad (1)$$

Чтобы определить угол рассеяния первой частицы, перенесем p_{1i} налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат:

$$p_{1i}^{(0)2} + p_{2i}^{(0)2} + p_{1i}^2 + 2p_{1i}^{(0)} p_{2i}^{(0)} - 2p_{1i}^{(0)} p_{1i} - 2p_{2i}^{(0)} p_{1i} = p_{2i}^2. \quad (2)$$

Согласно (XI.7), $p_{1i}^{(0)2} = p_{1i}^2 = -m_1^2 c^2$, $p_{2i}^{(0)2} = p_{2i}^2 = -m_2^2 c^2$. Скалярные произведения преобразуются следующим образом ($\mathbf{p}_2^{(0)} = 0$):

$$p_{1i}^{(0)} p_{2i}^{(0)} = \mathbf{p}_1^{(0)} \cdot \mathbf{p}_2^{(0)} - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1^{(0)} \mathcal{E}_2^{(0)} = -\mathcal{E}_0 m_2, \quad p_{2i}^{(0)} p_{1i} = -m_2 \mathcal{E}_1,$$

$$p_{1i}^{(0)} p_{1i} = \mathbf{p}_1^{(0)} \cdot \mathbf{p}_1 - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1^{(0)} \mathcal{E}_1 = p_0 p_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1}{c^2},$$

где $p_0 = \frac{1}{c^2} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - m_1^2 c^4}$. Подставляя полученные выражения в (2), найдем:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_0 + m_2 c^2) - \mathcal{E}_0 m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{c^2 p_0 p_1}.$$

Аналогично

$$\cos \vartheta_2 = \frac{(\mathcal{E}_0 + m_2 c^2)(\mathcal{E}_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_0 p_2}.$$

658.

$$\mathcal{E}_1 = m_1 c^2 \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(1 + \gamma_0 \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \cos \vartheta_1 (\gamma_0^2 - 1) \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \sin^2 \vartheta_1}}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_1}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_2}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \vartheta_2} m_2 c^2, \quad (2)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{m_1 c^2}.$$

Из этих формул видно, что при $m_1 > m_2$ возможно рассеяние только на углы ϑ_1 , не превышающие $\arcsin \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ (подкоренное выражение в (1) должно быть положительно). При этом каждому значению ϑ_1 отвечают два значения энергии \mathcal{E}_1 .

При $m_1 = m_2$ угол рассеяния ϑ_1 не превышает $\frac{\pi}{2}$ и каждому значению ϑ_1 отвечает только одно значение энергии, соответствующее выбору

знака «+» в формуле (1). Знаку «-» отвечало бы значение $\mathcal{E}_1 = m_1 c^2$ независимо от угла рассеяния, что, очевидно, не соответствует действительности. По аналогичной причине в числителе формулы (2) для \mathcal{E}_2 оставлен только знак «+».

При $m_1 < m_2$ возможно рассеяние на любой угол и каждому значению ϑ_1 отвечает одно значение \mathcal{E}_1 . Если $0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$, то в формуле (1) нужно выбрать знак «+», если $\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < \pi$, то нужно выбрать знак «-». При таком выборе знаков рассеянию налетающей частицы на больший угол соответствует большая потеря энергии, как и должно быть.

$$659. \quad \mathcal{E} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}.$$

$$660. \quad \mathcal{E} \approx \frac{\mathcal{E}_0 - \Delta E}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}.$$

$$661. \quad T_1 = \frac{T_0 \cos^2 \vartheta_1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T_0}{mc^2} \right) \sin^2 \vartheta_1}.$$

662.

$$T_1 = T_0 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 2 \sin^2 \vartheta_1 \pm 2 \cos \vartheta_1 \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 - \sin^2 \vartheta_1} \right];$$

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0 \cos^2 \vartheta_2.$$

Правило знаков сформулировано в решении задачи 658.

663. Угол разлета частиц $\chi = \vartheta_1 + \vartheta_2$ выражается формулой:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{(v'_1 + v'_2) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \vartheta'}{\frac{V^2}{c^2} v'_1 \sin^2 \vartheta' + (V - v'_1)(1 - \cos \vartheta')}$$

(ср. с задачей 568).

При $m_1 = m_2$ скорости $v'_1 = v'_2 = V$ и

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{2c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V^2 \sin \vartheta'}.$$

В этом случае $\chi < 90^\circ$. В нерелятивистском пределе $\chi \rightarrow 90^\circ$.

664. Поступая так же, как при решении задачи 657, получим:

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_0 \right)}{\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_0 \cos \vartheta_1 + \frac{\hbar \omega_0}{c} (1 - \cos \vartheta)},$$

где ϑ — угол между направлениями движения первичного и рассеянного фотонов»; ϑ_1 — угол между направлениями начального движения электрона и движения фотона после рассеяния.

Если электрон до столкновения покоился, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar \omega_0}{mc^2} (1 - \cos \vartheta)}.$$

665. Энергия рассеянного кванта максимальна при $\vartheta_0 = \vartheta = \pi$, $\vartheta_1 = 0$, т. е. при лобовом столкновении с рассеянием кванта назад. При этом

$$\hbar \omega \approx \hbar \omega_0 \frac{2\mathcal{E}_0}{\frac{(mc^2)^2}{2\mathcal{E}_0} + 2\hbar \omega_0}. \quad (1)$$

Из (1) видно, что в ультрарелятивистском случае происходит значительное «ужесточение», кванта, $\hbar \omega \gg \hbar \omega_0$. Отметим два частных случая.

При $\hbar \omega_0 \ll mc^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)$ формула (1) дает: $\mathcal{E}_0 \gg \hbar \omega = 4\hbar \omega_0 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \gg \hbar \omega_0$.

Если же $\hbar \omega_0 \gg mc^2 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)$, то $\hbar \omega$ приближается к \mathcal{E}_0 .

666. $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \hbar \omega_0 \frac{p_0 c (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1) + \hbar \omega_0 (1 - \cos \vartheta)}{\mathcal{E}_0 - p_0 c \cos \vartheta_1 + \hbar \omega_0 (1 - \cos \vartheta)}$. Обозначения

углов те же, что в задаче 664. Покоившийся вначале электрон при столкновении с фотоном всегда увеличивает свою энергию:

$$\mathcal{E} - mc^2 = \frac{(\hbar \omega_0)^2 (1 - \cos \vartheta)}{mc^2 + \hbar \omega (1 - \cos \vartheta)}.$$

Если электрон обладает до рассеяния импульсом $p_0 \gg \hbar\omega/c$, то его энергия увеличивается при рассеянии, если $\vartheta_0 < \vartheta_1$, и уменьшается в противном случае. Максимальное ускорение электрона получится при $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta = \vartheta_2 = \pi$. При этом

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 2\hbar\omega_0 \frac{p_0 c + \hbar\omega_0}{\mathcal{E}_0 + p_0 c + \hbar\omega_0}.$$

Если электрон нерелятивистский, но $p_0 c \gg \hbar\omega_0$, то $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 2\hbar\omega_0(v_0/c) \ll \ll \hbar\omega_0$. Если электрон ультрарелятивистский, то $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 \approx \hbar\omega_0$ и условия ускорения электрона оптимальны.

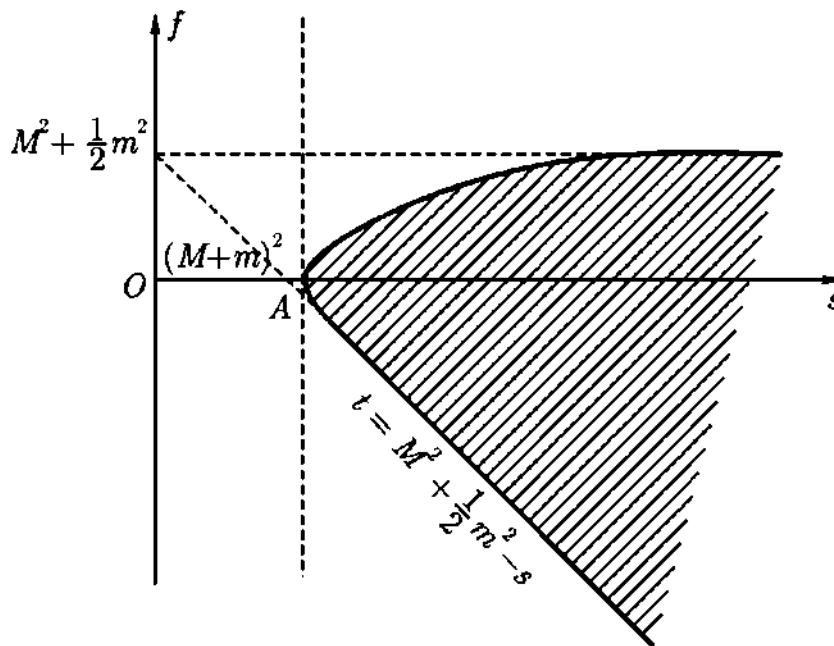


Рис. 108

667. $s = 4(m^2 + q^2)$, $t = -2q^2(1 - \cos \vartheta)$, $u = -2q^2(1 + \cos \vartheta)$.

668. $\mathcal{E}_a = \frac{1}{2m_b}(s - m_a^2 - m_b^2)$, $p_a = \frac{1}{2m_b}\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}$,

$\mathcal{E}'_a = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_a^2 + m_b^2)$, $p' = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}$,

$\mathcal{E}'_b = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_b^2 - m_a^2)$,

где

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Поскольку в системе ц. и. $\mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$, то величина s имеет смысл квадрата полной энергии в этой системе отсчета:

$$s = (\mathcal{E}'_a + \mathcal{E}'_b)^2 = (\mathcal{E}'_c + \mathcal{E}'_d)^2.$$

$$669. \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2m_b}(m_b^2 + m_c^2 - u),$$

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2m_b}(m_b^2 + m_d^2 - t); \quad c = 1.$$

$$670. \quad \cos \theta = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)(m_b^2 + m_c^2 - u) + 2m_b^2(t - m_a^2 - m_c^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\sqrt{\lambda(u, m_b^2, m_c^2)}},$$

$$\cos \theta' = \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_c^2 - m_d^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\sqrt{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}}.$$

Здесь $c = 1$, а величина λ определена в ответе к задаче 668.

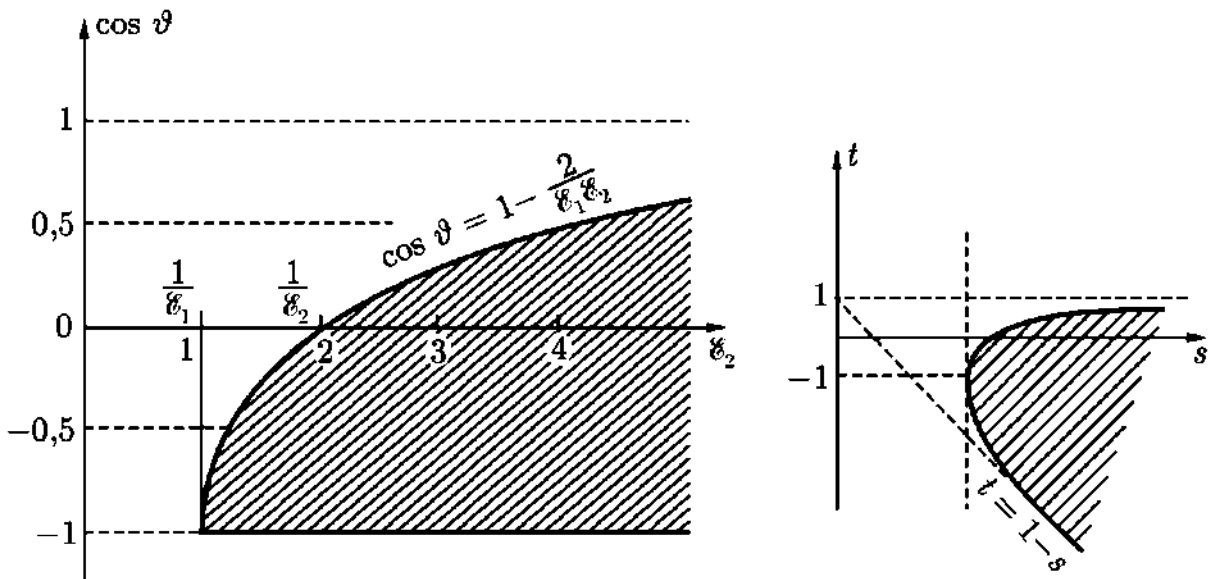


Рис. 109

671. Величина $s = (\mathcal{E}'_\pi + \mathcal{E}'_p)^2$ имеет смысл квадрата полной энергии двух частиц в системе ц. и., поэтому она всегда положительна. Минимальное значение $s_{\min} = (m + M)^2$ соответствует случаю, когда π -мезон (масса m) и протон (масса M) покоятся в системе ц. и. Таким образом, $(m + M)^2 \leq s \leq \infty$.

Косинус угла рассеяния θ' в системе ц. и. связан с s и t формулой

$$\cos \theta' = \frac{s^2 + s(2t - 2M^2 - m^2) + M^2(M^2 - m^2)}{(s - M^2)\sqrt{s^2 - 2s(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)^2}}. \quad (1)$$

Поскольку $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$, то, подставляя в это двойное неравенство $\cos \theta'$ из (1), найдем допустимые при заданном s значения t .

Физическая область заштрихована на рис. 108. Порогу реакции отвечает точка A , причем $s_A = (M + m)^2$, $t_A = -\frac{m^2 M}{M + m}$.

$$T_0 = m + \frac{m^2}{2M}, \quad T_\pi = \frac{m^3}{2M(M + m)}.$$

672. Искомые области изображены на рис. 109.

673. Разрешенные области для первых двух процессов изображены на рис. 110а, для третьего — на рис. 110б.

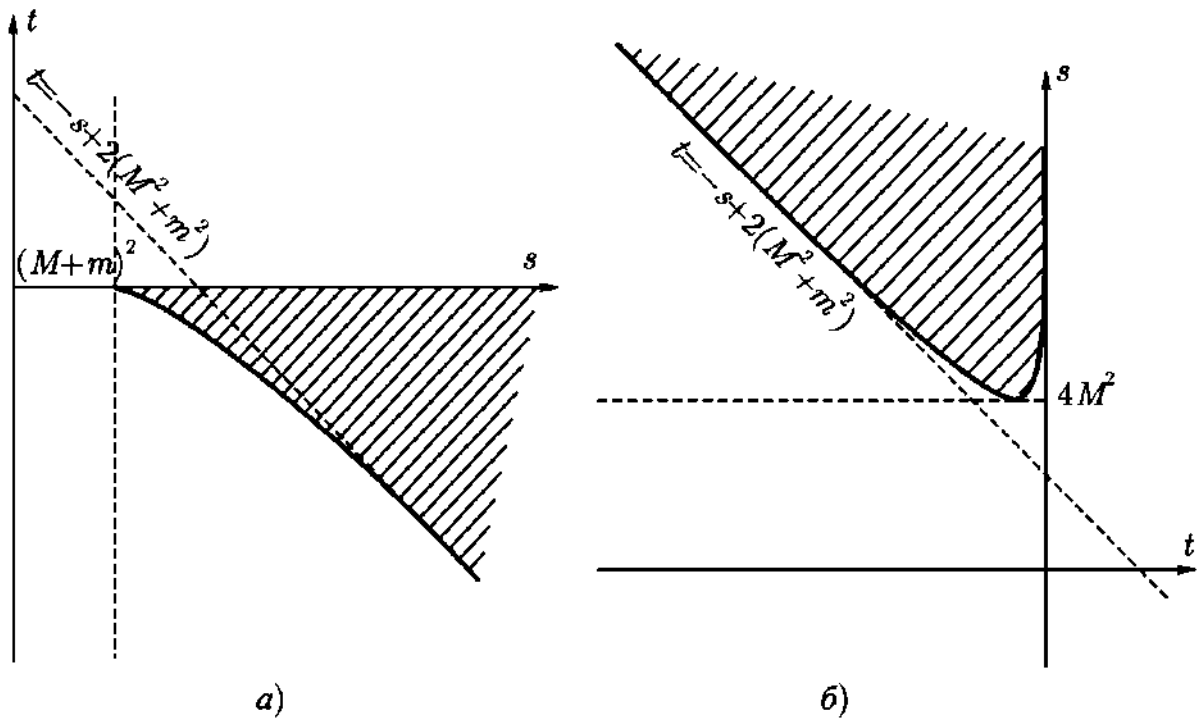


Рис. 110

Можно построить одну кинематическую диаграмму для всех трех процессов, рассматривая их как три возможных канала одной реакции, в кото-

рой участвуют два нуклона и два мезона. Начальные и конечные состояния мезонов и нуклонов в рассматриваемых каналах различаются энергиями, импульсами и зарядами¹.

Для построения диаграммы (рис. 111) проведем три прямые, на которых соответственно $s = 0$, $t = 0$ и $u = 0$, таким образом, чтобы они, пересекаясь, образовывали равносторонний треугольник с высотой $h = s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$ ($c = 1$). Значениям $s = s_0 = \text{const}$ будет соответствовать прямая, параллельная оси $s = 0$ и отстоящая от нее на расстояние $|s_0|$. Эта прямая должна проводиться с той же стороны, с которой находится треугольник, если $s_0 > 0$, и со стороны, противоположной треугольнику, при $s_0 < 0$. Аналогично строятся линии $t = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

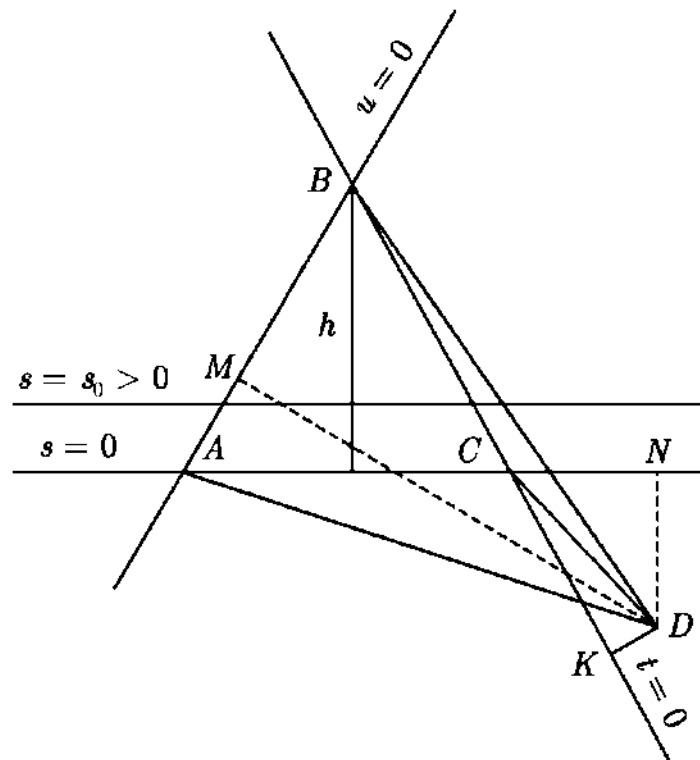


Рис. 111

В результате на плоскости построена косоугольная система координат и любой точке плоскости сопоставлены три числа s , t и u , положительные или отрицательные. Сумма этих трех величин удовлетворяет нужному условию (XI.14). Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную точку D и опустим из нее перпендикуляры на стороны AB , BC и AC или их про-

¹А также еще некоторыми характеристиками, изучаемыми в квантовой теории.

должения. Поскольку площадь $ABC =$ площади $ABD -$ (площадь $BCD +$ + площадь ACD), то

$$DM - DN - DK = h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \quad (1)$$

Но $-DN = s$, $-DK = t$, $DM = u$, откуда и следует (XI.14).

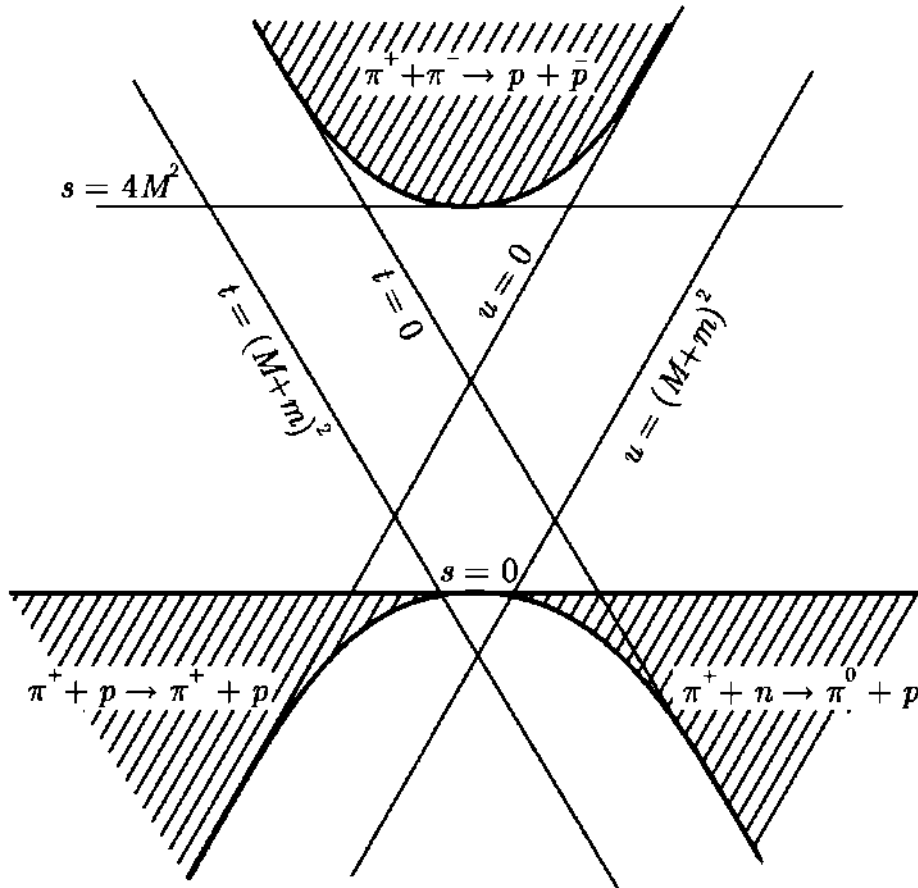


Рис. 112

Для нашей цели удобно несколько изменить определения s , t и u по сравнению с (XI.13). Пусть

$$s = (p_{ai} + p_{bi})^2, \quad t = (p_{ai} + p_{ci})^2, \quad u = (p_{ai} + p_{di})^2, \quad (2)$$

где для частиц, исчезающих в результате реакции, $p_i = (-\mathcal{E}, -\mathbf{p})$, а для частиц, рождающихся в реакции, $p_i = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$. Это правило знаков соответствует тому, что $\sum_a p_{ai} = 0$, как и в случае распада. Припишем индексы a и b мезонам, а c и d — нуклонами. Тогда для канала в) $p_{ai} = (-\mathcal{E}_a, -\mathbf{p}_a)$,

$p_{bi} = (-\mathcal{E}_b, -\mathbf{p}_b)$, $p_{ci} = (\mathcal{E}_c, \mathbf{p}_c)$, $p_{di} = (\mathcal{E}_d, \mathbf{p}_d)$; $s = (\mathcal{E}'_a + \mathcal{E}'_b)^2 = (\mathcal{E}'_c + \mathcal{E}'_d)^2 \geq 4M^2$; допустимые значения t получаются из условия $|\cos \theta'| \leq 1$.
Граница физической области дается уравнением

$$s = -t - \frac{(M^2 - m^2)^2}{t} + 2(M^2 + m^2) \geq 4M^2 \quad (3)$$

и представляет собой гиперболу с асимптотами $t = 0$ и $u = 0$ (рис. 112).

В случае канала а) полагаем $p_{ai} = (-\mathcal{E}_a, -\mathbf{p}_a)$, $p_{ci} = (-\mathcal{E}_c, -\mathbf{p}_c)$, $p_{bi} = (\mathcal{E}_b, \mathbf{p}_b)$, $p_{di} = (\mathcal{E}_d, \mathbf{p}_d)$. Физическая область ограничена прямой $s = 0$ и гиперболой

$$s = -t - \frac{(M^2 - m^2)^2}{t} + 2(M^2 + m^2), \quad t \geq (M + m)^2,$$

которая является второй ветвью гиперболы (3).

Аналогично строится физическая область для канала б). Как видно из изложенного, полученная диаграмма очень похожа на диаграмму Далица для трехчастичного распада (см. задачу 646)

Сходство обусловлено тем, что в обоих случаях в процессе участвуют 4 частицы, 4-импульсы которых в силу закона сохранения связаны условием $p_{ai} + p_{bi} + p_{ci} + p_{di} = 0$. Из 4-импульсов частиц с учетом того, что при заданных массах всех частиц $m_a^2 = p_{ai}^2$ и т. д., как нетрудно убедиться, можно составить только 2 независимых инварианта, например $s = (p_{ai} + p_{ci})^2$. Поэтому для изображения таких процессов требуется двумерное пространство (кинематическая плоскость).

675. Если частица, двигавшаяся с 4-импульсом p_{0i} , испустила в среде фотон с 4-импульсом $k_i = (\frac{\hbar\omega n}{c}, i\frac{\hbar\omega}{c})$, то законы сохранения энергии и импульса могут быть выражены 4-мерным равенством

$$p_{0i} = p_i + k_i,$$

где p_i — 4-импульс частицы после излучения фотона. Перенесем k_i налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат. После элементарных преобразований получим

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda} (n^2 - 1) \sqrt{1 - \beta^2} \right], \quad (1)$$

где $\Lambda = \frac{\hbar}{mc}$ — комптонова длина волны частицы, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}$ — длина волны фотона, $\beta = \frac{v}{c}$. Второй член, равный по порядку величины $\frac{\Lambda}{\lambda}$, обычно очень

мал. Если опустить этот член, выражающий квантовые поправки (Λ пропорциональна \hbar), то выражение (1) сведется к классическому условию излучения Вавилова – Черенкова:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}.$$

677. Обозначив через p_{0i} и p_i 4-импульсы частицы до и после излучения, через k_i — «4-импульс» фотона, напишем закон сохранения энергии и импульса в виде

$$p_{0i} - k_i = p_i.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и отбрасывая член с \hbar^2 , получим

$$(m^2 - m_0^2)c^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + \frac{2\mathcal{E}_0 k}{c} = 0,$$

где m_0 — масса возбужденной частицы, m — масса частицы в нормальном состоянии.

Представим разность $c^2(m_0^2 - m^2)$ в виде $c^2(m_0 - m)(m_0 + m) \approx \approx 2\hbar\omega_0 m$. Тогда

$$n(\omega)\beta \cos \vartheta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.

При $\omega_0 \rightarrow 0$ равенство (1) переходит в условие

$$n(\omega)\beta \cos \vartheta = 1$$

возникновения излучения Вавилова – Черенкова. Это излучение не связано, таким образом, с изменением внутреннего состояния частицы.

При $\omega_0 \neq 0$ перепишем (1) в виде

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - n(\omega)\beta \cos \vartheta}. \quad (2)$$

Формулой (2) описывается эффект Доплера в преломляющей среде (ср. с задачей 516). Она применима, если $n(\omega)\beta \cos \vartheta < 1$ и отличается от соответствующей формулы, описывающей эффект Доплера в вакууме, только наличием $n(\omega)$ в знаменателе. При $\beta \ll 1$ никаких качественно новых явлений не возникает, но при $\beta \approx 1$ и при наличии дисперсии в среде явление усложняется.

В общем случае формула (2) представляет собой нелинейное уравнение относительно ω (n — функция ω !) и может иметь более чем одно решение. При этом вместо одной смещенной линии, как в обычном эффекте Доплера, в лабораторной системе будет наблюдаться несколько линий (сложный эффект Доплера).

678. Поступая так же, как при решении задачи 677, получим следующие результаты.

Излучение частоты ω , сопровождаемое возбуждением частицы, может возникнуть, если скорость $v = \beta c$ движения частицы превосходит пороговое значение $\frac{c}{n(\omega) \cos \vartheta}$ (ϑ — угол между направлением скорости частицы и направлением импульса фотона). Необходимая для этого энергия заимствуется из кинетической энергии частицы. Излучение такого типа наблюдается при фиксированном значении ω только в некотором интервале острых углов ϑ внутри черенковского конуса, поверхность которого определяется уравнением $n\beta \cos \vartheta = 1$. Наблюдаемая частота ω связана с углом ϑ и величинами β , $n(\omega)$ формулой

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{n(\omega) \beta \cos \vartheta - 1} \quad [n(\omega) \beta \cos \vartheta > 1],$$

представляющей собой, как и в случае задачи 582, уравнение относительно ω . Это уравнение допускает, в общем случае, несколько решений (сложный сверхсветовой эффект Доплера).

679. Обозначим через ϑ_1 угол между начальным импульсом электрона p_0 и направлением распространения мягкого кванта, а через ϑ_2 — угол между p_0 и направлением распространения жесткого кванта. Из закона сохранения 4-импульса (ср. задачу 675) в предположении $\hbar\omega_1 \ll \mathcal{E}_0$, $\hbar\omega_0 \ll \mathcal{E}_0$ следует

$$\cos \vartheta_2 = \frac{c}{v_0 n(\omega_1)} + \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1} \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{c} \cos \vartheta_1}{\frac{v_0}{c} n(\omega_1)}. \quad (1)$$

Отсюда видно, что жесткий черенковский квант $\hbar\omega_2$ распространяется внутри черенковского конуса, отвечающего мягкому черенковскому кванту с частотой ω_1 . Угол раствора этого конуса при принятой точности определяется условием $\cos \vartheta_1 = c/v_0 n(\omega_1)$. Для возникновения жесткого излучения Вавилова–Черенкова необходимо выполнение неравенства $v_0 > c/n(\omega_1)$, как и в случае обычного черенковского излучения. Это возможно только при $n(\omega_1) > 1$. Следовательно, один из квантов должен быть достаточно мягким. Решая (1) относительно $\hbar\omega_2$, получим

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 \frac{n(\omega_1) \frac{v_0}{c} - 1}{1 - \frac{v_0}{c}}.$$

$$680. \quad \hbar\omega_2 = \frac{2\hbar\omega_1 [n(\omega_1) \cos \vartheta_1 - 1]}{(mc^2/\mathcal{E}_0)^2 + 2(\hbar\omega_1/\mathcal{E}_0)[n(\omega_1) \cos \vartheta_1 - 1] + \vartheta_2^2}.$$

Максимальное значение $\hbar\omega_2$ достигается при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Частные случаи:

при $\mathcal{E}_0 \ll (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx 2\hbar\omega_1 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 [n(\omega_1) - 1],$$

при $\mathcal{E}_0 \gg (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx \mathcal{E}_0.$$

Из последнего выражения видно, что жесткий черенковский квант может уносить большую часть первоначальной энергии ультрарелятивистского электрона.

681. Угол рассеяния принимает дискретные значения, определяемые уравнением

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\pi \hbar}{ap},$$

где $\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}$, n_i — целые числа.

683. При $\hbar\omega \ll \mathcal{E}_0$

$$\hbar\omega = \frac{(qc)^2/2\mathcal{E}_0}{(mc^2/\mathcal{E}_0)^2 + \vartheta^2 - 2(qc/\mathcal{E}_0)}.$$

Энергия $\hbar\omega$ тормозного кванта принимает дискретные значения при фиксированных значениях угла ϑ , так как передаваемый импульс $\mathbf{q} = 2\pi \hbar \mathbf{g}$ дискретен.

§ 2. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

$$684. \quad \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m\mathbf{v}v}{c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \mathbf{F};$$

$$a) \quad \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{при} \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{F};$$

$$б) \quad \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{при} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{F};$$

$$в) m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Величины $\frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$ и $\frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ иногда называют продольной и поперечной массами соответственно.

$$685. \quad \mathbf{F} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}') \cdot \mathbf{v}}{v^2}, \quad \mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} - (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}}{v^2},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$686. \quad F = \gamma^2 \frac{mv^2}{R}.$$

$$688. \quad \psi(\alpha) = -\frac{2\kappa(1 - \beta^2)}{\sqrt{(1 - \beta^2) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \ln r, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c}, \quad r - \text{расстояние}$$

от точки наблюдения до провода.

$$689. \quad F = \frac{2e\kappa}{\gamma r}.$$

Решить задачу можно разными способами:

а) непосредственно вычислить электромагнитную силу, действующую на движущийся точечный заряд со стороны линейного заряда и тока (учесть лоренцово сокращение!);

б) определить силу в той системе отсчета, в которой магнитное поле отсутствует и воспользоваться формулами преобразования 4-силы;

в) воспользоваться конвекционным потенциалом ψ , полученным в задаче 668,

$$\mathbf{F} = -e \operatorname{grad} \psi.$$

$$690. \quad F = e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{2\mathcal{I}_r}{vr}, \quad \text{где } r - \text{расстояние электрона от оси пучка,}$$

$$\mathcal{I}_r = \frac{2\pi v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^r \rho(r) r dr - \text{ток через круг радиуса } r,$$

$$v = \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right) \left(1 + \frac{eV}{2mc^2}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2eV}{m}} - \text{скорость электронов (см.}$$

задачу 591).

На поверхностный электрон действует сила

$$F = e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{2\mathcal{I}}{va}, \quad \text{где } a - \text{радиус пучка.}$$

691. Ускорение наружного электрона нормально к оси пучка и к скорости электрона, поэтому в лабораторной системе отсчета имеем (см. ответы к задачам 684 и 690):

$$\dot{v}_n = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{m} F = \frac{2e\mathcal{E}}{mav} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Уширение пучка

$$\Delta a = \frac{\dot{v}_n t^2}{2} = \frac{\dot{v}_n L^2}{2v^2}.$$

Согласно условию $\Delta a \ll L$, откуда $\frac{\dot{v}_n L}{v} \ll v$ или $\dot{v}_n t \ll v < c$. Таким образом, применение нерелятивистской формулы для вычисления Δa оправдано.

То же значение Δa можно получить, рассматривая уширение пучка в системе отсчета, движущейся вместе с электронами пучка; в этой системе на электроны действует только электрическая сила.

692. Выберем ось $x \parallel eE$. Дифференциальные уравнения движения в четырехмерной форме имеют в данном случае вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{d(ct)}{d\tau}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{dx}{d\tau}.$$

Интегрируя эту систему с начальными условиями:

$$x = y = z = ct = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p_{0x}}{m}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{p_{0y}}{m},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = 0, \quad c \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}_0}{mc} \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4},$$

найдем уравнения траектории частицы в четырехмерном пространстве:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{|e|E} \left(\operatorname{ch} \frac{|e|E\tau}{mc} - 1 \right) + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \operatorname{sh} \frac{|e|E\tau}{mc},$$

$$y = \frac{p_{0y}\tau}{m}, \quad z = 0,$$

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{|e|E} \operatorname{sh} \frac{|e|E\tau}{mc} + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \left(\operatorname{ch} \frac{|e|E\tau}{mc} - 1 \right).$$

Из последнего уравнения находим

$$\tau = \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \frac{\mathcal{E}_0}{c}}.$$

Используя это выражение и исключая sh и ch из первого и последнего уравнений, получим закон движения в трехмерной форме.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{|e|E} \left[\sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{c} \right]; \\ y(t) &= \frac{cp_{0y}}{|e|E} \ln \frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \frac{\mathcal{E}_0}{c}}; \\ z(t) &= 0. \end{aligned}$$

При $p_0 \ll mc$ и $t \ll \frac{mc}{|e|E}$ движение нерелятивистское. Выражения для x , y , z переходят при этом в обычные нерелятивистские формулы равноускоренного движения:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p_{0x}}{m}t + \frac{|e|E}{2m}t^2; \\ y(t) &= \frac{p_{0y}}{m}t. \end{aligned}$$

По истечении достаточно большого времени с момента начала движения ($t \gg \frac{mc}{|e|E}$) скорость частицы становится близкой к c (даже если она была мала в начале). При этом

$$\begin{aligned} x(t) &= ct - \frac{mc^2}{|e|E}, \\ y(t) &= \frac{cp_{0y}}{|e|E} \ln \frac{2|e|Et}{mc} \end{aligned}$$

и движение становится равномерным. Ход $x(t)$ и $y(t)$ представлен на рис. 113а и 113б соответственно. Движение, которое получается при $p_{0y} = 0$ (см. рис. 113а), принято называть гиперболическим.

693. Траектория частицы определяется уравнением:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{|e|E} \left(\operatorname{ch} \frac{|e|E}{cp_{0y}} y - 1 \right) + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \operatorname{sh} \frac{|e|E}{cp_{0y}} y.$$

В нерелятивистском пределе $\mathcal{E}_0 = mc^2$, $p_0 \ll mc$ и $\frac{|e|Ey}{cp_{0y}} \ll 1$. Последнее следует из того, что $|e|E\tau$ — приобретенный частицей импульс — должен быть в нерелятивистском случае мал по сравнению с mc . Таким образом,

$$x = \frac{m|e|Ey^2}{2p_{0y}^2} + \frac{p_{0x}}{p_{0y}} y.$$

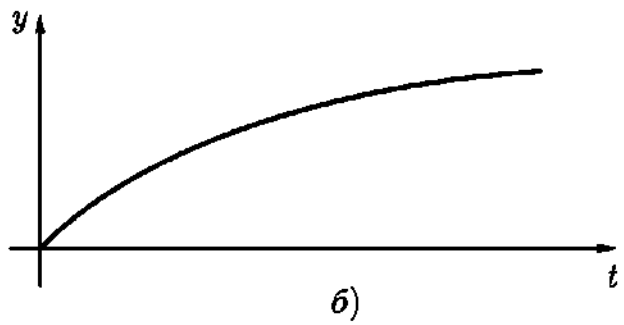
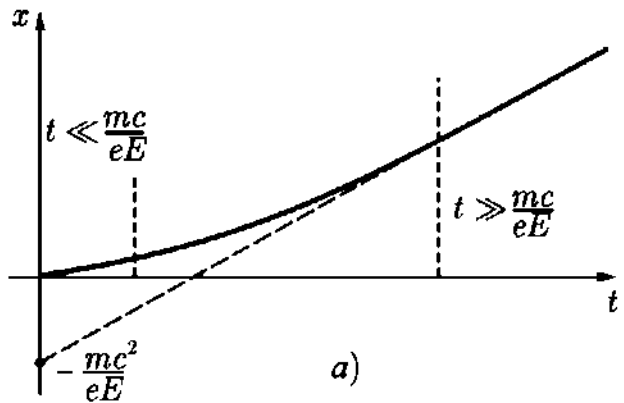


Рис. 113

694. $l = \frac{\mathcal{E} - mc^2}{eE}.$

695. Направим ось $z \parallel \mathbf{H}$. Будем исходить из дифференциальных уравнений движения в четырехмерной форме¹:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega_1 \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\omega_1 \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0,$$

где $\omega_1 = \frac{eH}{mc}$.

Первые два уравнения удобно записать в виде $\frac{d^2u}{d\tau^2} + i\omega_1 \frac{du}{d\tau} = 0$, где $u = x + iy$. Из последнего уравнения получим

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{mc} \tau, \quad \mathcal{E}_0 = c\sqrt{p_0^2 + m^2c^2}, \quad \mathcal{E} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \mathcal{E}_0.$$

¹ Можно исходить также из трехмерного уравнения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}$, сделав в нем замену $\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}$ и воспользовавшись тем, что $\mathcal{E} = \text{const}$ (магнитное поле не совершает работы над частицей).

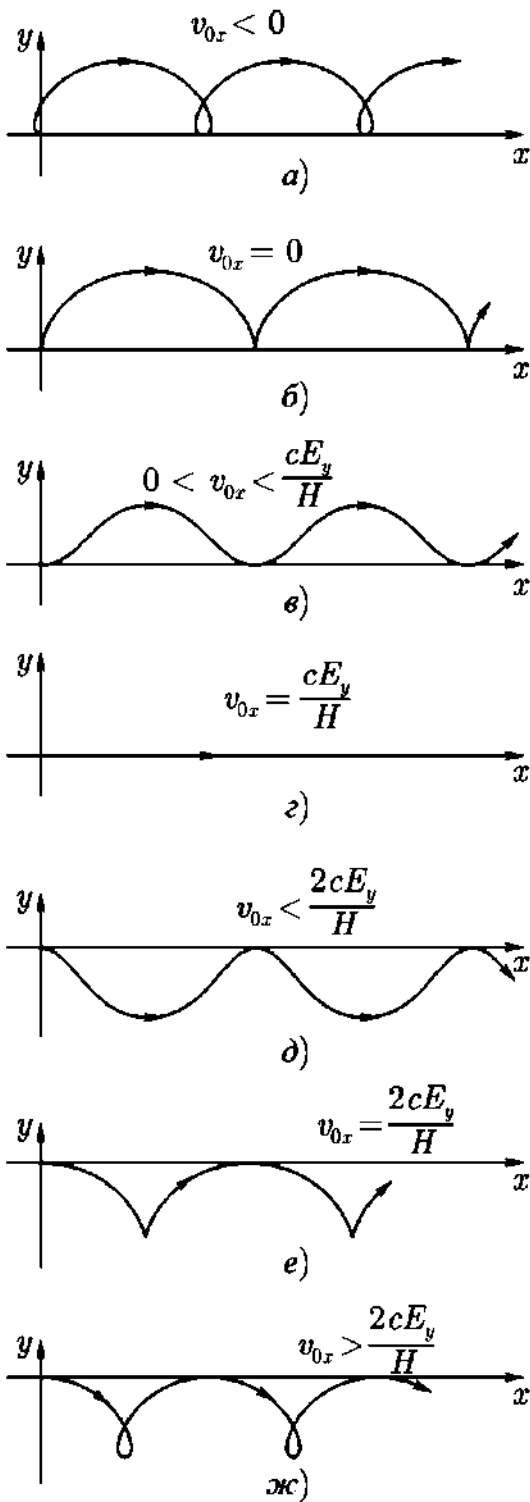


Рис. 114

Энергия частицы не зависит от времени, так как силы магнитного поля не совершают работы. Интегрируя уравнения для u и z , отделив действительную и мнимую части u и выразив собственное время τ через t , найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= R_1 \cos(\omega_2 t + \alpha) + \frac{cp_{0y}}{eH} + x_0, \\ y &= -R_1 \sin(\omega_2 t + \alpha) - \frac{cp_{0x}}{eH} + y_0, \\ z &= v_{0z}t. \end{aligned} \right\} (1)$$

Из уравнений (1) видно, что частица движется в магнитном поле по винтовой линии, навитой на силовые линии магнитного поля. Радиус этой винтовой линии равен $R = |R_1|$, где $R_1 = \frac{p_{0\perp}c}{eH}$, $p_{0\perp} = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}$. Частота обращения равна $\omega = |\omega_2|$, где $\omega_2 = \frac{eHc}{\mathcal{E}}$ (знак заряда может быть отрицательным). Шаг винтовой линии равен

$$\frac{2\pi|v_{0z}|}{\omega} = \frac{2\pi\mathcal{E}|v_{0z}|}{|e|Hc},$$

где $v_{0z} = \frac{p_{0z}c^2}{\mathcal{E}}$.

Очевидно, что $R = \frac{v_{0\perp}}{\omega}$, где $v_{0\perp} = \frac{p_{0\perp}c^2}{\mathcal{E}}$ — составляющая скорости частицы, перпендикулярная к полю. При малой скорости частицы $\mathcal{E} = mc^2$ и

$$R = \frac{mcv_{0\perp}}{|e|H}, \quad \omega = \frac{|e|H}{mc}.$$

Угол α определяется уравнениями:

$$\sin \alpha = -\frac{p_{0x}}{p_{0\perp}}, \quad \cos \alpha = -\frac{p_{0y}}{p_{0\perp}}.$$

696.

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t, \\ y &= a(\cos \omega t - 1), \\ z &= \frac{eE_z}{2m} t^2 + v_{0z} t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $a = \frac{v_{0x} - \frac{cE_y}{H}}{\omega}$.

Вдоль оси z происходит равноускоренное движение под действием z -составляющей электрического поля. Движение в плоскости xy представляет собою обращение заряда в однородном магнитном поле по окружности, радиус которой a , а центр равномерно движется («дрейфует») в направлении, перпендикулярном плоскости (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

Скорость дрейфа

$$v_{др} = \frac{cE_y}{H}.$$

Возможные проекции траектории частицы на плоскость приведены на рис. 114. Траектории а), в), д), ж) являются трохоидами общего вида, б), е) — циклоидами. Движение будет нерелятивистским, если $v_0 \ll c$, $\frac{E_y}{H} \ll 1$ и время t не слишком велико:

$$t \ll \frac{mc}{eE_z} = \frac{H}{\omega E_z}.$$

$$\begin{aligned} 697. \quad x &= \frac{p_{0x}c}{eH} \sin \kappa H \tau + \frac{p_{0y}c}{eH} (\cos \kappa H \tau - 1), \\ y &= \frac{p_{0x}c}{eH} (\cos \kappa H \tau - 1) + \frac{p_{0y}c}{eH} \sin \kappa H \tau, \\ z &= \frac{\mathcal{E}_0}{eH} (\operatorname{ch} \kappa E \tau - 1) + \frac{p_{0z}c}{eH} \operatorname{sh} \kappa E \tau, \\ ct &= \frac{p_{0z}c}{eH} (\operatorname{ch} \kappa E \tau - 1) + \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \kappa E \tau, \end{aligned}$$

где $\kappa = \frac{e}{mc}$.

698. а) Пусть электрическое поле $\mathbf{E} \parallel y$, магнитное поле $\mathbf{H} \parallel z$ (в системе S). В начальный момент $t = 0$ частица находится в точке $x = y = z = 0$ и обладает импульсом p_0 . Движение имеет различный характер в случаях $E > H$ и $H > E$. В первом случае существует, как это следует из вида инвариантов поля $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$, $E^2 - H^2 > 0$, такая система

отсчета S' , в которой отсутствует магнитное поле. Из преобразований Лоренца для поля видно, что система S' должна двигаться относительно S параллельно оси x со скоростью $V = \frac{cH}{E}$ (см. задачу 603). Интересующие нас уравнения движения частицы в S получаются из уравнений движения частицы в однородном электрическом поле E' с помощью преобразований Лоренца: $x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ и т. д. При этом E' , p'_{0x} , p'_{0y} , p'_{0z} должны быть выражены через величины без штрихов. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{E(cp_{0x}E - \mathcal{E}_0H)}{mc(E^2 - H^2)}\tau + \frac{H(\mathcal{E}_0E - cp_{0x}H)}{e(E^2 - H^2)^{3/2}} \operatorname{sh} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau + \\ &\quad + \frac{cp_{0y}H}{e(E^2 - H^2)} (\operatorname{ch} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau - 1), \\ \text{где } \kappa &= \frac{e}{mc}; \\ y &= \frac{\mathcal{E}_0E - cp_{0x}H}{e(E^2 - H^2)} (\operatorname{ch} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau - 1) + \\ &\quad + \frac{p_{0y}c}{e\sqrt{E^2 - H^2}} \operatorname{sh} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau; \\ z &= \frac{p_{0z}}{m}\tau; \\ ct &= \frac{H(cp_{0x} - \mathcal{E}_0H)}{mc(E^2 - H^2)}\tau + \frac{E(\mathcal{E}_0E - cp_{0x}H)}{e(E^2 - H^2)^{3/2}} \operatorname{sh} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau + \\ &\quad + \frac{cp_{0y}E}{e(E^2 - H^2)} (\operatorname{ch} \kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau - 1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При $H > E$ преобразование от системы отсчета, в которой имеется только магнитное поле, приводит к результатам, отличающимся от (1) только заменой E на H . При выполнении такой замены нужно учитывать, что $\operatorname{sh} i\alpha = i \sin \alpha$, $\operatorname{ch} i\alpha = \cos \alpha$. Случай $E = H$ можно получить из написанных формул предельным переходом $E \rightarrow H$. Результат:

$$x = \frac{\kappa^2 H^2}{6m} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{0x} \right) \tau^3 + \frac{cp_{0y} \kappa^2 H}{2e} \tau^2 + \frac{p_{0x}}{m} \tau$$

и т. д.

Решение для случая б) аналогично решениям задач 692, 695.

699. $T = mc^2 \left(\frac{dt}{d\tau} - 1 \right)$, откуда, например, в случае, рассмотренном в задаче 697, получим:

$$T = \mathcal{E}_0 \operatorname{ch} \kappa E \tau + c p_{0z} \operatorname{sh} \kappa E \tau - mc^2.$$

700. Исходя из результата задачи 603 и вычисляя $\frac{V}{c}$ с точностью до первого порядка по $\frac{E}{H}$, получим $\frac{V}{c} = \frac{E_y}{H}$. Схема решения — как в задаче 600. Во всех вычислениях нужно пренебречь малыми членами второго и более высоких порядков по $\frac{E_y}{H}$, $\frac{E_z}{H}$ и $\frac{v_0}{c}$. Окончательно найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + c \frac{E_y}{H} t, \\ y &= a (\cos \omega t - 1) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t, \\ z &= \frac{e E_z t^2}{2m} + v_{0z} t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$a = \frac{v_{0x} - \frac{c E_y}{H}}{\omega} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{e H}{m c}.$$

В начальный момент $t = 0$ частица находится в точке $x = y = z = 0$. В формулах (1) содержится, в частности, результат задачи 696.

701. Выберем ось x вдоль направления распространения плоской волны. Тогда поле волны будет полностью характеризоваться двумя функциями от t' , например, $E_y(t')$ и $E_z(t')$:

$$E[0, E_y(t'), E_z(t')], \quad H[0, -E_z(t'), E_y(t')].$$

Из уравнений (XI.19) сначала получим, что $t' = \tau$, затем найдем уравнения движения частицы в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{2m^2 c} \int_0^\tau p_\perp^2 d\tau, & y(\tau) &= \frac{1}{m} \int_0^\tau p_y d\tau, \\ z(\tau) &= \frac{1}{m} \int_0^\tau p_z d\tau, & t(\tau) &= \tau + \frac{1}{2m^2 c^2} \int_0^\tau p_\perp^2 d\tau, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p}_\perp = e \int_0^\tau \mathbf{E}(t') = e_y p_y + e_z p_z$ — составляющая импульса частицы в плоскости \mathbf{E} , \mathbf{H} .

702. Координаты частицы:

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = y_0 \operatorname{ch} \omega t, \quad z = vt,$$

где $\omega^2 = \frac{2ek}{m}$.

Из полученных зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ видно, что с помощью линзы рассматриваемого типа может быть сформирован пучок заряженных частиц, имеющий форму плоской ленты.

$$\begin{aligned} 703. \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) &= \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + eE_r + \frac{e}{c}(-H_\alpha \dot{z} + H_z r \dot{\alpha}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2 \dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) &= e \left[E_\alpha + \frac{1}{c}(H_r \dot{z} - H_z \dot{r}) \right] r, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) &= e \left[E_z + \frac{1}{c}(H_\alpha \dot{r} - H_r r \dot{\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

Первое и третье из этих уравнений имеют вид обычных уравнений движения Ньютона (но с переменной массой $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). При этом в правой части первого уравнения содержится член $\frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, не зависящий от вида электромагнитных сил (центробежная сила). Второе уравнение выражает производную по времени от момента импульса частицы относительно оси z через z -составляющую момента силы Лоренца.

704. При $H = 0$ траектории электронов прямолинейны. По мере увеличения магнитного поля траектории все больше искривляются в плоскости, перпендикулярной оси. Введем цилиндрические координаты r, α, z , где z совпадает с осью цилиндра. Электроны перестанут попадать на анод, когда при $\dot{r}|_{r=b} = 0$. При этом $\dot{\alpha}|_{r=b} = \frac{v_{\max}}{b}$. Воспользуемся вторым из уравнений в ответе к задаче 703, которое в данном случае принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2 \dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -\frac{e}{c} H(r) r \frac{dr}{dt}. \quad (1)$$

Проинтегрируем (1) вдоль траектории частицы от $r = a$ до $r = b$:

$$\left. \frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right|_{r=a}^{r=b} = -\frac{e}{2\pi c} \int_a^b 2\pi H r dr = -\frac{e\Phi}{2\pi c}.$$

Отсюда

$$\Phi_{\text{кр}} = \frac{2\pi cb}{|e|} p_{\text{max}} = 2\pi cb \sqrt{\frac{2mV}{|e|} \left(1 + \frac{|e|V}{2mc^2}\right)}, \quad (2)$$

если воспользоваться результатом задачи 621 и тем, что $T_{\text{max}} = |e|V$.

При малой разности потенциалов $|e|V \ll mc^2$ (это эквивалентно тому, что $v \ll c$), результат (2) упрощается:

$$\Phi_{\text{кр}} = 2\pi cb \sqrt{\frac{2mV}{|e|}}. \quad (3)$$

705. Разность потенциалов V должна быть больше, чем

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{4\mathcal{J}^2}{c^2} \ln^2 \frac{b}{a} + \frac{m^2 c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{|e|}.$$

При $|e|V \ll mc^2$ (нерелятивистские электроны) получаем из общей формулы:

$$V_{\text{кр}} = \frac{2\mathcal{J}^2 |e|}{mc^4} \ln^2 \frac{b}{a}.$$

706. $b = ae^{\frac{p_0 c^2}{\mathcal{J}|e|}}$, где $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

708. Воспользуемся цилиндрическими координатами r, α , начало которых совпадает с зарядом Ze и полярная ось направлена вдоль момента импульса частицы. Тогда движение происходит в плоскости $z = 0$, причем r будет представлять собой расстояние между зарядами $-e$ и Ze . Первые два уравнения в ответе к задаче 703 примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{mr\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) &= \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{Ze^2}{r^2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из второго уравнения следует, что момент импульса является интегралом движения:

$$\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = K = \text{const.} \quad (2)$$

Другим интегралом движения является полная энергия системы

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Ze^2}{r} = \mathcal{E} = \text{const.} \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что возможны траектории двух основных типов. При больших значениях r полная энергия $\mathcal{E} = mc^2 + T$ (T — кинетическая энергия), поскольку при $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия $\frac{Ze^2}{r} \rightarrow 0$. Так как $T \geq 0$, то при $E < mc^2$ частица не может далеко отойти от притягивающего центра и ее траектория заключена в ограниченной области (финитное движение). При $E > mc^2$ существуют ветви траектории, уходящие на бесконечность (инфинитное движение).

Найдем дифференциальное уравнение, которым определяются траектории частицы. Из (2) следует

$$\frac{d}{dt} = \frac{K\sqrt{1-v^2/c^2}}{mr^2} \frac{d}{d\alpha}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в первое из уравнений (1), получим дифференциальное уравнение траектории частицы:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{1}{r} \right) + (1 - \rho^2) \frac{1}{r} = \frac{Ze^2\mathcal{E}}{K^2c^2}, \quad (5)$$

где

$$\rho = \frac{Ze^2}{Kc}.$$

Интегрирование этого уравнения дает при $\rho \neq 1$:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \sqrt{1 - \rho^2} \alpha}, \quad p = \frac{K^2c^2 - Z^2e^4}{Ze^2\mathcal{E}}, \quad (6)$$

где ε — постоянная интегрирования. Вторую постоянную интегрирования можно исключить соответствующим выбором начала отсчета угла α , а величину ε выразить через \mathcal{E} и K . Траектории симметричны относительно оси x ($\alpha = 0$).

Рассмотрим подробнее случай $\rho < 1$. Как видно из (6), в этом случае частица не приближается к центру ближе, чем на расстояние $r_{\min} = \frac{\rho}{1+\epsilon}$, если принять что $\epsilon > 0$. В формуле (6) начало отсчета угла α выбрано так, что $r = r_{\min}$ при $\alpha = 0$. Частица может многократно проходить на

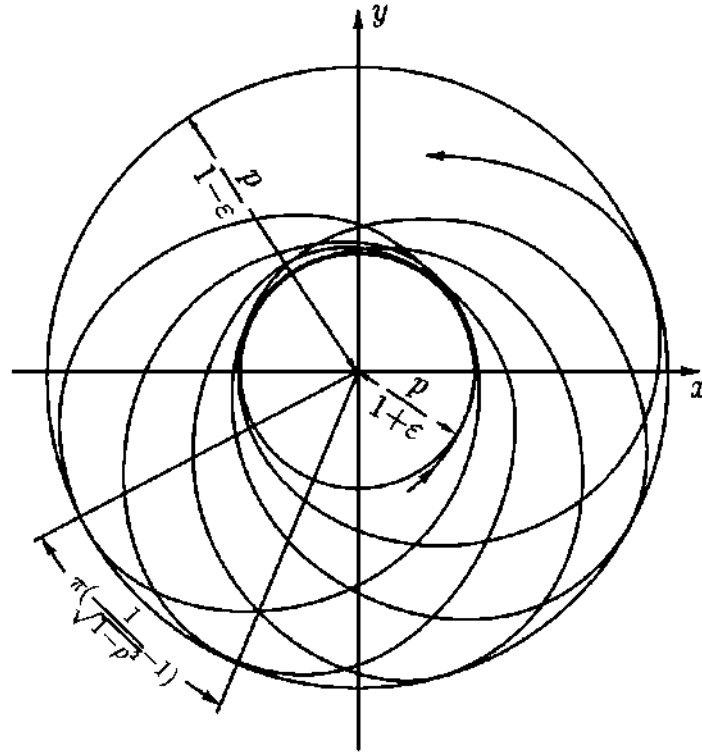


Рис. 115

расстоянии r_{\min} от центра. Во всех таких точках $\dot{r} = 0$ и скорость направлена перпендикулярно к радиусу-вектору r . Поэтому $K = \frac{mvr_{\min}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Исключая

отсюда и из уравнения (3) $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{Ze^2}{r_{\min}}$ величину v и используя выражение r_{\min} через ϵ , найдем:

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{\mathcal{E}^2} (1 - \rho^2)}. \quad (7)$$

Из (7) видно ($\rho < 1$), что при $\mathcal{E} < mc^2$ параметр $\epsilon < 1$. Движение при этом финитно и траектория «эллипсоидна» (рис. 115). Она име-

ет вид незамкнутой, вообще говоря, розетки, заключенной между окружностями с радиусами $\frac{p}{1+\varepsilon}$ и $\frac{p}{1-\varepsilon}$. Ее можно получить путем вращения (прецессии) нерелятивистской эллиптической траектории в своей плоскости. Полное колебание величины r от минимального значения $r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ (перигелий) до максимального значения $r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$ (апогей) и обратно до

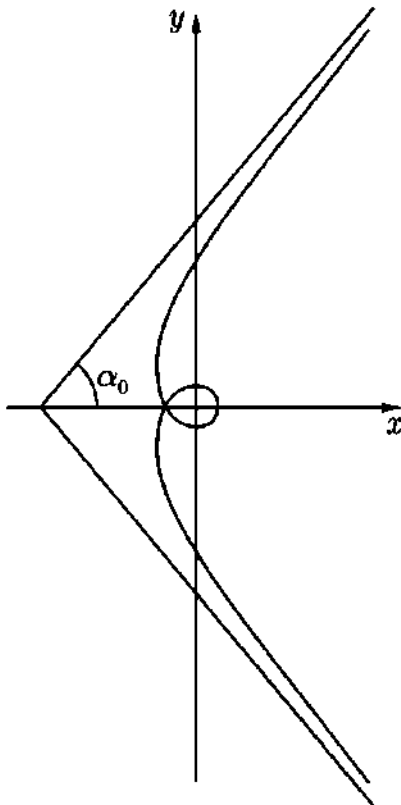


Рис. 116

При $\rho \ll 1$ рассмотренные траектории переходят в обычные эллипс ($\varepsilon < 1$), гиперболу ($\varepsilon > 1$) и параболу ($\varepsilon = 1$) нерелятивистской кеплеровой задачи. Это естественно, так как при $\frac{v}{c} \ll 1$ выполняется условие $\rho \ll 1$.¹

¹Можно произвести такую оценку величины ρ в нерелятивистском случае:

$$\rho = \frac{Ze^2}{Kc} \sim \frac{Ze^2}{rmvc} \sim \frac{|U|}{mvc}.$$

По теореме вириала $|U| = 2T \approx mv^2$, так что $\rho \sim \frac{v}{c} \ll 1$.

нового минимума происходит при возрастании α на $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Перигелий орбиты, таким образом, за один период изменения r поворачивается на угол $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} - 1 \right)$. Если $\sqrt{1-\rho^2}$ представляет собой рациональное число, то после некоторого числа оборотов траектория замыкается на себя.

При $\mathcal{E} > mc^2$ параметр $\varepsilon > 1$. Движение инфинитно и траектория «гиперболовидна» (рис. 116). Она имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\alpha_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Частица, приближающаяся к заряду Ze по одной из этих ветвей, может совершить вокруг заряда несколько оборотов, раньше чем уйти от него на бесконечность по другой ветви.

Случаю $\mathcal{E} = mc^2$ отвечает $\varepsilon = 1$. Движение в этом случае также инфинитно, а траектория «параболовидна».

709. Решение уравнения (5) предыдущей задачи в случае $\rho > 1$ удобнее записать в следующем виде:

$$r = \frac{p_1}{-1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 1} \alpha}, \quad (1)$$

где

$$p_1 = \frac{-K^2 c^2 + Z^2 e^4}{Ze^2 \mathcal{E}},$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{m^2 c^4}{\mathcal{E}^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)}. \quad (2)$$

Траектории, описываемые уравнением (1), имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат при $\alpha \rightarrow \pm\infty$. Частица падает на силовой центр (в нерелятивистском случае падение на центр возможно только при $K = 0, \rho = \infty$). При $\mathcal{E} > mc^2$ параметр $\varepsilon_1 < 1$ и траектория имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\alpha_0 = \frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{arcsch} \frac{1}{\varepsilon_1}$ (рис. 117). При $\mathcal{E} < mc^2$, параметр $\varepsilon_1 > 1$, и траектория имеет вид, изображенный на рис. 118.

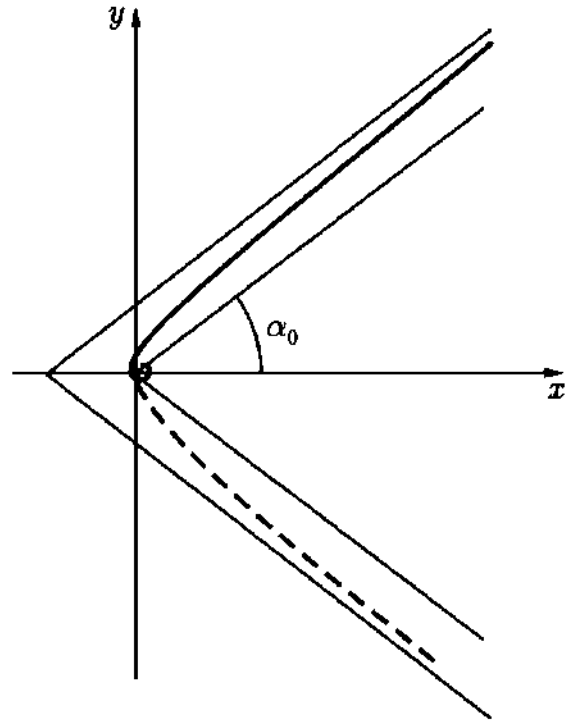


Рис. 117

В случае $\rho = 1$ решение вида (1) неприменимо и дифференциальное уравнение траектории должно быть проинтегрировано заново. Результат интегрирования:

$$r = \frac{2Ze^2 \mathcal{E}}{\mathcal{E}^2(\alpha^2 - 1) + m^2 c^4}. \quad (3)$$

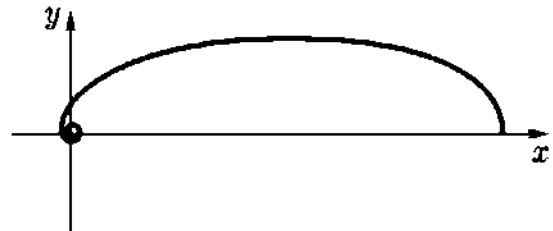


Рис. 118

Траектория также представляет собой спираль, закручивающуюся вокруг центра при $\alpha \rightarrow \pm\infty$, но медленнее, чем в случае $\rho > 1$. Общий характер траектории такой же, как в случаях, изображенных на рис. 117, 118.

710. В случае $\frac{Ze^2}{Kc} < 1$

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{Z^2 e^4}{K^2 c^2}}},$$

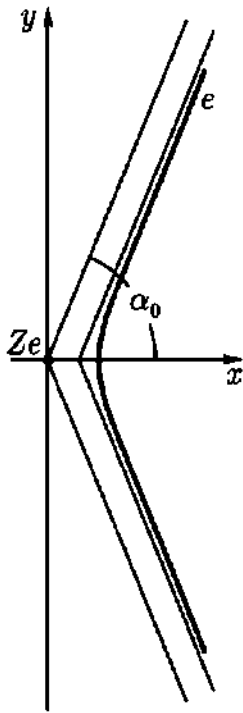


Рис. 119

где

$$p = -\frac{Z^2 e^4 - K^2 c^2}{Z e^2 \mathcal{E}},$$

$$\varepsilon = \frac{c}{Z e^2 \mathcal{E}} \sqrt{K^2 \mathcal{E}^2 - m^2 c^2 (K^2 c^2 - Z^2 e^4)} > 1.$$

Траектория имеет гиперболоподобный характер (рис. 119). Две ее ветви уходят на бесконечность при $\alpha = \pm \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Z^2 e^4}{K^2 c^2}}} \operatorname{arccos} \frac{1}{\varepsilon}.$$

При $\frac{Z e^2}{K c} \ll 1$ частица движется по гиперболе. Этот случай отвечает нерелятивистскому движению, $v \ll c$ (см. примечание на стр. 530).

В случае $\frac{Z e^2}{K c} > 1$.

$$r = -\frac{p}{1 - \varepsilon \operatorname{ch} \alpha \sqrt{\frac{Z^2 e^4}{K^2 c^2} - 1}},$$

где $\varepsilon < 1$. Характер траектории такой же, как в первом случае. Две ее ветви уходят на бесконечность при

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{Z^2 e^4}{K^2 c^2} - 1}} \operatorname{arch} \frac{1}{\varepsilon}.$$

В случае $\frac{Z e^2}{K c} = 1$,

$$r = \frac{2 Z e^2 \mathcal{E}}{\mathcal{E}^2 (1 - \alpha^2) - m^2 c^4}.$$

Ветви траектории уходят на бесконечность при

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}}{\mathcal{E}}.$$

712. В случае $ee' < 0$ (притяжение):

$$r = \frac{a|\varepsilon^2 - 1|}{1 + \varepsilon \cos \alpha},$$

где

$$a = \left| \frac{ee'}{2\mathcal{E}} \right|, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}K^2}{\mu e^2 e'^2}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$K = \mu r^2 \dot{\alpha}$ — момент импульса, $\mathcal{E} = \frac{ee'}{r} + \frac{\mu v^2}{2}$ — полная энергия частицы, r, α — полярные координаты. Траектория частицы представляет собой коническое сечение: при $\mathcal{E} < 0$ — эллипс ($\varepsilon < 1$), при $\mathcal{E} > 0$ — гипербола, во внутреннем фокусе которой находится заряд e' ($\varepsilon > 1$), при $\mathcal{E} = 0$ — парабола ($\varepsilon = 1$).

В случае $ee' > 0$ (отталкивание):

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{-1 + \varepsilon \cos \alpha}.$$

В этом случае $\mathcal{E} > 0$ эксцентриситет $\varepsilon > 1$, и траектория представляет собой гиперболу с зарядом e' во внешнем фокусе.

713. Дифференциальное сечение рассеяния может быть вычислено по формуле

$$\sigma(\theta) = \frac{s ds}{\sin \theta d\theta}, \quad (1)$$

где θ — угол рассеяния частицы, соответствующий данному значению s -параметра соударения (прицельного расстояния). Связь s и θ может быть найдена из уравнения траектории частицы (см. задачу 712). В случае притяжения ($ee' < 0$) $\cos \alpha > -\frac{1}{\varepsilon}$. Угол α меняется от $-\alpha_0$ до α_0 (рис. 120) при прохождении частицей всей траектории ($\cos \alpha_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$). Угол рассеяния θ дополняет угол между асимптотами гиперболической траектории до π . Из рис. 120 видно, что $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{2} + \alpha_0$, откуда $\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} - 1 = \varepsilon^2 - 1 =$

$= \frac{2\mathcal{E}K^2}{\mu e^2 e'^2}$. Момент импульса выражается через прицельное расстояние s

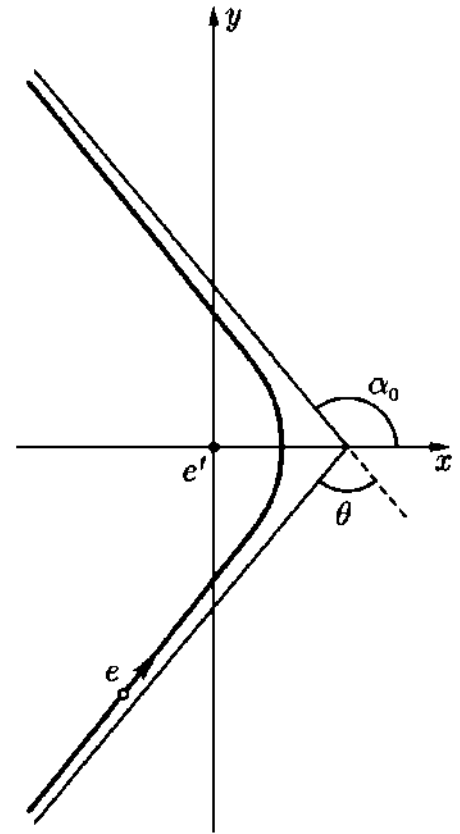


Рис. 120

формулой $K = mv_0s$. Таким образом,

$$s^2 = \frac{e^2 e'^2}{m^2 v_0^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Дифференцируя и подставляя в (1), получим

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{ee'}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Это — известная формула Резерфорда. Тот же результат получается при $ee' > 0$.

714. В случае $ee' < 0$ (притяжение):

$$\theta = \left(\frac{2cK}{\sqrt{c^2 K^2 - Z^2 e^4}} - 1 \right) \pi - \frac{2cK}{\sqrt{c^2 K^2 - Z^2 e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{c^2 K^2 - Z^2 e^4}}{cZe^2},$$

где v_0 — скорость заряда при $r \rightarrow \infty$.

В случае $ee' > 0$ (отталкивание):

$$\theta = \pi - \frac{2cK}{\sqrt{c^2 K^2 - Z^2 e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{c^2 K^2 - Z^2 e^4}}{cZe^2}.$$

715. Малым углам рассеяния отвечают большие прицельные расстояния s . Поэтому, положив $K = p_0 s$, где p_0 — импульс частицы при $r \rightarrow \infty$, можно найти интересующую нас зависимость угла рассеяния θ от s предельным переходом $s \rightarrow \infty$ (при этом, очевидно, $K > \frac{|ee'|}{c}$) в общих формулах, приведенных в предыдущей задаче. При выполнении предельного перехода как в случае $ee' < 0$, так и в случае $ee' > 0$, получается один и тот же результат:

$$\theta = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{v_0 p_0 s}{|ee'|} = \frac{2Ze^2}{v_0 p_0 s} \ll 1,$$

откуда $s = 2 \frac{|ee'|}{v_0 p_0 \theta}$ и

$$\sigma(\theta) = \frac{s ds}{\theta d\theta} = 4 \left(\frac{ee'}{v_0 p_0} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}.$$

$$716. \quad x = vt = \pi v \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{ma^3}{2e^2}}.$$

717. Ускоряющее электрическое поле:

$$E_\alpha = \frac{1}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где r — радиус орбиты электрона, Φ — магнитный поток, пронизывающий орбиту, α — азимут электрона.

При передвижении электрона на орбите на расстояние $r d\alpha$ поле E_α совершает работу

$$\delta A = E_\alpha r d\alpha. \quad (1)$$

Ускорение электрона происходит на орбите постоянного радиуса $r = \frac{cp}{eH_0}$ (см. задачу 695), где H_0 — магнитное поле на орбите, перпендикулярное ее плоскости и нарастающее со временем. Из условия $dr = 0$, находим

$$dp = \frac{p}{H_0} dH_0. \quad (2)$$

Энергия электрона $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ увеличивается на

$$d\mathcal{E} = \frac{c^2 p dp}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 p^2 dH_0}{\mathcal{E} H_0}, \quad (3)$$

если использовать равенство (2). Очевидно, что

$$\delta A = d\mathcal{E}. \quad (4)$$

Подставляя (1) и (3) в (4) и используя равенство $\frac{c^2 p}{\mathcal{E}} = v = r \frac{d\alpha}{dt}$, получим после интегрирования

$$\Phi = 2\Phi_0,$$

где $\Phi_0 = \pi r^2 H_0$.

Последним равенством и выражается искомое правило «2 к 1».

718. Энергия U взаимодействия двух заряженных частиц определяется формулой (XI.23), в которую нужно подставить заряд e_1 , одной из частиц и запаздывающие потенциалы φ_2 , A_2 поля другой частицы. Воспользовавшись разложениями, приведенными в задаче 757, получим:

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad A_2 = \frac{e_2 v_2}{cR}, \quad (1)$$

где R — расстояние между частицами. Выбрав калибровочную функцию χ в виде

$$\chi = \frac{e_2}{2c} \frac{\partial R}{\partial t},$$

произведем градиентное преобразование потенциалов. Новые потенциалы принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{e_2}{R}, \\ \mathbf{A}'_2 &= \mathbf{A}_2 + \text{grad } \chi = \frac{e_2[\mathbf{v}_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{n}]}{2cR}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Отсюда для энергии взаимодействия получаем формулу Брейта:

$$U = e_1\varphi_2 - \frac{e_1}{c}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}_2) = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] \right\}.$$

Эта формула приближенно учитывает то обстоятельство, что сила, действующая на одну из двух взаимодействующих заряженных частиц, находящихся на расстоянии R друг от друга, определяется предшествующим положением и состоянием движения другого заряда. Энергия и импульс передаются зарядами полю и переносятся полем от заряда к заряду в течение промежутка времени $\frac{R}{c}$. Частицы и поле образуют единую систему, и вследствие этого невозможно точное описание движения системы взаимодействующих частиц без привлечения степеней свободы поля.

719.

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^4}{8c^2} + \frac{e_1 e_2}{R} - \frac{e_1 e_2}{2c^2 R} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})].$$

720. Магнитный момент частицы прецессирует вокруг направления магнитного поля с угловой частотой $\omega = -\kappa \mathbf{H}$.

721. В мгновенно сопутствующей системе, согласно (X.25), существует магнитное поле

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — электрическое поле в неподвижной системе, а $v \ll c$. Спиновый механический момент в сопутствующей системе изменяется по закону

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{сопутств}} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}'.$$

С помощью формулы, приведенной в условии задачи, найдем

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{сопутств}} = \mathbf{m} \times \left(\mathbf{H}' - \frac{mc}{e}\boldsymbol{\omega}_T\right).$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением (VI.14) получаем, что $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{H}_{\text{эфф}} = \mathbf{H}' - \frac{mc}{e}\boldsymbol{\omega}_T.$$

Но

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{при} \quad \mathbf{H}_{\text{эфф}} = -\frac{1}{2mc}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathbf{l},$$

где \mathbf{l} — момент импульса частицы, создаваемый ее движением как целого (орбитальный момент). Энергия взаимодействия магнитного с эффективным полем имеет обычный вид

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{\text{эфф}}$$

и, дифференцируя эту величину по углам, определяющим ориентацию \mathbf{m} , можно найти обобщенные силы, действующие на магнитный момент. Окончательно получим

$$U = \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}.$$

Это выражение используется в квантовой теории атомов и называется энергией спин-орбитального взаимодействия (Я. И. Френкель, 1926 г.)

722. Энергия взаимодействия возникает только за счет томасовской прецессии и имеет вид

$$U = -\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}. \tag{1}$$

Рассмотренная в этой задаче ситуация приближенно осуществляется в атомных ядрах. На нуклоны в ядре действуют большие незлектрические (ядерные) силы и сравнительно слабые электростатические силы, которыми можно пренебречь. Поэтому энергия спин-орбитального взаимодействия определяется формулой (1), где V — потенциал ядерных сил. Учет спин-орбитального взаимодействия нуклонов играет важную роль при расчете ядерных уровней.

723. Отражение происходит при антипараллельной ориентации магнитного момента и поля, если угол скольжения α достаточно мал, так что $\sin \alpha \leq \sqrt{\frac{m_0 H}{\mathcal{E}}}$.

724. Движение нейтрона вдоль провода равномерно. Движение в плоскости, перпендикулярной проводу, происходит в потенциальном поле $U = \pm \frac{2m_0 \mathcal{J}}{cr}$. Следовательно, проекции траекторий нейтрона на эту плоскость имеют тот же вид, что и траектории относительно движения двух зарядов e и e' , взаимодействующих по закону Кулона (см. задачу 614). При этом в решении данной задачи нужно заменить ee' на $\pm \frac{2m_0 \mathcal{J}}{c}$, а под $\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{K^2}{2mr^2} + U(r)$ — понимать энергию поперечного движения ($K = mr^2\dot{\alpha}$ — момент импульса). В частности, при $\mathcal{E} < 0$ нейтроны совершают финитное движение около провода.

$$725. \quad l(\alpha) = \frac{m_0 \mathcal{J}}{cmv_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

ГЛАВА XII

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Вектор Герца и разложение по мультиполям

728. $\Delta\varphi = -4\pi\rho,$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

730. Плотность потока момента импульса:

$$\mathfrak{R} = \frac{(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}})}{2\pi c^3 r^2}.$$

При вычислении величины $-\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int \mathfrak{R} r^2 d\Omega$ полезно воспользоваться формулой $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$ (см. гл. I).

В результате получим:

$$-\frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} = \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

731. Магнитные силовые линии имеют вид окружностей, плоскости которых нормальны к оси z , а центры лежат на этой оси: Электрические силовые линии описываются следующими уравнениями.

$$C_1 = \sin^2 \vartheta \left[\frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) + k \sin(kr - \omega t) \right], \quad C_2 = \alpha,$$

где C_1, C_2 — постоянные.

732.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{Z}}{\partial t} = ea \left[\mathbf{e}_\vartheta \left(-i \frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{\omega}{cr^2} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} \right) \cos \vartheta \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z} = ea \left[\mathbf{e}_r \left(-\frac{i\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \sin \vartheta + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_\vartheta \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \vartheta + \mathbf{e}_\alpha \left(i \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{\omega}{cr^2} - \frac{i}{r^3} \right) \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)}.$$

В волновой зоне $r \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ выражения \mathbf{E} и \mathbf{H} упрощаются:

$$\mathbf{H} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (-i \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta) e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathbf{E} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta + i \mathbf{e}_\alpha) e^{i(kr - \omega t + \alpha)} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

При излучении в верхнюю полусферу ($\cos \vartheta > 0$) получается левая эллиптическая поляризация, в частности, при $\vartheta = 0$ — левая круговая поляризация. При излучении в нижнюю полусферу ($\cos \vartheta < 0$) — правая эллиптическая поляризация, переходящая в круговую при $\vartheta = \pi$. Волны, излучаемые в экваториальной плоскости, имеют линейную поляризацию. Угловое распределение и полная интенсивность излучения:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \bar{\gamma} \cdot nr^2 = \frac{e^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Рассмотренный случай осуществляется, например, при движении заряда в однородном магнитном поле.

733. $\mathbf{p} = \mathbf{m} = 0, \mathbf{Q} \neq 0,$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} = -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r} \sin \vartheta [\mathbf{e}_\vartheta \cos(2\omega t' - 2\alpha) + \mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta \sin(2\omega t' - 2\alpha)].$$

Частота колебаний распределения заряда и тока и, следовательно, частота поля вдвое превышает частоту ω обращения каждого из зарядов по орбите. Поляризация излучения — эллиптическая, приближающаяся к круговой

при $\vartheta \rightarrow 0, \pi$ и переходящая в линейную при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{2e^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{32}{5} \cdot \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}.$$

Если убрать один из зарядов, то интенсивность излучения возрастет по порядку величины в $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$ раз, т. е. весьма значительно, так как выполняется условие $\frac{a}{\lambda} \ll 1$.

734. Если угол между радиусами-векторами зарядов равен $\pi - \varphi$, то

$$\varphi = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{a\omega}{c}.$$

735. Направим ось x вдоль амплитуды момента осциллятора, опережающего по фазе, а в качестве плоскости xy выберем плоскость, в которой лежат моменты обоих осцилляторов. Обозначив через ϑ, α полярные углы орта \mathbf{n} , указывающего направление распространения волны, получим:

$$\mathbf{H}(r, t) = \mathbf{H}e^{-i\omega t'} = \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \left\{ \mathbf{e}_\vartheta [\sin \alpha + i \sin(\alpha - \varphi)] + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_\alpha [\cos \alpha + i \cos(\alpha - \varphi)] \cos \vartheta \right\}^{-i\omega t'}, \quad (1)$$

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{p^2 \omega^4}{8\pi c^3} \left\{ 2 - [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \varphi)] \sin^2 \vartheta \right\}, \quad \bar{I} = \frac{2p^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Излучение максимально в направлениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, перпендикулярных моментам обоих осцилляторов, и неравномерно распределено по азимуту. Это иллюстрируется на рис. 121 полярными диаграммами для случая $\varphi = 45^\circ$. На рис. 121а показано угловое распределение в плоскости $\varphi = 90^\circ$, на рис. 121б — угловое распределение в плоскости $\alpha = \frac{\varphi}{2} = 22,5^\circ$.

736. Сдвинув начало отсчета фазы на γ , получим новую амплитуду поля $\mathbf{H}e^{-i\gamma} = \mathbf{H}_1 - i\mathbf{H}_2$. Потребовав, чтобы $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = 0$, найдем, что

$$\operatorname{tg} 2\gamma = 2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \alpha - \sin^2(\alpha - \varphi) + [\cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha - \varphi)] \cos^2 \vartheta}. \quad (2)$$

Определив с помощью (2) $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$, найдем \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 в зависимости от $\vartheta, \alpha, \varphi$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\vartheta = 90^\circ$ поляризация линейная; плоскость поляризации перпендикулярна плоскости xy . При $\vartheta = 0, \pi$ поляризация эллиптическая, причем отношение полуосей эллипса равно $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; в частности, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0, \pi$ поляризация круговая. Легко исследуются также случаи $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$. Во всех этих случаях поляризация, вообще говоря, эллиптическая. При $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$ в направлениях, определяемых условием

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|,$$

поляризация получается круговой.

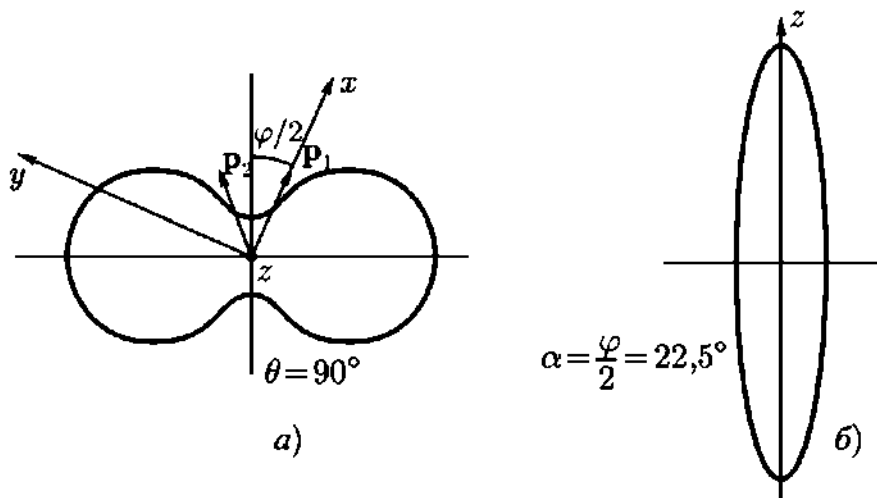


Рис. 121

При $\alpha = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ направления с круговой поляризации определяются уравнением $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|$.

$$737. \quad \bar{\gamma} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3 r^2} (1 + \cos^2 \vartheta) \mathbf{e}_r + \frac{e^2 a^2 \omega^3}{4\pi c^2 r^3} \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{N} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \omega^3}{c^3} \mathbf{e}_z.$$

Последний результат можно получить либо учитывая, что теряемый излучающей системой в единицу времени момент импульса $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}$ (см. задачу 730) равен вращательному моменту \mathbf{N} , приложенному к экрану, либо непосредственно по формуле \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int_{r \gg a} \mathbf{r} \times \bar{\gamma} r^2 d\Omega.$$

$$738. \quad \mathbf{H} = \frac{m\omega^2 \sin \varphi}{c^2 r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta + i\mathbf{e}_\alpha) e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

$$\mathbf{E} = \frac{m\omega^2 \sin \varphi}{c^2 r} (-\mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta + i\mathbf{e}_\vartheta) e^{i(kr - \omega t + \alpha)},$$

где $m = \frac{4\pi}{3} a^3 M$,

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{m^2 \omega^4 \sin^2 \varphi}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta),$$

$$\bar{I} = \frac{2m^2 \omega^4 \sin 2\varphi}{3c^3}.$$

$$739. \quad \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{9}{800\pi} \cdot \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta,$$

$$\bar{I} = \frac{3}{500} \cdot \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}.$$

$$740. \quad \mathbf{E} = \frac{qr}{r^3}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

741. Разлагая вектор Герца $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$ на монохроматические компоненты и используя разложение (П 3.20), получим:

$$\mathbf{Z}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t')}{r}, \quad (1)$$

где $t' = t - \frac{r}{c}$,

$$\mathbf{Z}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2r^2} \mathbf{Q}(t') + \frac{1}{2rc} \dot{\mathbf{Q}}(t'), \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}}{r} + \frac{c}{r^2} \left[\int \mathbf{m}(t') dt' \right] \times \mathbf{n}. \quad (3)$$

Эти формулы справедливы при $r \gg a$, где a — размер системы. Произвольная постоянная, возникающая при вычислении интеграла, входящего в (3), не сказывается на величине напряженностей поля.

742. Поле магнитного диполя:

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}(t')}{c^2 r} + \frac{\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}}(t')}{c^2 r},$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}_m = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - \dot{\mathbf{m}}}{cr^2} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{c^2 r}.$$

Поле электрического диполя получится из поля магнитного диполя путем замены $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{p}$, $\mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{E}_e$, $\mathbf{E}_m \rightarrow -\mathbf{E}_e$.

$$743. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3} \{p^2(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m^2 \sin^2 \vartheta + mp \sin \vartheta \sin \alpha\};$$

$I = \frac{2\omega_0^4}{3c^3}(p^2 + m^2)$. Здесь использована система координат, ось x которой направлена вдоль p , а ось z — вдоль m . Дипольные моменты в обоих случаях имеют значения

$$p = p_0 \cos \omega_0 t, \\ m = m_0 \sin \omega_0 t,$$

где $p_0 = q_0 d$, $m_0 = \pi R^2 q_0 \omega_0 / c$, q_0 — максимальный заряд одной из обкладок конденсатора, определяемый условием возбуждения системы, d — ширина зазора, R — радиус проволочного кольца в случае а) или цилиндрической оболочки в случае б).

Усреднив интенсивности излучения по периоду колебания, получим

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3} \{p_0^2(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m_0^2 \sin^2 \vartheta\}, \quad \bar{I} = \frac{\omega_0^4}{3c^3} (p_0^2 + m_0^2).$$

744. Дипольные моменты системы равны нулю, электрический квадрупольный момент имеет одну отличную от нуля компоненту Q_{zz} (если направить ось z вдоль p_0).

Вследствие этого вектор \mathbf{Q} будет параллелен оси z и равен $\mathbf{Q}(t') = Q_0 \cos \vartheta \cos \omega t' \mathbf{e}_z$ при соответствующем выборе начала отсчета времени, здесь $Q_0 = 2p_0 a$.

Удобно проводить вычисления в комплексной форме, воспользовавшись выражением (2) из решения задачи 741 и спроектировав \mathbf{Z} на оси сферической системы координат. Отделив вещественную часть, получим в результате:

$$H_\alpha = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4} \left[\left(\frac{k^3}{r} - \frac{3k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) - \frac{3k^2}{r^2} \cos(\omega t - kr) \right], \\ E_r = \frac{Q_0(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{2} \left[\left(\frac{3}{r^4} - \frac{k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{3k}{r^3} \sin(\omega t - kr) \right], \\ E_\vartheta = \frac{Q_0 \sin 2\vartheta}{4} \left[\left(\frac{6}{r^4} - \frac{3k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) + \left(\frac{k^3}{r} - \frac{6k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) \right], \\ \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{Q_0^2 \omega^6}{32\pi c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta, \quad \bar{I} = \frac{Q_0^2 \omega^6}{60c^5},$$

где $Q_0 = 2p_0 a$.

745. Выберем координатную систему, как показано на рис. 122. Распределение тока в антенне выражается формулой

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin \left[k \left(\xi + \frac{l}{2} \right) \right] e^{-i\omega t},$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{l}.$$

Электрический дипольный момент единицы длины антенны $P = \frac{i}{\omega} \mathcal{J}$, согласно (XII.9). Элемент $d\xi$ антенны можно рассматривать как электрический дипольный осциллятор с моментом $dp = P d\xi$. Поскольку выполняется неравенство $d\xi \ll \lambda$, то создаваемое элементом $d\xi$ в точке A магнитное поле можно вычислить по формулам (XII.17) и (XII.20):

$$d\mathbf{H}_0(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \mathbf{e}_\alpha \sin \vartheta P \left(t - \frac{r}{c} \right) d\xi,$$

где

$$r = r_0 - \xi \cos \vartheta.$$

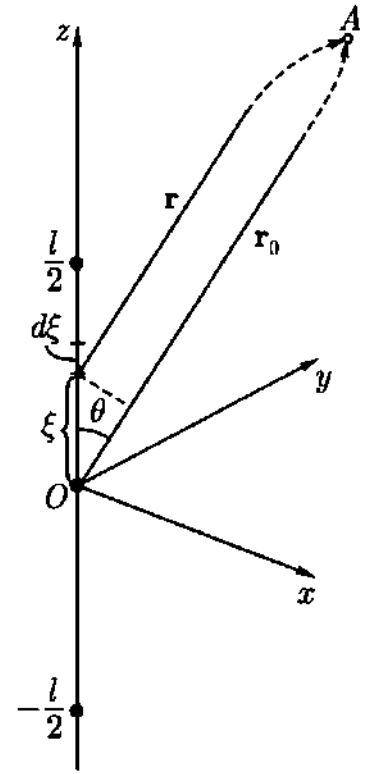


Рис. 122

Так как мы интересуемся только полем в волновой зоне, то величину $\frac{\sin \vartheta}{r}$, которая мало меняется в области $r \gg l$, можно вынести из-под знака интеграла. Таким образом

$$H_\alpha = -\frac{i\omega \sin \vartheta}{c^2 r_0} \mathcal{J}_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ik\xi \cos \vartheta} \sin m\pi \left(\frac{\xi}{l} + \frac{1}{2} \right) d\xi.$$

Выполнив интегрирование, найдем угловое распределение по формуле $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \overline{H_\alpha^2} r_0^2$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{\mathcal{J}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\cos^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta} & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ \frac{\mathcal{J}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta} & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Характер углового распределения виден из полярных диаграмм, приведенных на рис. 123. Штриховой линией показано распределение тока по длине антенны, сплошной — угловое распределение излучения.

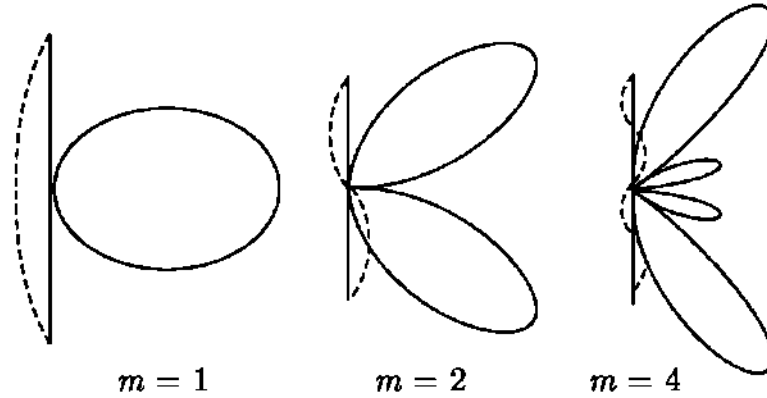


Рис. 123

746.

$$\bar{I} = \frac{\mathcal{I}_0^2}{2c} [\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)],$$

$$R = 2 \frac{\bar{I}}{\mathcal{I}_0^2} = \frac{1}{c} [\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)].$$

747.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\mathcal{I}_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \vartheta) \right]}{(1 - \cos \vartheta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{\mathcal{I}_0^2}{c} \left[C - 1 + \ln \frac{4\pi l}{\lambda} - Ci \left(\frac{4\pi l}{\lambda} \right) + \frac{\sin(4\pi l/\lambda)}{4\pi l/\lambda} \right],$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ — длина излучаемой волны, ϑ полярный угол, отсчитываемый от координатной оси ξ .

Легко убедиться, что бегущая волна излучает интенсивнее, чем стоячая волна с теми же значениями l , λ , \mathcal{I}_0 .

748. Если расстояние r точки наблюдения $A(r_0, \vartheta, \alpha)$ (рис. 124) от петли велико ($r \gg a$), то можно считать, что радиусы-векторы \mathbf{r} от всех эле-

ментов кольца $d\mathbf{l}$ параллельны, причем $r = r_0 - a \cos \varphi = r_0 - a \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)$ (см. задачу 1). Элемент $d\mathbf{l}$ обладает электрическим дипольным моментом $d\mathbf{p} = P d\mathbf{l} = \frac{i}{\omega} \mathcal{I} d\mathbf{l}$, где через P обозначен электрический дипольный момент единицы длины провода, и создает в точке A магнитное поле (см. (XII.20):

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\mathbf{p}(t') \times \mathbf{n}}{r} = \\ &= -i \frac{\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{-i\omega t + ikr_0 - iak \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} \times \\ &\quad \times \sin n\alpha' [\cos(\alpha' - \alpha) \mathbf{e}_\vartheta + \\ &\quad + \cos \vartheta \sin(\alpha' - \alpha) \mathbf{e}_\alpha] d\alpha'. \end{aligned}$$

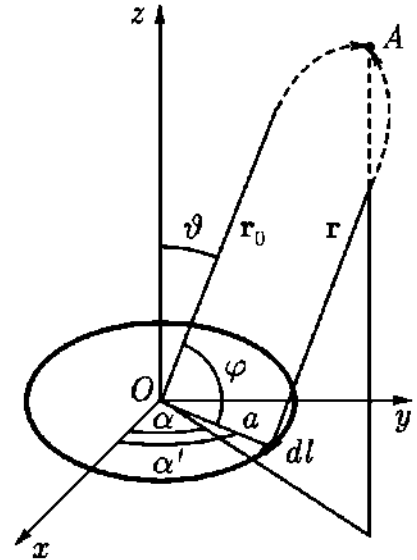


Рис. 124

В знаменателе последнего выражения пренебрегаем величиной порядка a по сравнению с r_0 . Этого нельзя делать в показателе степени, так как величина ak , вообще говоря, не мала и существенно влияет на фазу.

Задача нахождения поля сводится к интегрированию:

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega a}{c^2} \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha' - \alpha) \sin n\alpha' e^{-ika \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} d\alpha'.$$

Выражение для H_α отличается от выражения H_ϑ заменой в предэкспоненциальном множителе $\cos(\alpha' - \alpha)$ на $\sin(\alpha' - \alpha)$.

Вводя переменную интегрирования $\beta = \alpha' - \alpha$, получим:

$$\begin{aligned} H_\vartheta = -\frac{i\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} &\left(\cos n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \sin n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta + \right. \\ &\left. + \sin n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \cos n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta \right). \end{aligned}$$

Первый из интегралов, стоящих в скобке, обращается в нуль вследствие нечетности подынтегральной функции, второй может быть преобразован к промежутку $0, \pi$ (четная подынтегральная функция) и выражен через

производную от функции Бесселя (см. приложение 3). Таким образом,

$$H_{\vartheta}(r_0, t) = -E_{\alpha} = \frac{2\pi\omega a}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{I}_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2})} \sin n\alpha J'_n(ka \sin \vartheta).$$

Путем аналогичных вычислений с использованием формулы $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$, получим

$$H_{\alpha}(r_0, t) = E_{\vartheta} = \frac{2\pi\omega a n \mathcal{I}_0 e^{i(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2})}}{c^2 r_0} \cos n\alpha \frac{J_n(ka \sin \vartheta)}{ka \operatorname{tg} \vartheta}.$$

749.

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3} (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) \frac{\sin^2\left(\pi \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right)},$$

где ϑ, α — полярные углы, характеризующие направление излучения (см. полярные диаграммы на рис. 125). Опережающий осциллятор расположен выше по оси z .

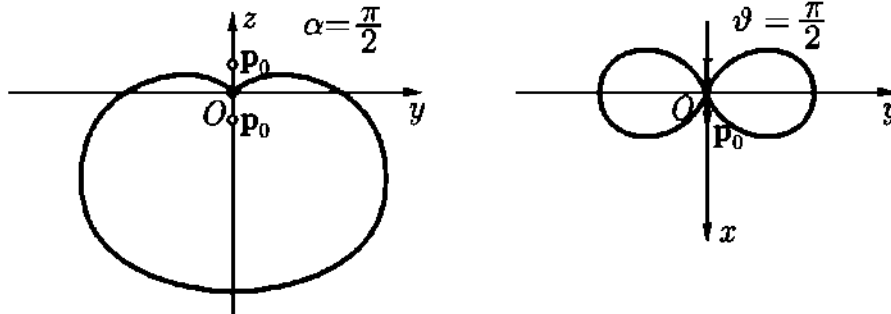


Рис. 125

750. Так как $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, то $(j_x, j_y, j_z) \rightarrow (-j_x, -j_y, j_z)$, при этом отраженные токи вычисляются в отраженных точках: $\mathbf{j}_x(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}'_x(\mathbf{r}')$ и т. д.

Аналогично, используя обычные определения и формулы (XII.1), (XII.2), записанные в декартовых координатах, получим: $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow (-p_x, -p_y, p_z)$, $(Q_x, Q_y, Q_z) \rightarrow (-Q_x, -Q_y, -Q_z)$, $(m_x, m_y, m_z) \rightarrow (m_x, m_y, -m_z)$, $(E_x, E_y, E_z) \rightarrow (-E_x, -E_y, E_z)$, $(H_x, H_y, H_z) \rightarrow (H_x, H_y, -H_z)$.

751. Граничные условия $H_n = 0$ и $E_\tau = 0$ на поверхности ($z = 0$) проводника выполняются — это прямо следует из результатов задачи 750. В частном случае электрического дипольного осциллятора электромагнитное поле в полупространстве $z > 0$ совпадает с полем электрического дипольного осциллятора с моментом $\mathbf{p} = 2e_z f(t) \sin \varphi_0$. Оно обращается в нуль при $\varphi_0 = 0$ (диполь параллелен плоскости) и максимально при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (диполь перпендикулярен плоскости). Полная энергия, излучаемая в последнем случае в полупространство $z > 0$, вчетверо превышает энергию излучения такого же осциллятора, находящегося вдали от проводящей плоскости.

752.

$$E_\vartheta = H_\alpha = \frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos 2\vartheta \cos \alpha \cos \omega t',$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = -\frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos \vartheta \sin \alpha \cos \omega t',$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{p_0^2 a^2 \omega^6}{32\pi c^6} (\cos^2 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha).$$

753. б) $H_r = 0$, $H_\vartheta = -\frac{ik}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $H_\alpha = ik \frac{\partial u}{\partial \vartheta}$,

$$E_r = k^2 u r + \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad E_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \vartheta}, \quad E_\alpha = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \alpha}.$$

755.

$$u = \frac{p_0}{b} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} - ikp_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{h_l^{(1)}(kb)}{b} \times$$

$$\times \frac{\left. \frac{d[rj_l(kr)]}{dr} \right|_{r=a}}{\left. \frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr} \right|_{r=a}} \cdot h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \vartheta).$$

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются отсюда по формулам, полученным в задаче 753. Для нахождения углового распределения излучения нужно воспользоваться асимптотическим выражением сферических функций Ханкеля

(см. П 3.19). При этом получится:

$$E_\alpha = H_\vartheta = 0,$$

$$H_\alpha = ik \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = F(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} = E_\vartheta,$$

где

$$F(\vartheta) = \frac{p_0 k^2}{b} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{i^{l-1}} \frac{j_l(kb) \frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr} - h_l^{(1)}(kb) \frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d[rh_l^{(1)}(kr)]}{dr}} \Bigg|_{r=a} \times$$

$$\times \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta},$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} |H_\alpha|^2 r^2 = \frac{c}{8\pi} |F(\vartheta)|^2.$$

§ 2. Электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольным образом

756. Потенциал φ поля частицы выражается интегралом:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV' = e \int \frac{\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - \frac{R}{c})]}{R} dV', \quad (1)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой $\int f(\mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{R}_1) (d\mathbf{R}_1) = f(0)$ (см. приложение 1). Перейдем в интеграле (1) к новой переменной $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - \frac{R}{c})$. Якобиан преобразования

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{r}'} \right| = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR}, \quad (2)$$

В новых переменных интеграл (1) принимает вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{\delta(\mathbf{R}_1) (d\mathbf{R}_1)}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} = \frac{e}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} \Bigg|_{\mathbf{R}_1=0}.$$

Условие $R_1 = 0$ означает, что в правой части этой формулы все величины относятся к точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 \left(t - \frac{R}{c} \right)$, в которой заряд находился в ретардированный момент времени $t' = t - \frac{R}{c}$. Вычисления в случае векторного потенциала выполняются аналогичным образом.

757.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int R^{n-1} \rho(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{d^n R_0^{n-1}}{dt^n}, \end{aligned}$$

где $R_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+1} n!} \frac{d^n (\mathbf{v}(t) R_0^{n-1})}{dt^n}$. Все величины в правых частях этих равенств берутся в тот же момент времени, что и в левых. Запаздывающее взаимодействие формально сводится к мгновенному. Полученными разложениями можно пользоваться при достаточно медленном ($v \ll c$) и плавном (ограничены ускорение и его производные всех порядков) движении для не слишком больших R .

760. При малых v/c формулы (XII.25) принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e\mathbf{r}}{r^3} + 3 \frac{e\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{cr^4} - \frac{e\mathbf{v}}{cr^2} + \frac{e\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{c^2 r^3} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}, \\ \mathbf{H} &= \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3} + \frac{e\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}}{c^2 r^2} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{r} — расстояние от какой-либо точки области, в которой происходит движение заряда, до точки наблюдения.

Первые 3 члена в выражении \mathbf{E} и первый член в \mathbf{H} пропорциональны $1/r^2$ и преобладают на сравнительно малых расстояниях от заряда (в квазистационарной зоне). Электрическое поле в этой зоне сводится в основном к кулонову полю $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}$; магнитное поле описывается формулой Био – Савара $\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{cr^3}$. На больших расстояниях от заряда (в волновой зоне) доминируют последние члены в \mathbf{E} и \mathbf{H} , убывающие по закону $1/r$. Эти

члены описывают поле излучения и имеют вид:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})}{c^2 r}, \quad \mathbf{H} = \frac{e\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}}{c^2 r},$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Положение границы квазистационарной и волновой зон определяется условием

$$\frac{e/r_{\text{гр}}^2}{e|\dot{\mathbf{v}}|/c^2 r_{\text{гр}}} \sim 1,$$

откуда

$$r_{\text{гр}} \approx a \left(\frac{c^2}{v^2} \right),$$

если учесть, что $|\dot{\mathbf{v}}| \sim \frac{v^2}{a}$, где a — величина порядка размера той области, в которой происходит движение заряда.

761. $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n})^2, \quad I = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}}^2$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

762. а) Порция энергии $-d\mathcal{E}$, излученная частицей внутри телесного угла $d\Omega$ за время dt' , проходит мимо точки наблюдения поля в течение

промежутка времени dt . Следовательно, $-\frac{d\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt'}$. Воспользовавшись

равенством $t = t' + \frac{R}{c}$, и заметив, что $\frac{\partial R}{\partial t'} =$

$= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, получим

$$dt = dt' \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right),$$

откуда окончательно

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega};$$

б) энергия, излученная зарядом в течение промежутка времени dt' , заключена между двумя сферами. Первая из этих сфер имеет центр в точке O , где заряд находился в момент t' , вторая — в точке O' , где он находился в момент $t' + dt'$ (рис. 126). Радиус первой сферы R , радиус второй $R + c dt'$.

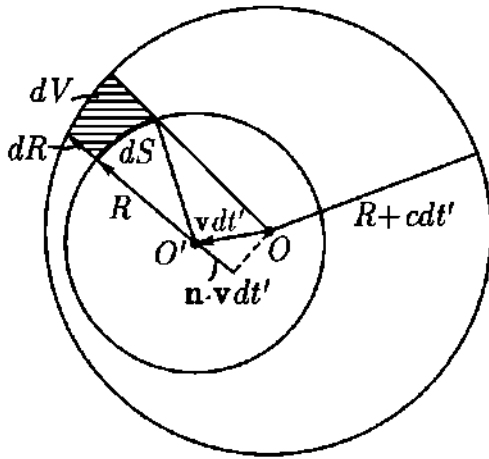


Рис. 126

Рассмотрим элемент объема $dV = dS dR = R^2 d\Omega (c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt'$. В этом объеме заключена электромагнитная энергия $dW = \frac{E^2}{4\pi} dV = \frac{cE^2}{4\pi} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) R^2 d\Omega dt'$. Отсюда для скорости потери энергии $-\frac{d\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{dW}{dt' d\Omega}$ получим значение, приведенное выше.

$$765. \text{ а) } -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \left(\dot{\mathbf{v}} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right];$$

$$\text{ б) } -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c} \right)^2 - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$766. \quad -\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = -\frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dt'},$$

где \mathbf{v} — скорость частицы в момент t' .

767. Сравним скорость потери энергии частицей в двух системах отсчета: мгновенно сопутствующей S_0 , в которой частица в данный момент времени покоится, и лабораторной S , в которой частица имеет скорость \mathbf{v} . В системе S_0 излучение имеет электрический дипольный характер, поэтому частица в S_0 не теряет импульса. Это следует из центральной симметрии углового распределения излучения в этой системе отсчета (или из результата задачи 667).

Рассмотрим количество энергии $-d\mathcal{E}_0$, излучаемое частицей за промежуток времени $dt'_0 = d\tau$ в системе S_0 . В системе S наблюдается при этом потеря энергии $-d\mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ за промежуток времени $dt' = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Отсюда получаем для скорости потери энергии:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{d\mathcal{E}_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}}{d\tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau}.$$

Результат не зависит от v . Это означает, что суммарная по всем направлениям скорость потери энергии во всех системах отсчета одинакова.

Полная интенсивность излучения в момент времени t определяется интегралом от нормальной составляющей вектора Пойнтинга по поверхности сферы радиуса R , с центром в точке, где находилась частица в ре-

тардированный момент времени $t' = t - \frac{R}{c}$. В отличие от инвариантной величины $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$, полная интенсивность излучения не обладает простыми свойствами релятивистского преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой.

$$768. \quad \frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \vartheta)^6}, \text{ где } \vartheta \text{ — угол между}$$

направлением скорости \mathbf{v} и направлением излучения \mathbf{n} , $\beta = v/c$. Угловая диаграмма излучения приведена на рис. 127. Когда скорость v частицы мала, излучение вперед и назад имеет одинаковую интенсивность. Когда v сравнимо с c , преобладает излучение вперед тем в большей степени, чем ближе v к c . Максимум излучения наблюдается в направлении ϑ_0 , определяемом уравнением

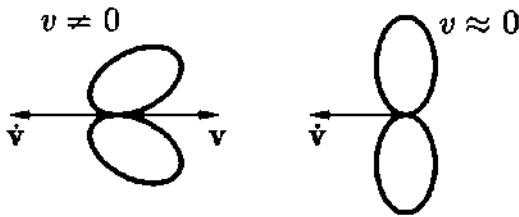


Рис. 127

$$\cos \vartheta_0 = \frac{1}{4\beta} (\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1).$$

При $\beta \rightarrow 0$ $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$; при $\beta \rightarrow 1$ $\vartheta_0 \rightarrow 0$. Таким образом, в ультррелятивистском пределе излучение происходит в основном под малыми углами к направлению скорости частицы. Полагая $\vartheta \ll 1$, представим $\frac{dI}{d\Omega}$ в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \vartheta^2}{2\pi c^3 \left[\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \vartheta^2 \right]^6}.$$

Из этой формулы видно, что ультррелятивистская частица излучает главным образом внутри конуса с углом раствора $\psi = \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$.

Полная интенсивность излучения:

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \frac{1 + \beta^2/5}{(1 - \beta^2)^4}.$$

Полная скорость потери энергии:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta^2)^3}.$$

769. Полное тормозное излучение в направлении $d\Omega$ за все время пролета частицы:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta W}{d\Omega} &= \int \frac{dI}{d\Omega} dt = \int \left(-\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt'} \right) dt' = \\ &= \frac{e^2 v_0^2}{16\pi c^3 \tau} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v_0}{c} \cos \vartheta\right)^4} - 1 \right], \end{aligned}$$

где ϑ — угол между направлением скорости частицы и направлением излучения \mathbf{n} .

Наблюдаемая длительность импульса зависит от угла ϑ между скоростью частицы и направлением излучения:

$$\Delta t = \tau \left[1 - \frac{v_0}{2c} \cos \vartheta \right].$$

770. $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4 H^2 p^2}{3m^4 c^5}.$

771. $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4 H^2 \sin^2 \theta}{3m^2 c(1 - \beta^2)}.$ При $\theta \gg \sqrt{1 - v^2/c^2}$ неподвижный на-

блюдатель, находящийся далеко от электрона, зарегистрирует отдельные импульсы излучения, испущенные в те моменты времени, когда скорость электрона направлена на наблюдателя (в пределах конуса с углом раствора $\psi \approx \sqrt{1 - v^2/c^2}$, см. задачу 768). Время между импульсами (рис. 128)

$$\tau = T \left(1 - \frac{v_{\parallel} \cos \theta}{c} \right) \approx T \sin^2 \theta,$$

где $T = 2\pi\mathcal{E}/e c H$ — период циклотронного вращения, \mathcal{E} — энергия частицы, $v_{\parallel} = v \cos \theta$ — проекция скорости на направление поля. Таким образом, вследствие поступательного движения электрона со скоростью v_{\parallel} излучение, испускаемое за время T , пройдет через неподвижную сферу за время τ . Отсюда

$$I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \frac{T}{\tau} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c(1 - v^2/c^2)}.$$

При $\theta \leq \psi \ll 1$ будем иметь

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{\theta^2}{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \theta^2\right]}.$$

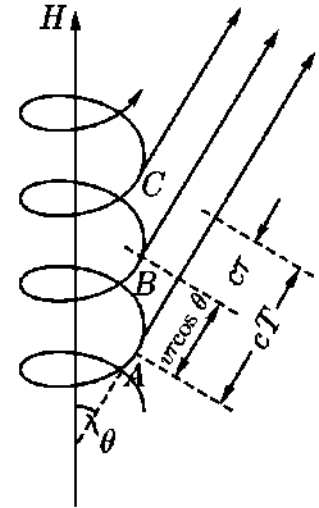


Рис. 128

$$772. \quad \frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6}, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}.$$

Полярная ось направлена вдоль скорости, азимут α отсчитывается от направления ускорения. Угловое распределение излучения приведено на рис. 129. Излучения не происходит в направлениях, определяемых уравнением $\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) = \sin \vartheta |\cos \vartheta|$. В частности, при $\alpha = 0, \pi$ (рис. 129а), излучения нет в направлении $\vartheta = \arccos \frac{v}{c}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (рис. 129б), интенсивность излучения отлична от 0 при всех ϑ .

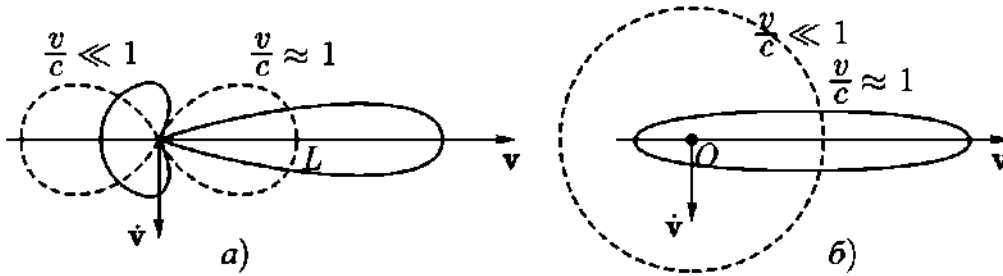


Рис. 129

773.

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dI}{d\Omega}} &= -\frac{\overline{d\mathcal{E}}}{d\Omega dt'} = \frac{e^4 H^2 \beta^2}{8\pi^2 m^2 c^3} (1 - \beta^2) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \beta^2) \cos^2 \vartheta + (\beta - \sin \vartheta \cos \alpha)^2}{(1 - \beta \sin \vartheta \cos \alpha)^5} d\alpha = \\ &= \frac{e^4 H^2 \beta^2 (1 - \beta^2)}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta - \frac{1}{4} \beta^2 (1 + 3\beta^2) \sin^4 \vartheta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{7/2}}, \end{aligned}$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.

Начало отсчета азимутального угла α , входящего в подынтегральное выражение, выбрано так, чтобы направление вектора \mathbf{n} характеризовалось полярными углами $\vartheta, \frac{\pi}{2}$. В ультрарелятивистском случае $v \approx c$ излучение сосредоточивается вблизи плоскости орбиты в интервале углов $\Delta\vartheta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$.

774.

$$\left. \begin{aligned} A_{n\vartheta} &= \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \cos \vartheta \int_0^{2\pi} \cos \alpha' e^{i(n\alpha' - n\beta \sin \vartheta \sin \alpha')} d\alpha', \\ A_{n\alpha} &= \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \int_0^{2\pi} \sin \alpha' e^{i(n\alpha' - n\beta \sin \vartheta \sin \alpha')} d\alpha', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где волновой вектор $\mathbf{k} = n\frac{\omega}{c}$, начало координат — в центре орбиты, ось z перпендикулярна плоскости орбиты, направление \mathbf{k} характеризуется полярными углами $\vartheta, \frac{\pi}{2}$; R_0 — расстояние от центра орбиты до точки наблюдения.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} H_{n\alpha} &= i\frac{\omega}{c} n A_{n\vartheta} \approx i \frac{\beta n e^{ikR_0}}{a R_0} \operatorname{ctg} \vartheta J_n(n\beta \sin \vartheta), \\ H_{n\vartheta} &= -i\frac{\omega}{c} n A_{n\alpha} = \frac{e\beta^2 n e^{ikR_0}}{a R_0} J'_n(n\beta \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Поляризация излучения оказывается, вообще говоря, эллиптической, с главными осями в направлениях \mathbf{e}_α и \mathbf{e}_ϑ и отношением полуосей $H_{n\vartheta}$ и $H_{n\alpha}$, равным $\beta \operatorname{tg} \vartheta \frac{J'_n(n\beta \sin \vartheta)}{J_n(n\beta \sin \vartheta)}$. Направление обхода эллипса определяется знаком этого отношения. При $\vartheta = 0$ поляризация круговая, при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ — линейная. При достаточно больших n и β линейная поляризация получается также в тех направлениях, которым соответствуют нули или полюсы функции $\frac{J'_n}{J_n}$.

775. Наличие высших гармоник в спектре поля объясняется тем, что время распространения поля между равными точками орбиты конечно и сравнимо, вообще говоря, с периодом обращения заряда по орбите, если скорость заряда сравнима со скоростью света c . Вследствие этого, время прохождения через точку наблюдения поля, излучаемого частицей в течение полупериода, когда частица приближалась к этой точке, меньше, чем время прохождения через нее поля, излученного в течение второго полупериода. Простой гармонической зависимости координат частицы от времени соответствует, следовательно, некоторая сложная периодическая зависимость поля от времени, изображаемая суперпозицией ряда гармоник Фурье.

Следует ожидать, что при $\beta \rightarrow 0$ высшие гармоники исчезнут. Действительно, при $x \approx 0$, $n > 0$ имеем (см. приложение 3): $J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}$, $J'_n(x) \approx \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!}$. Из этих формул видно, что, когда $\beta \rightarrow 0$, существенны лишь гармоники с наименьшим возможным значением $|n| = 1$. При этом (ср. с ответом к задаче 732):

$$H_\alpha = H_{1\alpha} + H_{-1\alpha} = -\frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos \vartheta \sin(kR_0)}{R_0},$$

$$H_\vartheta = H_{1\vartheta} + H_{-1\vartheta} = \frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos(kR)_0}{R_0}.$$

776.

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 = \frac{cn^2 e^2 \beta^2}{2\pi a^2} [\text{ctg}^2 \vartheta J_n^2(n\beta \sin \vartheta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta \sin \vartheta)].$$

Если движение по окружности происходит под действием постоянного однородного магнитного поля H , то

$$a = \frac{mc^2 \beta}{eH \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

777. При решении задачи 774 были получены выражения (2) для n -й гармоники поля излучения от одного заряда. Выражения этих гармоник для разных зарядов, очевидно, отличаются друг от друга только начальными фазами. Обозначив через ψ_l сдвиг фазы поля l -го электрона относительно поля того электрона, которому приписан первый номер, запишем результирующее поле в вещественной форме:

$$H_{n\vartheta} = \frac{e\beta^2 n}{aR_0} J'_n(n\beta \sin \vartheta) \sum_{l=1}^N \cos n \left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c} + \psi_l \right).$$

Выражение для $H_{n\alpha}$ аналогично. Среднее значение интенсивности излучения за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ равно:

$$dI_{nN} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (H_{n\vartheta}^2 + H_{n\alpha}^2) dt R_0^2 d\Omega = S_N dI_n,$$

где dI_n — интенсивность излучения от одного электрона, найденная в предыдущей задаче, а S_N — коэффициент, учитывающий интерференцию полей электронов («фактор когерентности»):

$$S_N = N + \sum_{\substack{l, l'=1 \\ (l \neq l')}}^N \cos n(\psi_l - \psi_{l'}).$$

Рассмотрим частные случаи:

а) при совершенно беспорядочном расположении электронов на орбите

$$\sum \cos n(\psi_l - \psi_{l'}) = 0;$$

б) при равномерном расположении электронов на орбите

$$\psi_l = \frac{2\pi}{N}(l-1)$$

и

$$\begin{aligned} S_N &= N \sum_{l=2}^N \cos 2\pi(l-1) \frac{n}{N} = \frac{N}{2} \left[\sum_{l=1}^N e^{2\pi(l-1) \frac{n}{N} i} + \sum_{l=1}^N e^{-2\pi(l-1) \frac{n}{N} i} \right] = \\ &= N(-1)^n \frac{\sin n\pi}{\operatorname{tg} \frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{n}{N} \text{ — не целое число,} \\ N^2, & \text{если } \frac{n}{N} \text{ — целое число;} \end{cases} \end{aligned}$$

в) если электроны образуют сгусток, то все разности $\psi_l - \psi_{l'}$ малы. Для не слишком больших n , при которых размер сгустка мал по сравнению с соответствующей длиной волны, можно заменить все $\cos n(\psi_l - \psi_{l'})$ в выражении S_N единицами. Тогда $S_N = N^2$. С увеличением n фактор S_N уменьшается; значение S_N при этом зависит от деталей расположения электронов в сгустке и не может быть указано в общем виде.

778. Выберем начало координат в центре инерции системы зарядов. Тогда электрический дипольный момент системы

$$\mathbf{p} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Поскольку отношения e/m зарядов различны, то $\mathbf{p} \neq 0$ и система будет излучать в основном как электрический диполь ($\frac{v}{c} \ll 1$). Мгновенная интенсивность

$$I(t) = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t').$$

Согласно уравнению движения зарядов, $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}$, так что $I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4}$. При вычислении средней по времени интенсивности излучения $\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt'$ заменим интегрирование по t' интегрированием по углу α согласно уравнению $dt' = \frac{\mu r^2 d\alpha}{K}$ (K — момент импульса системы) и воспользуемся уравнением траектории. В результате получим:

$$\bar{I} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{\frac{5}{2}} |e_1 e_2|^3 |\mathcal{E}|^{\frac{3}{2}}}{K^5} \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|K^2}{\mu e_1^2 e_2^2} \right).$$

$$779. \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\frac{2^{\frac{7}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} |\mathcal{E}|^{\frac{3}{2}}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mathbf{K}}{K^3}.$$

780. Поступая так же, как при решении задачи 778, запишем вторую производную дипольного момента в виде:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Вычисление A не вызывает затруднений. Для вычисления B нужно знать \ddot{p}_z — проекцию $\ddot{\mathbf{p}}$ на направление первоначального движения рассеиваемых частиц — в виде функции координат r, α (полярные координаты в плоскости относительного движения частиц). При этом следует учитывать, что в уравнении траектории относительного движения $-1 + \epsilon \cos \alpha = a(\epsilon^2 - 1)/r$, угол α отсчитывается от оси симметрии (ось z') траектории. Таким образом, $y' = r \sin \alpha$, $z' = r \cos \alpha$. Угол между осями z и z' равен $\pi - \alpha_0$ ($\cos \alpha_0 = \frac{1}{\epsilon}$), поэтому $z = -z' \cos \alpha_0 - y' \sin \alpha_0 = -r \left(\frac{1}{\epsilon} \cos \alpha + \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon} \sin \alpha \right)$.

Используя (1) и заметив, что $\sin \alpha$ — нечетная функция, получим:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{p}_z^2 dt s ds = e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \alpha + (\varepsilon^2 - 1) \sin^2 \alpha}{\varepsilon^2 r^4} dt s ds.$$

С помощью уравнения траектории выразим $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ через r и ε и сделаем подстановку $\varepsilon^2 = u$, $s ds = \frac{a^2}{2} du$. После этого выписанный интеграл преобразуется к виду:

$$\frac{a}{v_0} \int_{2a}^{\infty} \frac{dr}{r^3} \int_1^{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2} \left[-\frac{a^2}{r^2} u + \left(4\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} + 1 \right) + \left(-5\frac{a^2}{r^2} + 6\frac{a}{r} - 2 \right) \frac{1}{u} + 2\left(\frac{a}{r} - 1\right)^2 \frac{1}{u^2} \right] \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{r}{a} - 1\right)^2 - u}}.$$

При вычислении интеграла по du возникает логарифмический член, который преобразуется интегрированием по частям. Для вычисления внешнего интеграла по dr целесообразно сделать подстановку $x = \frac{2a}{r}$, которая приводит этот интеграл к сумме нескольких B -функций: $B(k, l) = \int_0^1 x^{k-1} (1 -$

$$- x)^{l-1} dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \frac{8\pi}{9} e_1 e_2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \mu v_0,$$

$$B = 0.$$

781. В рассматриваемом приближении $v = \text{const}$, а траектория частицы представляет собой прямую. Пусть движение частицы происходит в плоскости xz параллельно оси z . В этих координатах

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \text{где } n_x = \sin \vartheta \cos \alpha, \quad n_y = \sin \vartheta \sin \alpha,$$

$$n_z = \cos \vartheta, \quad \mathbf{r} = (s, 0, vt'), \quad r = \sqrt{s^2 + v^2 t'^2},$$

$$\mathbf{v} = (0, 0, v).$$

Из известной формулы $\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$, получим $\dot{\mathbf{v}} = \frac{c^2 \dot{\mathbf{p}}}{\mathcal{E}} - \frac{c^2 \mathbf{p} \dot{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}^2}$. Согласно уравнению движения частицы, $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}$. Закон сохранения энергии требует, чтобы $\mathcal{E} + \frac{e_1 e_2}{r} = \text{const}$. Дифференцируя последнее равенство по t' , получим:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{e_1 e_2 \dot{r}}{r^2} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r^3},$$

так что

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e_1 e_2 c^2}{\mathcal{E}} \left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{\mathcal{E}} \right] = \frac{e_1 e_2 c^2}{\mathcal{E} r^3} [s \mathbf{e}_x + vt'(1-\beta^2) \mathbf{e}_z].$$

Подставив найденные выражения в (XII.26), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} &= \frac{e_1^4 e_2^2 c^4}{4\pi c^3 \mathcal{E}^2 (1-\beta n_z)^5} \left\{ s^2 [(1-\beta n_z)^2 - n_x^2 (1-\beta^2)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{(s^2 + v^2 t'^2)} + c^2 \beta^2 (1-\beta^2)^2 (1-n_z)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t'^2 dt'}{(s^2 + v^2 t'^2)^3} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование дает:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} &= \frac{e_1^4 e_2^2 (1-\beta^2)}{32m^2 c^3 s^3 v (1-\beta n_z)^5} [4 - 3n_x^2 - n_z^2 - 6\beta n_z + \\ &\quad + \beta^2(-2 + 3n_x^2 + 5n_z^2) + \beta^4(1 - n_z^2)]. \quad (1) \end{aligned}$$

В нерелятивистском пределе $\beta \rightarrow 0$ и

$$\frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2}{32m^2 c^4 s^3 v} (4 - 3n_x^2 - n_z^2).$$

В ультрарелятивистском случае $\beta \approx 1$ и

$$\frac{d\Delta W_{\mathbf{n}}}{d\Omega} = \frac{3e_1^4 e_2^2 (1-\beta)}{2^9 m^2 c^4 s^3 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

При $\vartheta \leq \sqrt{1-\beta}$ последняя формула несправедлива, и нужно пользоваться точным выражением (1).

$$782. \Delta W = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12\pi^2 c^3 s^3 v} \cdot \frac{4 - \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad \Delta \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \Delta W}{c^2}.$$

$$783. \frac{d\Delta W_\omega}{d\omega} = \frac{8e_1^4 e_2^2 \omega^2 c}{3\pi v^4} \left[K_1^2\left(\frac{\omega s}{v}\right) + K_0^2\left(\frac{\omega s}{v}\right) \right].$$

784. Условие применимости формулы (XII.33) выполняется при всех частотах ω , так как время столкновения $\tau = 0$. При рассеивании на твердой сфере угол падения равен углу отражения, поэтому $|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|^2 = 2v \sin \frac{\vartheta}{2}$, где ϑ — угол рассеяния. Угол ϑ связан с прицельным расстоянием s соотношением: $s = a \sin \frac{\vartheta}{2}$ при $s \leq a$. При $s > a$ частица не испытывает рассеяния. Отсюда получаем:

$$d\kappa_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} 4v^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\vartheta}{2} 2\pi s ds d\omega = \frac{4e^2 a^2 v^2}{3c^3} d\omega.$$

Найденное дифференциальное эффективное излучение не зависит от частоты. Поэтому полное эффективное излучение

$$\kappa = \int_0^\infty d\kappa_\omega = \infty.$$

Эта расходимость объясняется тем что сфера считалась абсолютно твердой. На самом деле абсолютно твердых тел не существует, $\tau \neq 0$ и при больших значениях ω найденное для $d\kappa_\omega$ выражение незаконно.

785. Формулу (XII.30) для дифференциального эффективного излучения можно записать в виде:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dI}{d\Omega} dt s ds. \quad (1)$$

Интенсивность излучения $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2$, где $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$. В формуле (1) усреднение интенсивности излучения должно быть произведено по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной к направлению потока падающих частиц. Для выполнения усреднения удобно представить векторное произведение, входящее в выражение \mathbf{H} , в форме $H_\alpha = \frac{1}{c} e_{\alpha\beta\gamma} \dot{A}_\beta n_\gamma$,

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный единичный псевдотензор (см. задачи 24 и 26), по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Компоненты векторного потенциала A_β выражаются через компоненты квадрупольного момента $Q_{\beta\epsilon}$, определяемые формулой (XII.19)

$$A_\beta = \frac{1}{2c^2 r} \ddot{Q}_{\beta\epsilon} n_\epsilon.$$

Таким образом,

$$H_\alpha = \frac{1}{2c^3 r} e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}_{\beta\epsilon} n_\gamma n_\epsilon$$

и

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{16\pi c^5} \ddot{Q}_{\beta\epsilon} \ddot{Q}_{\beta'\epsilon'} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} \overline{n_\gamma n_\epsilon n_{\gamma'} n_{\epsilon'}}.$$

Воспользуемся полярной системой координат с полярной осью направленной вдоль падающего потока и с полюсом в точке, где находится частица с зарядом e_2 и массой m_2 . Усреднение должно выполняться при фиксированном значении составляющей $n_z \equiv n_3 = \cos \vartheta$ (ϑ — направление излучения). Легко убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} \overline{n_i n_k} &= \frac{1}{2} \delta_{ik} (1 - n_3^2), \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} &= \frac{1}{8} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) (1 - n_3^2)^2, \\ \overline{n_i} &= \overline{n_i n_k n_l} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где индексы i, k, l принимают значения 1, 2.

Воспользовавшись (2), а также формулой

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} = \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\gamma\beta'},$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dI}{d\Omega}} &= \frac{1}{16\pi c^5} \left\{ (\ddot{Q}_{\beta 3}^2 - \ddot{Q}_{33}^2) \cos^4 \vartheta + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - 3\ddot{Q}_{\beta 3}^2 + 6\ddot{Q}_{33}^2 - 2\ddot{Q}_{33} \ddot{Q}_{\beta\beta'}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} [2\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 - 3\ddot{Q}_{33}^2 + 2\ddot{Q}_{33} \ddot{Q}_{\beta\beta}] \sin^4 \vartheta \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Подставляя (3) в (1), найдем окончательно:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = A + BP_2(\cos \vartheta) + CP_4(\cos \vartheta), \quad (4)$$

где P_2, P_4 — полиномы Лежандра (см. приложение 2),

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{120c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [3\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2] s ds dt, \\ B &= \frac{1}{168c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-3\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2(\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 + 9\ddot{Q}_{\beta 3}^2 - 6\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}] s ds dt, \\ C &= \frac{1}{280c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [-2\ddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2\ddot{Q}_{\beta 3}^2 - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 - \\ &\quad - 35\ddot{Q}_{33}^2 + 10\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}] s ds dt. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

786. Полное эффективное излучение

$$\kappa = \int \frac{d\kappa_n}{d\Omega} d\Omega.$$

Используя формулы (4) и (5), полученные в предыдущей задаче, можно написать (см. приложение 2):

$$\kappa = 4\pi A = \frac{\pi}{30c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [3\ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{Q}_{\beta\beta}^2] s ds dt. \quad (1)$$

Обозначим через x_α декартовы компоненты относительного радиуса-вектора частиц, а через $v_\alpha = \dot{x}_\alpha$ — декартовы компоненты относительной скорости частиц. Тогда, учитывая уравнение относительного движения частиц, найдем

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2 x_\alpha}{mr^3}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2}{m} \cdot \frac{rx_\alpha - 3x_\alpha v_r}{r^6},$$

где

$$v_r = \dot{r}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и вводя азимутальную компоненту относительной скорости частиц v_α ($v^2 = v_\alpha^2 + v_r^2$), получим:

$$\kappa = \frac{4\pi e^6}{15m^2 c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{v^2 + 11v_\alpha^2}{r^4} s ds dt. \quad (2)$$

Вследствие сохранения энергии и момента импульса, $v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}$ и $v_\alpha = \frac{v_0 s}{r}$. Выполняя в (2) интегрирование (при этом следует заменить интегрирование по dt интегрированием по dr , согласно формуле $dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v^2 - v_\alpha^2}}$, причем интегрировать можно в любом порядке), получим окончательно:

$$\kappa = \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

§ 3. Взаимодействие заряженных частиц с излучением

787. Импульс поля движущейся частицы

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV,$$

где $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, а интеграл берется по всему пространству. Магнитное поле движущейся частицы $\mathbf{H} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$, так как в системе покоя частицы (S') магнитное поле отсутствует. Отсюда

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{v} E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})].$$

С помощью формул (X.25) находим:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(ось x направлена вдоль \mathbf{v}). Элемент объема $dV = dV' \sqrt{1 - \beta^2}$ (вследствие лоренцова сокращения). Таким образом,

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \int (E_y'^2 + E_z'^2) dV' = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{2}{3} \int E'^2 dV'. \quad (1)$$

Последнее преобразование следует из сферической симметрии поля в системе S' .

Если принять, что масса покоя частицы имеет чисто электромагнитное происхождение, т. е. представляет собой массу ее электрического поля, определяемую соотношением Эйнштейна $W' = m_0 c^2$, то она должна равняться

$$m_0 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{8\pi} \int E'^2 dV'. \quad (2)$$

При этом импульс поля должен бы быть равен $\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, однако из формулы (1) видно, что это не так¹. Импульс поля зависит от скорости v точно так же, как это должно быть в случае частицы:

$$\mathbf{G} = \frac{m'_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Но «масса» $m'_0 = \frac{4}{3} m_0 \neq m_0$ не совпадает с массой покоя частицы m_0 , определяемой формулой (2).

Наличие коэффициента $\frac{4}{3}$ в выражении \mathbf{G} означает, что энергия и импульс электромагнитного поля частицы не образуют 4-вектора и не могут быть отождествлены с ее энергией и импульсом.

Отметим, что определяемая формулой (2) электромагнитная масса обращается в бесконечность в случае точечной частицы.

788. $W_m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{m'_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, где величина m'_0 определена

в решении предыдущей задачи.

Полная энергия электромагнитного поля частицы

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV = m'_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \beta^2} \right)$$

не обнаруживает зависимости от скорости $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, которая должна иметь место для энергии частицы (ср. с задачей 787).

¹ Энергия поля при таком предположении должна бы быть равна $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, но как показано в следующей задаче это также не имеет места.

789. Отбросим члены порядка $\frac{v}{c}$ и выше, и рассмотрим действие некоторого элемента de_1 на другой элемент de_2 . Кулонова часть электрического поля сферически симметрична и не дает вклада в силу самодействия; квазистационарное магнитное поле тоже не дает вклада. Таким образом, достаточно рассмотреть только ту часть напряженности $d\mathbf{E}$ электрического поля элемента de_1 , которая зависит от ускорения. На элемент de_2 действует сила

$$d\mathbf{F} = -de_2 d\mathbf{E} = \frac{de_1 de_2}{c^2 r} [\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}})],$$

где $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$, \mathbf{r} — радиус-вектор, направленный от элемента de_1 к элементу de_2 . На частицу в целом действует сила

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{W_0}{c^2} \dot{\mathbf{v}},$$

где $W_0 = \frac{1}{2} \int \frac{de_1 de_2}{r}$ — энергия электромагнитного поля покоящейся частицы; множитель $4/3$ получается при интегрировании по направлениям \mathbf{r}_0 . Определив массу покоя частицы как $m'_0 = \frac{4W_0}{3c^2}$ (см. задачу 787), получим для силы самодействия выражение:

$$\mathbf{F} = -m'_0 \dot{\mathbf{v}}.$$

Таким образом, сила самодействия частицы, если пренебречь запаздыванием, совпадает с силой инерции.

790. Сила, действующая на элемент заряда de_2 со стороны элемента de_1 , определяется ускорением $\dot{\mathbf{v}}$ последнего в момент времени t' :

$$d\mathbf{F}(t) = -\frac{de_1 de_2}{c^2 r} [\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}})] \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

Разлагая ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ по степеням $t' - t = -\frac{r}{c}$, получим:

$$\dot{\mathbf{v}}(t') = \dot{\mathbf{v}}(t) + (t' - t)\ddot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) - \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{v}}(t).$$

Интегрирование по элементам de_1, de_2 даст (см. предыдущую задачу) искомую силу самодействия:

$$\mathbf{F} = -m'_0 \dot{\mathbf{v}} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Второй член в правой части представляет собой силу лучистого трения. Он не зависит от структуры частицы и в предельном случае точечной частицы не изменяет своего вида. Собственная энергия W_0 и, следовательно, электромагнитная масса m_0 в этом предельном случае обращаются в бесконечность. Неучтенные члены порядка $(t' - t)^n$, где $n \geq 2$, очевидно, пропорциональны r_0^{n-1} (r_0 — радиус частицы) и в пределе точечной частицы исчезают.

$$791. T = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4} \approx 10^{-11} \text{ сек.}$$

Сделанные предположения о характере движения электрона выполняются, если потеря энергии за период τ обращения по орбите мала по сравнению с полной энергией электрона, т. е. $\tau \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right| \ll |\mathcal{E}|$, откуда $a \frac{c}{v} \gg r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ (r_0 — классический радиус электрона). Это условие начинает нарушаться только на очень малых расстояниях порядка 10^{-13} см, на которых вообще неприменима классическая электродинамика, так как она в этой области внутренне противоречива (см. [65] § 75).

Следовательно, результат задачи — очень малое время жизни атома — определенно указывает на неправильность классических представлений о движении электрона в атоме (представление о траектории и т. п.). В процессе преодоления этой и других фундаментальных трудностей классической физики и была создана квантовая механика.

$$792. \mathcal{E}(t) = mc^2 \operatorname{cth} \left[\frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} t + \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{E}_0 + mc^2}{\mathcal{E}_0 - mc^2} \right].$$

При $t \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}(t) \rightarrow mc^2$, т. е. частица останавливается. Радиус орбиты можно выразить через $\mathcal{E}(t)$ по формуле

$$r(t) = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{eH} \sqrt{\mathcal{E}^2(t) - m^2 c^4}.$$

При $t \rightarrow \infty$, $r(t) \rightarrow 0$, т. е. частица движется по закручивающейся спирали.

$$793. \mathcal{E}_{\text{кр}} = mc^2 \sqrt[3]{\frac{3a^2 \omega}{2cr_0}}, \text{ где } r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

794. Уравнение движения гармонического осциллятора при учете силы лучистого трения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Уравнению (1) соответствует кубическое характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{mc^3} k^3. \quad (2)$$

Условие малости силы лучистого трения по сравнению с квазиупругой силой позволяет решить (2) последовательными приближениями, отбросив в нулевом приближении правую часть; при этом $k \approx k_0 = \pm i\omega_0$. В первом приближении, подставив в правую часть (2) вместо k значение k_0 и введя обозначение

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}, \quad (3)$$

получим $k \approx k_1 = \pm i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$. Можно ограничиться одним из решений, например, тем, которому соответствует знак «—»:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (t > 0). \quad (4)$$

Это решение справедливо при $\gamma \ll \omega_0$ и имеет характер затухающих колебаний.

Энергия осциллятора убывает как квадрат модуля его амплитуды:

$$W = W_0 e^{-\gamma t}. \quad (5)$$

Величину $\frac{1}{\gamma}$ естественно называть временем жизни возбужденного состояния осциллятора.

Напряженность электрического поля излучения пропорциональна \mathbf{r} , так что

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \begin{cases} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\gamma t}{2}} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

и

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\mathbf{E}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0)t + i\omega t} dt = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi \left[i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2} \right]}.$$

Отсюда находим спектральное распределение интенсивности излучения:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}, \quad (6)$$

где $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$ — полная интенсивность излучения. Спектральное распределение (6) имеет характер резонансной кривой (рис. 130).

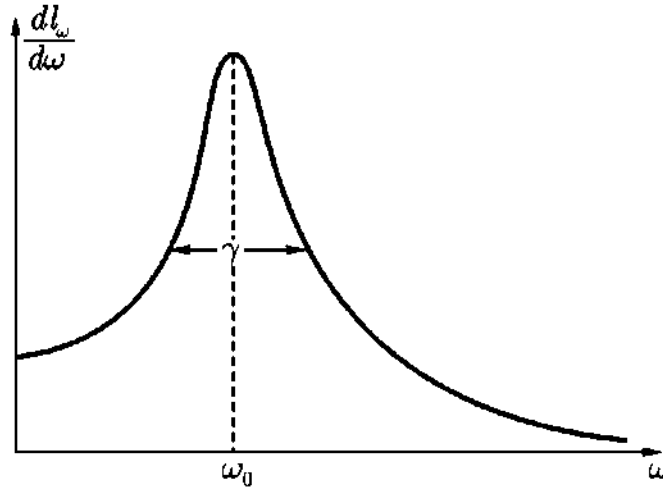


Рис. 130

Ширина спектральной линии характеризуется величиной $\Delta\omega = \gamma$.

Естественная ширина линии очень мала (на графике длин волн она равнялась бы $\Delta\lambda = \Delta \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1,17 \cdot 10^{-12} \text{ см}$).

Если считать, что излучение происходит не непрерывно, а дискретными порциями (это предположение, очевидно, выходит за рамки классической электродинамики), то неопределенность энергии фотонов $\Delta\mathcal{E} = \hbar\Delta\omega = \hbar\gamma$ связана со временем жизни возбужденного состояния $\tau = \frac{1}{\gamma}$ соотношением

$$\Delta\mathcal{E} \cdot \tau = \hbar. \tag{7}$$

Это — частный случай весьма общего квантовомеханического соотношения неопределенности для энергии-времени.

795. $\frac{dI_\omega}{d\omega} = I_0 e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_d}\right)^2}$, где $\gamma_d = \sqrt{\frac{2kT\omega_0^2}{mc^2}}$ — доплерова ширина

спектральной линии, а через I_0 обозначена интенсивность при $\omega = \omega_0$. Ширина линии зависит от температуры и может служить мерой температуры газа.

$$796. \frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \text{ где } I = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega.$$

797. Если волна поляризована вдоль оси x , то

$$x_\omega = \frac{eE_{x\omega}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (1)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}.$$

Энергия, поглощенная осциллирующим электроном,

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_x(t)\dot{x}(t) dt = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^\infty |E_{x\omega}|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} d\omega,^1$$

так как $(\dot{x})_\omega = -i\omega x_\omega$. Подынтегральная функция в последнем выражении описывает спектральное распределение интенсивности поглощения. Из вида этой функции следует, что мерой ширины линии поглощения является величина γ , как и в случае испускания. Так как, по условию, ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной линии γ , то

$$\Delta W = \frac{2\pi e^2}{m} |E_{x\omega_0}|^2 2\omega_0^2\gamma \int_{-\omega_0}^\infty \frac{d\xi}{(2\omega_0\xi)^2 + \omega_0^2\gamma^2},$$

где $\xi = \omega - \omega_0$. Нижний предел можно заменить на $-\infty$, так как $\gamma \ll \omega_0$. В результате интегрирования получим окончательно:

$$\Delta W = \frac{2\pi e^2}{m} |E_{x\omega_0}|^2 = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0},$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона. Результат не зависит от γ .

Зависимость от частоты только косвенная: величина ΔW пропорциональна спектральной плотности S_{ω_0} при резонансной частоте ω_0 осциллятора.

¹Как легко проверить,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot B(t) dt = 2\pi \int_0^\infty (A_\omega B_\omega^* + A_\omega^* B_\omega) d\omega.$$

Из вывода ясно, что тот же результат мы получили бы и в случае падения на изотропный осциллятор неполяризованной и неплоской группы волн. В этом случае S_ω представляла бы собой сумму интенсивностей всех поляризованных волн частоты ω , входящих в эту группу.

798. а) $\Delta W = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \cos^2 \vartheta$;
 б) $\Delta W = \pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \sin^2 \vartheta$;
 в) $\Delta W = \frac{2}{3} \pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$.

799. Уравнение движения гармонического осциллятора в данном случае принимает вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

если пренебречь неоднородностью электрического поля в области, занятой осциллятором, и действием магнитной силы — эффектами порядка $\frac{v}{c}$.

Решение уравнения (1), соответствующее вынужденным колебаниям, выражается формулой:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Отсюда для усредненной по времени интенсивности света, рассеянного в данном направлении, найдем:

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{4\pi c^3} \overline{|e\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}|^2} = \frac{cE_0^2 r_0^2}{8\pi} \cdot \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

где ϑ — угол между направлением \mathbf{n} распространения рассеянного излучения и направлением поляризации падающей волны. Плотность потока энергии (усредненная по времени) в падающей волне $\bar{\gamma}_0 = \frac{cE_0^2}{8\pi}$. Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\bar{\gamma}_0} \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = r_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Полное сечение рассеяния получается отсюда интегрированием по углам:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

В случае сильно связанного электрона, когда $\omega_0 \gg \omega$,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{r_0^2 \omega^4}{\omega_0^4}.$$

Характерна зависимость сечения от частоты: $\sigma \sim \omega^4$.

В случае слабо связанного электрона при малом лучистом трении $\gamma \approx 0$, $\omega_0 \approx 0$ и

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}.$$

800. $\mathbf{H} = -\frac{Ae^2}{mc^2 r} (\mathbf{e}_\alpha \cos \vartheta - i\mathbf{e}_\vartheta) e^{-i(\omega t' - \alpha)}$, где ϑ, α — полярные углы направления \mathbf{n} распространения рассеянной волны (направление распространения падающей волны вдоль оси z), A — амплитуда падающей волны.

Из выражения \mathbf{H} видно, что рассеянная волна оказывается, вообще говоря, эллиптически поляризованной. Волны, рассеянные вперед и назад, поляризованы по кругу. Волна, рассеянная в плоскости xy , поляризована линейно. Дифференциальное и полное сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{(1 + \cos^2 \vartheta)}{2}, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

801. $\rho = \cos^2 \vartheta$.

802. В случае линейно поляризованной волны:

$$d\sigma_{\text{пол}} = r_0^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} [(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha],$$

где ϑ, α — полярные углы направления распространения рассеянной волны, ось z параллельна скорости \mathbf{v} заряда, $\beta = \frac{v}{c}$, азимутальный угол α отсчитывается от направления вектора \mathbf{E} в падающей волне.

В случае неполяризованной волны:

$$d\sigma_{\text{непол}} = r_0^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} \left[\frac{1 + \beta^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) - 2\beta \cos \vartheta \right].$$

803. Решая уравнение движения осциллятора в магнитном поле $\mathbf{H} \parallel z$ так, как это делалось в задаче 695, получим при

$$\omega_0 \gg \frac{eH}{2mc} = \omega_L,$$

$$\mathbf{r} = A_1(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i(\omega_0 - \omega_L)t} + A_2(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} + A_3\mathbf{e}_ze^{-i\omega t},$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Из выражения \mathbf{r} видно, что осциллятор, помещенный в магнитное поле, становится анизотропным, частота его колебаний расщепляется на 3 частоты: ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_L$. При наблюдении излучения в любом направлении поляризация каждой из монохроматических компонент оказывается, вообще говоря, эллиптической. В частности, вдоль оси z (вдоль поля \mathbf{H}) наблюдаются две спектральные линии, поляризованные по кругу в противоположные стороны. В перпендикулярном к полю направлении наблюдаются все три монохроматические компоненты, поляризованные линейно. При этом вектор электрического поля несмещенной спектральной линии колеблется в направлении магнитного поля, вектора же электрического поля у обеих смещенных линий колеблются в перпендикулярном направлении.

§ 4. Разложение электромагнитного поля на плоские волны

805.

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi_\omega(\mathbf{r}) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{E}_\mathbf{k}(t) = -ik\varphi_\mathbf{k}(t) - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k},$$

$$\mathbf{H}_\mathbf{k}(t) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\mathbf{k}(t),$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -ik\varphi_{\mathbf{k}\omega} + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}.$$

806. а) $\text{rot } \mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}_\omega, \quad \text{div } \epsilon\mathbf{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega,$

$$\text{rot } \mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega\epsilon}{c}\mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega, \quad \text{div } \mu\mathbf{H}_\omega = 0;$$

б) $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\mathbf{k} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}_\mathbf{k}, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_\mathbf{k} = 4\pi\rho_\mathbf{k},$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_\mathbf{k} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}_\mathbf{k} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_\mathbf{k} = 0;$$

$$\text{в) } \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}}{\varepsilon},$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = 0.$$

$$807. \text{ а) } \Delta\varphi_{\omega} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\varphi_{\omega} = -\frac{4\pi\rho_{\omega}}{\varepsilon}, \quad \Delta\mathbf{A}_{\omega} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\mathbf{A}_{\omega} = -\frac{4\pi\mu\mathbf{j}_{\omega}}{c},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_{\omega} - \frac{i\omega\varepsilon\mu}{c}\varphi_{\omega} = 0;$$

$$\text{б) } \varepsilon\mu\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2c^2\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi c^2\rho_{\mathbf{k}}}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon\mu\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + k^2c^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi c\mu\mathbf{j}_{\omega}, \quad -i\mathbf{c}\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \varepsilon\mu\dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = 0;$$

$$\text{в) } \left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{\mathbf{k}\omega}, \quad \left(k^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega},$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} - \frac{\omega\varepsilon\mu}{c}\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 0.$$

808. Воспользуемся формулой (XII.40'). Выполняя интегрирование по углам, получим

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi^2k} \int_0^{\infty} \sin kr \, dr.$$

Последний интеграл не имеет, вообще говоря, определенного значения, так как величина

$$I_N = \int_0^N \sin kr \, dr = \frac{1 - \cos kN}{k} \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

не стремится ни к какому определенному пределу. Легко видеть, однако, что неопределенный член, содержащий $\cos kN$, не дает вклада в потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ при подстановке I_N в разложение (XII.40) и переходе к пределу $N \rightarrow \infty$.

Это вытекает из того, что $\int_0^{\infty} \frac{\cos kN}{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{k}) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ вследствие быстрых осцилляций. Таким образом, эффективно можно положить

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2k^2}.$$

Заметим, что значение $I = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \frac{1}{k}$ можно получить, например, если определить I как предел $\int_0^{\infty} e^{-br} \sin kr \, dr$ при $b \rightarrow 0$.

Можно получить тот же результат и другим способом. Применяя к обеим частям равенства $\varphi(\mathbf{r}) = \int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{k})$ оператор Лапласа Δ , получим

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, выражение компоненты Фурье $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{e}{2\pi^2}$ можно получить, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r})$. Приравнивая эти два выражения для $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, получим для $\varphi_{\mathbf{k}}$ прежний результат.

$$809. \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{2\pi^2 k^2}.$$

810. Так как объемная плотность $\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, то

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{e}{(2\pi)^4} \iint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{r}) dt = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} dt = \frac{e}{8\pi^3} \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью результатов предыдущей задачи находим

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Таким же образом можно получить, что

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 c} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Используя выражения компонент напряженностей поля (см. решение задачи 805), получим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{v}\omega}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{e}{2\pi^2 c} (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Во всех компонентах поля присутствует множитель $\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)$, обязанный дисперсионному уравнению $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Благодаря этому, все разложения Фурье электромагнитного поля в данном случае фактически являются не четырех-, а трехмерными. Например, в случае потенциала φ :

$$\varphi = \int_{(\mathbf{k})-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{k}) d\omega = \int \varphi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (d\mathbf{k}),$$

где

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t}}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

812. Рассмотрим вычисление скалярного потенциала. Согласно уравнениям в) решения задачи 807

$$\rho_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (\varepsilon = \mu = 1).$$

Компонента Фурье плотности заряда:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}\omega} &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathbf{p} \cdot \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{r}) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int [\mathbf{p} \cdot \text{grad} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) (d\mathbf{r}) dt = -i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ имеет тот же вид, что и в случае поля равномерно движущегося точечного заряда (см. задачу 810). Поступая при вычислении $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в соответствии с указанием к задаче 811, получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{p} \cdot \text{grad} \frac{1}{r^*} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r^{*3}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_0 = \left(x - vt, \frac{y}{\gamma^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right)$, $r^* = \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(y^2 + z^2)}$.

Аналогичные вычисления дают для векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}^*}{r^{*3}} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0)}{cr^{*3}}. \quad (2)$$

813.

$$a) \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}^*}{\gamma r^{*3}}, \quad \varphi = 0;$$

$$б) \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{r}^*}{r^{*3}}, \quad \varphi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c}.$$

816. Разложим все векторы, входящие в уравнения Максвелла, на безвихревую и соленоидальную¹ (или продольную и поперечную — см. задачу 815) части:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, & \mathbf{j} &= \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\perp}, & \mathbf{H}_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Приравнивая поперечные части векторов, получим из уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_{\perp} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\perp}, \\ \text{div } \mathbf{E}_{\perp} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Продольная (безвихревая) часть электрического поля определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \\ \text{rot } \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

имеющими вид уравнений электростатики. Время в них входит как параметр. Отсюда следует, что \mathbf{E}_{\parallel} — кулоново поле.

817. Согласно результатам задачи 8076,

$$\ddot{q}_{k\lambda} + \omega_k^2 q_{k\lambda} = 0, \quad (1)$$

где $\omega_k = kc$.

Это уравнение линейного гармонического осциллятора. Его общее решение имеет вид:

$$q_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda} e^{-i\omega t} + b_{k\lambda} e^{i\omega t}.$$

Коэффициенты $a_{k\lambda}$ и $b_{k\lambda}$ связаны между собой соотношением, вытекающим из вещественности $[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^*(\mathbf{r}, t)]$:

$$e_{k\lambda} a_{k\lambda} = e_{-k\lambda}^* b_{-k\lambda}^*, \quad e_{k\lambda} b_{k\lambda} = e_{-k\lambda}^* a_{-k\lambda}^*.$$

¹Разложение электромагнитного поля на продольную и поперечную части используется в одном из вариантов квантовой электродинамики. При этом разложении поперечная часть поля квантуется — ей соответствуют частицы (фотоны), продольная часть поля не квантуется.

Если выбрать орты, описывающие основные состояния поляризации волн с противоположными волновыми векторами \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ так, что

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = \mathbf{e}_{-\mathbf{k}\lambda}^*, \quad (2)$$

то

и

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathbf{k}\lambda} &= b_{-\mathbf{k}\lambda}^*, & b_{\mathbf{k}\lambda} &= a_{-\mathbf{k}\lambda}^* \\ q_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= a_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega t} + a_{-\mathbf{k}\lambda}^* e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Напряженности поля \mathbf{E} , \mathbf{H} выражаются через координаты $q_{\mathbf{k}\lambda}(t)$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(d\mathbf{k}), \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{ic}{\pi\sqrt{2}} \int \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(d\mathbf{k}). \quad (5)$$

Рассмотрим вычисление энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)(d\mathbf{r}).$$

Так как \mathbf{E} , \mathbf{H} — вещественны, то можно написать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int E^2(d\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*(d\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{8\pi} \iiint \sum_{\lambda\lambda'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}'\lambda'}^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}(d\mathbf{r})(d\mathbf{k})(d\mathbf{k}') = \\ &= \frac{1}{2} \int \sum_{\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^*(d\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Мы воспользовались ортогональностью ортов поляризации, принадлежащих одному и тому же \mathbf{k} , но разным λ : $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_2}^* = 0$, а также формулой (П 1.15). Аналогичным образом вычисляется энергия магнитного поля. Для полной энергии электромагнитного поля получаем:

$$W = \frac{1}{2} \int \sum_{\lambda} (\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^*)(d\mathbf{k}). \quad (6)$$

Она складывается из энергий

$$W_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2} (\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^*) \quad (7)$$

отдельных «осцилляторов поля». Энергию поля (6) можно выразить непосредственно через коэффициенты $a_{\mathbf{k}\lambda}$, используя выражение (3):

$$W = 2 \int \sum_{\lambda} \omega_{\mathbf{k}}^2 a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^* (d\mathbf{k}). \quad (8)$$

Аналогичным образом получаем для импульса поля выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H}(d\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H})(d\mathbf{r}) = \\ &= \frac{i}{2} \int \sum_{\lambda} \mathbf{k} (\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^* - \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* q_{\mathbf{k}\lambda}) (d\mathbf{k}). \quad (9) \end{aligned}$$

Рассмотренные в этой задаче осцилляторные координаты $q_{\mathbf{k}\lambda}$ аналогичны координатам, описывающим нормальные колебания механической системы (главное отличие от механики состоит в том, что поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы). Эта аналогия позволяет применять формальные методы квантовой механики к решению задач квантовой электродинамики.

818.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[Q_{\mathbf{k}\lambda}(t) \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{\omega} \dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda}(t) \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right] (d\mathbf{k}), \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[\dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega Q_{\mathbf{k}\lambda} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right] (d\mathbf{k}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \sum_{\lambda} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) \left[Q_{\mathbf{k}\lambda} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\omega} \dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right] (d\mathbf{k}). \end{aligned}$$

При выводе выражения для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ мы использовали то обстоятельство, что координаты $Q_{\mathbf{k}\lambda}$ удовлетворяют уравнению

$$\ddot{Q}_{\mathbf{k}\lambda} + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\lambda} = 0.$$

Выражение энергии поля проще всего получить из формулы (8) предыдущей задачи, выразив входящие в нее коэффициенты $a_{\mathbf{k}\lambda}$ и $a_{\mathbf{k}\lambda}^*$ через $Q_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\lambda} &= \frac{1}{2} Q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\omega t} + \frac{i}{2\omega} \dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\omega t}, \\ a_{\mathbf{k}\lambda}^* &= \frac{1}{2} Q_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega t} - \frac{i}{2\omega} \dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int (\dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}^2) (d\mathbf{k}).$$

Из последней формулы видно, что энергия свободного электромагнитного поля представляется в виде суммы энергий осцилляторов поля, имеющих в точности такой же вид, как в случае механической колебательной системы:

$$W = \int \sum_{\lambda} W_{\mathbf{k}\lambda}(d\mathbf{k}), \quad (9)$$

где $W_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2}(\dot{Q}_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}^2)$.

Вычисление импульса поля \mathbf{G} дает:

$$\mathbf{G} = \int \sum_{\lambda} W_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathbf{k}}{kc} (d\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H}(d\mathbf{r}).$$

Импульс отдельного осциллятора $\mathbf{G}_{\mathbf{k}\lambda}$ связан с его энергией формулой

$$\mathbf{G}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{\mathbf{k}W_{\mathbf{k}\lambda}}{kc}. \quad (10)$$

Такой же формулой выражается связь энергии с импульсом в случае частиц, движущихся со скоростью света в направлении \mathbf{k} (фотоны!).

819. Записав уравнения, приведенные в решении задачи 807, и умножая их на $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}^*$, получим для поперечной части потенциала $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$:

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}\lambda}(t) = F_{\mathbf{k}\lambda}(t), \quad (1)$$

где

$$F_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{ec}{2\pi^2} [\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}^* \cdot \mathbf{v}(t)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t)}, \quad (2)$$

а $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t , \mathbf{v} — ее скорость в этот же момент времени. В нерелятивистском случае

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F} + e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (3)$$

где m — масса частицы, \mathbf{F} — действующая на частицу сила неэлектромагнитного происхождения,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \dot{q}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} (d\mathbf{k}) \quad (4)$$

— напряженность поля излучения в той точке, где находится частица. Мы не учитываем силу, действующую на частицу со стороны магнитного поля, так как предполагается, что $v \ll c$. Уравнение (1) представляет собой уравнение вынужденных колебаний осциллятора под действием внешней силы $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$. Движение частицы и электромагнитного поля, взаимодействующих между собой, описывается системой уравнений (1), (3).

820. Изменение энергии одного осциллятора:

$$\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}(F_{\mathbf{k}\lambda}\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + F_{\mathbf{k}\lambda}^*\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}).$$

Скорость изменения энергии поля:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \int (F_{\mathbf{k}\lambda}\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}^* + F_{\mathbf{k}\lambda}^*\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda})(d\mathbf{k}).$$

821. Сила $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ в данном случае принимает вид

$$F_{\mathbf{k}\lambda}(t) = b_{\mathbf{k}\lambda} \cos \omega_0 t,$$

где

$$b_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{e}{\pi\sqrt{2}}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}), \quad \mathbf{v}_0 = \omega_0 \mathbf{r}_0$$

(для простоты рассматриваем линейно поляризованные осцилляторы поля, так что орты $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ — вещественны). Интегрируя уравнение (1) задачи 819, получаем

$$q_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2}(\cos \omega_0 t - \cos \omega_{\mathbf{k}} t),$$

если в начальный момент времени $t = 0$ осцилляторы поля не были возбуждены. Это значение $q_{\mathbf{k}\lambda}$ подставим в выражение для скорости изменения энергии поля излучения $\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt}$, найденное в задаче 820:

$$\frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2}(\omega_{\mathbf{k}} \cos \omega_0 t \sin \omega_{\mathbf{k}} t - \omega_0 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t).$$

Интегрируя последнее выражение по t от 0 до t , получим количество энергии, переданное частицей за время t осциллятору поля (\mathbf{k}, λ) :

$$W_{\mathbf{k}\lambda} = \int_0^t \frac{dW_{\mathbf{k}\lambda}}{dt} dt = \frac{b_{\mathbf{k}\lambda}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_0^2} \left[\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0)t}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0} - \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{\omega_0} \right].$$

При $\omega_k = \omega_0$ и $t \rightarrow \infty$ второй член в скобках очень велик по сравнению с первым и третьим членами. Возбуждение осцилляторов происходит, следовательно, резонансным образом: в первую очередь возбуждаются те осцилляторы поля, частота которых близка к частоте вынуждающей силы $F_{k\lambda}$. Оставим поэтому только резонансный член и просуммируем энергии, полученные осцилляторами поля, у которых частоты не сильно отличаются от ω_0 , направление \mathbf{k} заключено внутри телесного угла $d\Omega$, а орт поляризации \mathbf{e}_{k1} (\mathbf{e}_{k2}) имеет одно и то же направление:

$$dW = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} W_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{d\Omega}{2c^3} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} \sum_{\lambda} \frac{\omega_k^3 b_{k\lambda}^2}{\omega_k + \omega_0} \cdot \frac{1 - \cos(\omega_k - \omega_0)t}{(\omega_k - \omega_0)^2} d\omega_k.$$

Подынтегральная функция в последнем выражении имеет резкий максимум при $\omega_k = \omega_0$. Этот максимум тем уже, чем больше t . При достаточно больших t можно вынести плавно меняющийся множитель $\sum_{\lambda} \frac{\omega_k^3 b_{k\lambda}^2}{\omega_k + \omega_0}$ за знак интеграла, положив в нем $\omega_k = \omega_0$. В оставшемся интеграле можно устремить δ к ∞ . Тогда он примет вид (см. приложение 1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha^2} d\alpha = \pi t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Мы получим, таким образом:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\pi(b_{k1}^2 + b_{k2}^2)\omega_0^2}{2c^3} t.$$

Отсюда для интенсивности излучения в данном направлении находим хорошо известный результат:

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{t} \frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^2 \overline{v^2} \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3},$$

где через $\overline{v^2} = \frac{v_0^2}{2}$ обозначена средняя скорость колеблющейся частицы, через ϑ — угол между направлением \mathbf{v}_0 и направлением \mathbf{k} . При выводе последней формулы мы воспользовались легко получаемым соотношением

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{k1})^2 + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_{k2})^2 = v_0^2 \sin^2 \vartheta.$$

Интегрированием по углам находим полную интенсивность излучения

$$\bar{I} = \frac{2e^2\omega_0^2\overline{v^2}}{3}.$$

823*. Будем приближенно решать систему уравнений (1) и (3) задачи 819. Пренебрегая реакцией излучения, подставим в уравнение (3) напряженность поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ падающей волны. Его решение, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1)$$

Движение частицы под действием падающей волны будет возбуждать осцилляторы поля излучения согласно уравнению (1) задачи 819, в котором нужно силу $F_{k\lambda}$ выразить через $\mathbf{r}(t)$:

$$F_{k\lambda} = \frac{e^2\omega}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathbf{e}_{k\lambda} \cdot \mathbf{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t.$$

Орты поляризации выбраны вещественными. Решая уравнения (1) задачи 819 с начальным условием $q_{k\lambda}(0) = 0$, получим:

$$q_{k\lambda}(t) = \frac{e^2}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{k\lambda})}{(\omega_k^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2)} (\sin \omega t - \sin \omega_k t).$$

Поступая далее так же, как в задаче 821, найдем интенсивность излучения в направлении \mathbf{k} с поляризацией, характеризуемой ортом $\mathbf{e}_{k\lambda}$:

$$\frac{dI_{k\lambda}}{d\Omega} = \frac{1}{t} \frac{dW_{k\lambda}}{d\Omega} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\omega^4 (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{k\lambda})^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (2)$$

Из (2) видно, что рассеянное излучение линейно поляризовано в плоскости, проходящей через \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} . Вводя угол ϑ между векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} , получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2} \frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \vartheta,$$

что находится в полном согласии с результатом задачи 799. Интегрированием по углам находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

ГЛАВА XIII

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ВЕЩЕСТВОМ

826. Разложив векторы поля в интеграл Фурье по координатам и времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \int \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t)} (d\mathbf{k}) d\omega \dots,$$

получим из уравнений Максвелла систему алгебраических уравнений относительно амплитуд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \kappa \mathbf{n} \times \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega), \\ \kappa \mathbf{n} \times \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega) &= -\varepsilon(\omega) \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) - i \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2 \omega^2} \delta\left(\frac{\kappa}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - 1\right), \\ \kappa \varepsilon(\omega) \mathbf{n} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) &= -i \frac{e\mathbf{c}}{2\pi^2 \omega^2} \delta\left(\frac{\kappa}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - 1\right), \\ \kappa \mathbf{n} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

здесь $\mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega)$ — амплитуда Фурье магнитного поля, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \kappa \mathbf{n}$, κ — параметр, выражающийся через ω и \mathbf{k} , \mathbf{n} — единичный вектор. При выводе (1) нужно учесть, что амплитуда Фурье функции $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{v}t)$ равна $\frac{1}{8\pi^3} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)$ и что $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$. Из системы (1) определяются \mathcal{E} и \mathcal{H} :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{i e \mathbf{c}}{2\pi^2 \omega^2} \cdot \frac{\kappa \mathbf{n} - (\mathbf{v}/c) \varepsilon}{\varepsilon(\kappa^2 - \varepsilon)} \delta\left(\frac{\kappa}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - 1\right), \\ \mathcal{H}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{i e \kappa}{2\pi^2 \omega^2} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}}{\kappa^2 - \varepsilon} \delta\left(\frac{\kappa}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - 1\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для определения полей нужно произвести обратное преобразование Фурье. Начнем с вычисления $E_z(\mathbf{R}, t)$. Как следует из (2):

$$E_z(\mathbf{k}, \omega) = \frac{ie\epsilon}{2\pi^2\omega^2} \cdot \frac{\kappa \cos\theta - \beta\epsilon}{\epsilon(\kappa^2 - \epsilon)} \delta(\beta\kappa \cos\theta - 1),$$

поэтому

$$E_z(\mathbf{R}, t) = -\frac{ie}{2\pi^2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \kappa^2 d\kappa \int \frac{\kappa \cos\theta - \beta\epsilon}{\epsilon(\kappa^2 - \epsilon)} \times \\ \times \exp\left\{i\frac{\omega}{c} \kappa [r \sin\theta \cos(\Phi - \varphi) - z \cos\theta]\right\} \delta(\beta\kappa \cos\theta - 1) \sin\theta d\theta d\Phi. \quad (3)$$

Здесь через r обозначена составляющая \mathbf{R} в плоскости xy , φ — угол между r и осью x , $\beta = \frac{v}{c}$, θ и Φ — полярные углы \mathbf{k} .

Интеграл по Φ выражается через функцию Бесселя $J_0\left(\frac{\omega}{c} \kappa r \sin\theta\right)$ (см. П3.11).

Интеграл по θ имеет вид:

$$\int_0^{\pi} f(\theta) \delta(\beta\kappa \cos\theta - 1) \sin\theta d\theta = \frac{1}{\beta\kappa} \int_{-\beta\kappa}^{\beta\kappa} \varphi(y) \delta(y - 1) dy. \quad (4)$$

Он отличен от нуля только в случае, если $\beta\kappa \geq 1$, поэтому нижний предел изменения κ равен $1/\beta$. В формуле (3) это учитывается автоматически, вследствие наличия δ -функции, но после интегрирования по y δ -функция исчезнет, и нужно будет учесть нижний предел интегрирования в явном виде.

Интегрируя (4) по y , получим

$$\frac{1}{\beta\kappa} \varphi(1) = \frac{1}{\beta\kappa} f(\theta) \Big|_{\cos\theta = \frac{1}{\beta\kappa}}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (3) и введем вместо κ переменную $x = \sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{\beta^2}}$; поскольку κ меняется в пределах от $1/\beta$ до ∞ , x будет меняться от 0 до ∞ . Тогда $E_z(\mathbf{R}, t)$ запишется в виде:

$$E_z(\mathbf{R}, t) = \frac{ie}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} \left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon}\right) \int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c} r x\right) x dx}{x^2 + 1/\beta^2 - \epsilon}.$$

Формула (П 3.16) позволяет провести интегрирование по x :

$$E_z(\mathbf{R}, t) = \frac{ie}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon}\right) K_0(sr) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} \omega d\omega, \quad (6)$$

где обозначено $s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$. Знак s нужно выбирать так, чтобы $\operatorname{Re} s > 0$, в противном случае интеграл по ω оказывается расходящимся. Интегрирование по ω в (6) можно провести, только задавшись конкретным видом функции $\varepsilon(\omega)$.

При вычислении $E_x(\mathbf{R}, t)$ также начинаем с интегрирования по Φ .

Интегрирование по θ выполняется с помощью δ -функции. При последующем интегрировании по $x = \sqrt{x^2 - \frac{1}{\beta^2}}$ нужно воспользоваться формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(xr)x^2 dx}{x^2 + k^2} = kK_1(kr),$$

которая получается из (П 3.16) дифференцированием по r , если учесть, что $J_0' = -J_1$, $K_0' = -K_1$.

В результате находим

$$E_x(\mathbf{R}, t) = \cos \varphi \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(sr) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} d\omega.$$

Компоненты $E_y(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$ определяются таким же путем. E_y отличается от E_x заменой $\cos \varphi$ на $\sin \varphi$; поэтому в цилиндрических координатах имеем

$$E_r(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(sr) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} d\omega, \quad E_\varphi = 0. \quad (7)$$

Для \mathbf{H} получим

$$H_\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} s K_1(sr) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} d\omega, \quad H_z = H_r = 0. \quad (8)$$

Как следует из формул (6)–(8), электромагнитное поле обладает аксиальной симметрией.

Полученные формулы справедливы только в области $r \gg a$, где a — величина порядка межатомных расстояний. В области $r \leq a$ необходимо учитывать пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости.

827. Как следует из формул (6)–(8) предыдущей задачи, монохроматические компоненты полей $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{R}, t)$ имеют вид:

$$E_{\omega z}(\mathbf{R}, t) = \frac{i e \omega}{\pi c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon} \right) K_0(sr) e^{i\omega \left(\frac{z}{v} - t \right)} \dots, \quad (1)$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega), \quad \text{Re } s > 0, \quad (2)$$

а K_n — модифицированные функции Бесселя.

В волновой зоне $|sr| \gg 1$, вследствие чего можно использовать асимптотическое выражение (П3.8) для функций K_n :

$$K_n(sr) = \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} e^{-sr}. \quad (3)$$

Из (2) следует, что при вещественном $\epsilon(\omega)$ s будет вещественным, если $\frac{1}{\beta^2} > \epsilon(\omega)$ или $\beta n(\omega) < 1$ ($n(\omega)$ — показатель преломления для волн с частотой ω). При $\beta n(\omega) > 1$ s будет чисто мнимым.

Если s — вещественная величина (в силу (2), при этом $s > 0$), то в волновой зоне поле будет затухать экспоненциально, излучения не происходит. При чисто мнимом s амплитуда полей в волновой зоне будет меняться как $1/\sqrt{r}$, что соответствует цилиндрическим волнам. Покажем, что эти волны будут расходящимися, т. е. в этом случае действительно будет происходить излучение.

Запишем s в виде

$$s = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \epsilon(\omega)} = \pm i \frac{\omega}{c} n \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \quad (4)$$

и выясним, какой знак нужно выбрать перед корнем. Для этого нужно принять во внимание, что рассматриваемый диэлектрик без потерь является предельным случаем слабо поглощающего диэлектрика с комплексным показателем преломления $n = n' + in''$. Чтобы мнимая часть показателя преломления n'' действительно описывала поглощение энергии (т. е. чтобы амплитуда соответствующей волны затухала, а не возрастала), требуется

выполнение условий $n'' > 0$ при $\omega > 0$ и $n'' < 0$ при $\omega < 0$. Считая n'' весьма малым, можем записать

$$\sqrt{\beta^2(n' + in'')^2 - 1} \approx \sqrt{\beta^2 n'^2 - 1} \left(1 + i \frac{\beta n' n''}{\beta^2 n'^2 - 1}\right).$$

Отсюда следует, что условие $\text{Re } s > 0$ будет выполняться, если выбрать в (4) знак минус. Устремив после этого n'' к нулю, получим

$$s = -i \frac{\omega n}{c} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}. \quad (5)$$

Но такой знак как раз соответствует расходящимся волнам, так как экспоненциальный множитель в выражениях (1) примет вид

$$\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t) = \exp i[k(z \cos \theta + r \sin \theta) - \omega t], \quad (6)$$

где $k = \frac{\omega}{c} n$, $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}}$, $k \cos \theta = k_z = k_{\parallel}$ и $k \sin \theta = k_{\perp}$ — компоненты волнового вектора.

Таким образом, при выполнении условия $\beta n(\omega) > 1$ частица, движущаяся в диэлектрике с постоянной скоростью $v = \beta c$, излучает электромагнитные волны с частотой ω (излучение Вавилова — Черенкова). Условие $\beta n > 1$ означает, что скорость частицы должна превосходить фазовую скорость волны с частотой ω в данной среде. Как следует из выражения для волнового вектора \mathbf{k} , излучение направлено под углом θ к скорости частицы, причем

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n(\omega)}. \quad (7)$$

Эта характерная направленность излучения является следствием когерентности волн, испускаемых частицей в разных точках ее траектории (см. задачу 829).

Фазовая скорость волн Вавилова — Черенкова

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{n}$$

— такая же, как у всех поперечных электромагнитных волн. Поляризацию излучения легко определить из формул (1): вектор \mathbf{H} направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через траекторию частицы и волновой вектор \mathbf{k} , а вектор \mathbf{E} лежит в указанной плоскости (и перпендикулярен \mathbf{k} в волновой зоне). В перпендикулярности \mathbf{k} и \mathbf{E} можно убедиться, вычислив скалярное произведение $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\omega}$.

Полная энергия черенковского излучения $\omega_{B-ч}$ на единице пути равна интегралу по времени от потока вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную цилиндрическую поверхность единичной длины, окружающую траекторию частицы:

$$\omega_{B-ч} = 2\pi r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_r dt = -\frac{cr}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_\varphi E_z dt. \quad (8)$$

Используя формулу, приведенную на стр. 572, можно представить (8) в виде

$$\omega_{B-ч} = -2\pi cr \operatorname{Re} \int_{\beta n(\omega) > 1} H_{\omega\varphi}^* E_{\omega z} d\omega, \quad (9)$$

где монохроматические компоненты $H_{\omega\varphi}$, $E_{\omega z}$ должны быть взяты в волновой зоне, а интегрирование ведется по области частот, в которой выполняется условие излучения $\beta n(\omega) > 1$. С помощью формул (1)–(3) находим окончательно:

$$\omega_{B-ч} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n(\omega) > 1} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \omega d\omega. \quad (10)$$

828. $\omega_{B-ч} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v^2} (\beta^2 - 1) + \frac{e^2 \omega_0^2}{2v^2} (\epsilon_0 - 1) \ln \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1}$. При указанных в условии задачи значениях параметров $\omega_{B-ч} \approx 5000$ эв/см.

Излучение сконцентрировано в интервале углов

$$\theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

где

$$\beta^2 \epsilon_0 \cos^2 \theta_0 = 1.$$

829. Каждую точку траектории можно рассматривать как источник элементарного возбуждения, распространяющегося в виде сферической волны со скоростью $v_\varphi = \frac{c}{n}$ (рис. 131). Фронт результирующей волны представляет собой огибающую элементарных сферических волн. Нормаль к фронту составляет с траекторией угол θ , причем, как следует из рисунка, $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$.

830. Поле равномерно движущейся заряженной частицы представляет собой суперпозицию плоских волн с частотами $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, где \mathbf{v} — скорость частицы, \mathbf{k} — волновой вектор (см. задачу 810). В неограниченном

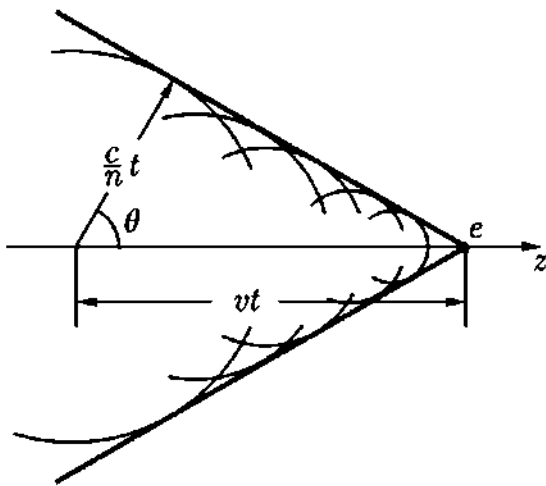


Рис. 131

диэлектрике возможны колебания с частотами $\omega = \frac{kc}{n}$, где n — показатель преломления среды (собственные колебания среды). Из условия резонанса

$$\frac{kc}{n} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv \cos \theta$$

следует, что $\cos \theta = \frac{c}{vn}$. Так как $\cos \theta \leq 1$, то $\frac{vn}{c} \geq 1$, а это и есть условие существования излучения Вавилова — Черенкова.

$$831. \quad \tau = \frac{l}{v} \operatorname{tg}^2 \theta, \quad I = \omega_{\text{В-ч}} v \operatorname{ctg}^2 \theta,$$

где $\cos \theta = \frac{c}{nv}$, $\omega_{\text{В-ч}}$ — энергия черенковского излучения на единице длины, вычисленная в задаче 827.

833. При $\beta n < 1$ (т. е. при $v < v_\varphi$)

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon \sqrt{(z - vt)^2 + r^2(1 - \beta^2 n^2)}}. \quad (1)$$

Это выражение получается таким же путем, как в задаче 811.

При $\beta n > 1$ метод, примененный в задаче 811, не может быть использован, так как подынтегральное выражение в этом случае будет иметь полюс при $k^2 = \varepsilon \mu \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2}$.

Введя в пространстве \mathbf{k} цилиндрические координаты, запишем φ в виде

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{2\pi^2 \varepsilon} \int \frac{e^{ik_z(z-vt) + ik_\perp r \cos \alpha}}{k_\perp^2 - k_z^2(\beta^2 n^2 - 1)} k_\perp dk_\perp dk_z d\alpha.$$

Для вычисления интеграла по k_z воспользуемся теоремой о вычетах. Знаменатель имеет нули в точках $k_z = \pm \frac{k_\perp}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}$; чтобы выяснить правило

обхода этих полюсов, допустим, что n имеет малую мнимую часть $n'' > 0$ при $k_z > 0$, $n'' < 0$ при $k_z < 0$ (см. аналогичный анализ в задаче 827; в данном случае знак ω совпадает со знаком k_z , так как $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$). Поэтому оба нуля будут смещены в нижнюю полуплоскость комплексной переменной k_z . При $z > vt$ нужно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости (на этой дуге подынтегральная функция обращается в нуль). Так как знаменатель не имеет нулей

в верхней полуплоскости, интеграл по k_z в этом случае будет равен нулю. При $z < vt$ замыкаем контур интегрирования в нижней полуплоскости. Вклад в интеграл дают оба полюса, в результате интегрирования получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_z(z-vt)}}{k_{\perp}^2 - k_z^2(\beta^2 n^2 - 1)} dk_z = -\frac{2\pi}{k_{\perp} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}} \sin \frac{k_{\perp}(z-vt)}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}.$$

Интеграл по α выражается через функцию Бесселя $J_0(k_{\perp} r)$ (см. П 3.11). Последний интеграл по k_{\perp} вычислим с помощью формулы (6.671, 7), приведенной в справочнике [90]. Таким образом, при $\beta n > 1$ имеем:

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \begin{cases} \frac{2e}{\varepsilon \sqrt{(z-vt)^2 - r^2(\beta^2 n^2 - 1)}} & \text{при } z < vt - r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \\ 0 & \text{в остальном пространстве.} \end{cases} \quad (2)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} получается умножением φ на $\frac{\varepsilon \mu \mathbf{v}}{c}$.

Формула (2) показывает, что при выполнении условия Вавилова–Черенкова $\beta n > 1$ поле является разрывным. Оно существует только внутри конуса, поверхность которого описывается уравнением

$$z - vt + r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} = 0. \quad (3)$$

Нормаль к поверхности конуса составляет с направлением движения частицы угол $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\beta n}\right)$. Как следует из (3), коническая волна распространяется вдоль оси z со скоростью частицы.

Рассмотренную структуру могут иметь не только электромагнитные волны, но и волны другой природы. Например, разрывные акустические волны указанного типа возбуждаются снарядом, движущимся в воздухе со скоростью, большей скорости звука (ударная баллистическая волна). Тот же характер имеют волны, образованные на поверхности воды достаточно быстро движущимся судном.

834. Излучение Вавилова–Черенкова происходит при условии $\beta n > 1$, где $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$; векторный потенциал имеет вид:

$$A_x = \frac{i\mathcal{I}}{c} \int \frac{\exp i\frac{\omega}{v}(y-vt + \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}|z|)}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}} \cdot \frac{\mu(\omega) d\omega}{\omega};$$

$$\omega_{\text{В-Ч}} = \frac{2\mathcal{I}^2}{c^2 v} \int_{\beta n > 1} \frac{\mu(\omega) d\omega}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}.$$

Тормозящая сила вычисляется по формуле $\mathbf{f} = \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, где \mathbf{B} должно быть взято в точке $z = 0$, $y = vt$. Сила приложена в направлении, обратном оси y , и по абсолютной величине равна потере энергии на единице пути: $F_y = -\omega_{\text{в-ч}}$. Этот результат прямо вытекает из закона сохранения энергии.

835. $\omega_{\text{в-ч}} = \frac{2e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left(1 \pm \cos \frac{\omega l}{v}\right) \omega d\omega$. Знак плюс соответствует случаю а), минус — случаю б). Спектральная плотность излучения двух одинаковых зарядов отличается от спектральной плотности излучения одного заряда множителем $2\left(1 + \cos \frac{\omega l}{v}\right)$. Поэтому интенсивность гармоник с частотами

$$\omega = \frac{2\pi v}{l} n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

возрастает в 4 раза, а гармоники с частотами

$$\omega = \frac{\pi v}{l} (2n + 1)$$

исчезнут. При различных по знаку зарядах картина станет обратной. Для перехода к случаю точечного диполя, ориентированного по направлению движения, нужно разложить $1 - \cos \frac{\omega l}{v}$ в ряд, считая аргумент косинуса малым. Это даст

$$\omega_{\text{в-ч}} = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega^3 d\omega,$$

где p — электрический момент диполя, измеренный в лабораторной системе.

$$\mathbf{836.} \quad \omega_{\text{в-ч}} = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (\beta^2 n^2 - 1)\right] \omega^3 d\omega,$$

где $n = \sqrt{\epsilon}$, p — электрический дипольный момент в лабораторной системе отсчета.

$$\mathbf{837.} \quad \omega_{\text{в-ч}} = \frac{m^2}{c^2 v^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) n^2 \omega^3 d\omega.$$

838. Потери энергии на единицу пути выражаются интегралом по времени от потока энергии через цилиндрическую поверхность единичной длины и радиуса a , окружающую траекторию частицы. Для вычисления

потерь можно воспользоваться формулой (9), полученной при решении задачи 827, если в этой формуле взять значения полей при $r = a$ и вести интегрирование по всем частотам от 0 до ∞ . Используя выражения компонент поля, найденные в задаче 826, и указанный в условии данной задачи конкретный вид функции $\varepsilon(\omega)$, получим

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2\omega_0^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} i \int_0^\infty \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0-x^2} - \beta^2 \right) s^* a K_1(s^* a) K_0(sa) x dx, \quad (1)$$

где $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$ — статическое значение диэлектрической проницаемости,

$$s^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \frac{b-x^2}{1-x^2} x^2, \quad b = \frac{c^2 - \varepsilon_0 v^2}{c^2 - v^2}. \quad (2)$$

Как следует из формулы (1), в потери вносит вклад только мнимая часть интеграла. Функции K_0 и K_1 — вещественны при вещественном аргументе, поэтому интересующая нас мнимая часть интеграла будет определяться только той областью изменения x , в которой s будет комплексным. Эта область, как видно из (2), зависит от знака и величины параметра b . Если $b > 0$ (это означает, что $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$), то s будет чисто мнимым при значениях x в интервале $(\sqrt{b}, 1)$ и вещественным вне этого интервала. Если $b < 0$ (этому соответствует $v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$), то s будет мнимым при $0 \leq x \leq 1$ и вещественным при $x > 1$.

Кроме указанных интервалов изменения x , вклад в мнимую часть интеграла будут давать отдельные точки, в которых знаменатель подынтегрального выражения $\varepsilon_0 - x^2$ обращается в нуль: $x = \pm\sqrt{\varepsilon_0}$. Поскольку интегрирование в (1) ведется по значениям $x > 0$, нужно рассмотреть один полюс $x = \sqrt{\varepsilon_0} > 1$. Если пренебречь потерями, то этот полюс окажется на вещественной оси. При учете потерь, как легко видеть из явного выражения $\varepsilon(\omega)$ (см. (VI.12), он переместится в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω)¹. Чтобы получить правильное значение интеграла, нужно или ввести параметр затухания и после вычисления интеграла устремить этот параметр к нулю, или слегка деформировать путь интегрирования, произведя обход вокруг полюса по окружности бесконечно малого

¹Это находится в соответствии с общей теоремой о том, что $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости (см. [66], § 62).

радиуса в верхней полуплоскости. Используем второй способ. Обозначив интегрирование по указанной полуокружности значком \frown , получим

$$\begin{aligned} \frown \int \frac{1-x^2}{\varepsilon_0-x^2} s^* a K_1(s^* a) K_0(sa) x dx &= \\ &= i \frac{1-\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{\omega_0 a \sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{\omega_0 a \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{\omega_0 a \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь вычислим интеграл по области, в которой s чисто мнимо. Для этого заметим, что при чисто мнимом аргументе цилиндрические функции K_0 и K_1 связаны зависимостью

$$s^* a K_1(s^* a) K_0(sa) - sa K_1(sa) K_0(s^* a) = i \frac{\pi}{2},$$

которая следует из свойств вронскиана системы решений уравнения Бесселя (см. [68], § 5.9). Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} i \int_{s^2 < 0} \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0-x^2} - \beta^2 \right) s^* a K_1(s^* a) K_0(sa) x dx &= \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_{s^2 < 0} \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0-x^2} - \beta^2 \right) x dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Последний интеграл вычисляется элементарными методами. Пределы интегрирования выбираются так, как указано выше.

Подставляя (3) и (4) в (1), получим при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{2\pi e^4 N}{mv^2} \left[\frac{2a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) - \beta^2 - \ln(1-\beta^2) \right] \quad (5)$$

и при $v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$:

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathcal{E}}{dl} &= \frac{2\pi e^4 N}{mv^2} \left[\frac{2a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\beta^2}{\varepsilon_0-1} + \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0-1} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Та часть полных потерь, которая не исчезает при $a \rightarrow \infty$ (члены, не содержащие a в (5) и (6)), представляет собой потери энергии на излучение поперечных волн (эффект Вавилова – Черенкова):

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)_{\text{В-ч}} \equiv \omega_{\text{В-ч}} = \frac{e^2 \omega_p^2}{2v^2} [-\beta^2 - \ln(1 - \beta^2)] \quad \text{при } v < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}, \quad (7a)$$

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)_{\text{В-ч}} \equiv \omega_{\text{В-ч}} = \frac{e^2 \omega_p^2}{2v^2} \left(-\frac{1 - \beta^2}{\epsilon_0 - 1} + \ln \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1}\right) \quad \text{при } v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}. \quad (76)$$

Выражение (76) было получено в задаче 828.

Члены с K_0, K_1 в (5) и (6), зависящие от a , возникли в результате обхода полюса в точке $\omega \equiv \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$, в которой ϵ обращается в нуль. Но при таких частотах возбуждаются продольные колебания (см. задачу 443), поэтому выражение

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)_{\text{пол}} = \frac{e^2 \omega_p^2 \Omega a}{v^3} K_0\left(\frac{\Omega a}{v}\right) K_1\left(\frac{\Omega a}{v}\right) \quad (8)$$

описывает потери на возбуждение продольных колебаний (поляризационные потери). При $\frac{\Omega a}{v} \ll 1$ формула (8) принимает простой вид (см. П 3.6):

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)_{\text{пол}} = \frac{e^2 \omega_p^2}{v^2} \ln \frac{v}{\Omega a}. \quad (9)$$

При $\frac{\Omega a}{v} \gg 1$ величина $-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)_{\text{пол}}$ становится очень малой (она пропорциональна $e^{-\frac{\Omega a}{v}}$). Это показывает, что влияние поляризации среды при малых скоростях мало.

Изложенный в этой задаче макроскопический метод расчета потерь принадлежит Ферми (1940 г.).

839.

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{e^2 \omega_p^3 a}{v^3} K_0\left(\frac{\omega_p a}{v}\right) K_1\left(\frac{\omega_p a}{v}\right). \quad (1)$$

Если параметр $\frac{\omega_p a}{v} \ll 1$, что имеет место при достаточно большой скорости частицы, то можно использовать приближенные формулы

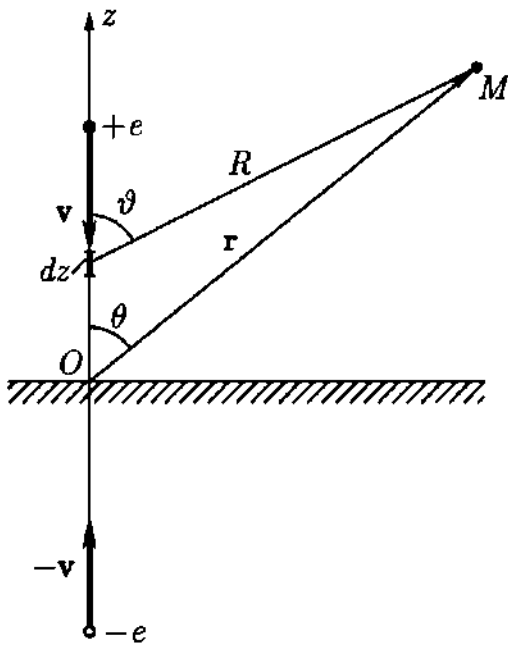


Рис. 132

для K_n (П 3.6). При этом (1) переходит в

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{e^2 \omega_p^2}{v^2} \ln \frac{2v}{\gamma \omega_p a}. \quad (2)$$

Как следует из формул (1), (2), потери частицы существенно зависят от величины ω_p . Она представляет собою частоту продольных плазменных колебаний (см. задачу 443).

Излучения Вавилова – Черенкова в плазме не возникает, так как при всех частотах $\epsilon(\omega) < 1$ и условие излучения $\beta^2 \epsilon \geq 1$ не выполняется (но черенковское излучение становится возможным, если плазма находится в магнитном поле).

При квантовомеханическом рассмотрении возбуждение плазменных колебаний эквивалентно возникновению некото-

рых дискретных элементарных возбуждений (квазичастиц – «плазмонов»). Энергия каждого плазмона равна $\hbar \omega_p$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек – постоянная Планка. Для металлов величина $\hbar \omega_p$ лежит в пределах от 5 до 30 эв. Таким образом, при возбуждении плазменных колебаний частица теряет энергию дискретными порциями. Изучение этих дискретных (или характеристических) потерь энергии позволяет получать ценные сведения о свойствах твердых тел.

840. Разложим плотность тока (рис. 132):

$$j = j_z = \begin{cases} -ev\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \geq 0, \\ -ev\delta(z + vt)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

в интеграл Фурье по времени:

$$j = \int j_\omega e^{-i\omega t} dt, \quad j_\omega = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(x)\delta(y) & \text{при } z \geq 0, \\ -\frac{e}{2\pi} e^{+i\frac{\omega}{v}z} \delta(x)\delta(y) & \text{при } z \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введем вектор поляризации согласно (XII.9):

$$P_\omega = -\frac{j_\omega}{i\omega}. \quad (3)$$

Вектор P_ω направлен по оси z .

Формулы (2) и (3) показывают, что плотность заряда и плотность тока, создаваемые движущейся частицей, эквивалентны набору гармонических осцилляторов, распределенных в пространстве по закону

$$P_{\omega} = \begin{cases} -\frac{ie}{2\pi\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(x)\delta(y) & \text{при } z \geq 0, \\ -\frac{ie}{2\pi\omega} e^{i\frac{\omega}{v}z} \delta(x)\delta(y) & \text{при } z \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Наличие $\delta(x)\delta(y)$ в (4) означает, что фактически осцилляторы находятся только на линии движения заряда.

Осцилляторы, находящиеся на отрезке dz , создадут в точке M волновой зоны магнитное поле (см. рис. 132):

$$d\mathbf{H}_{\omega} = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R^2} (\mathbf{P}_{\omega} \times \mathbf{R}) dz = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R} P_{\omega} \sin \vartheta \mathbf{e}_{\alpha} dz. \quad (5)$$

Интегрируя (5) по z , получим полное поле:

$$H_{\omega\alpha} = \frac{i\omega}{2\pi c^2} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{i(\frac{\omega}{v}z + kR)}}{R} \sin \vartheta dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i(\frac{\omega}{v}z - kR)}}{R} \sin \vartheta dz \right].$$

В последнем выражении интегралы берутся от произведения убывающей и осциллирующей функций, поэтому основной вклад в них даст область вблизи $z = 0$. Это объясняется тем, что излучение имеет место при переходе из вакуума в металл. Вычислим интегралы приближенно, для чего положим в показателях экспонент $R = r - z \cos \theta$. Выражая $\sin \vartheta$ через R , получим

$$H_{\omega\alpha} = \frac{i\omega e^{ikr} r \sin \theta}{2\pi c^2} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\frac{\omega}{v}(1-\beta \cos \theta)z}}{R^2} dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{v}(1+\beta \cos \theta)z}}{R^2} dz \right].$$

Интегрированием по частям можно представить эти интегралы в виде рядов по степеням $1/R$; оставляя только члены, линейные по этому параметру, получим

$$H_{\alpha} = E_{\theta} = \frac{e\omega}{2\pi c^2} \left[\frac{1}{\frac{\omega}{v}(1-\beta \cos \theta)} + \frac{1}{\frac{\omega}{v}(1+\beta \cos \theta)} \right] \frac{\sin \theta e^{ikr}}{r}. \quad (6)$$

Второй член в этом выражении описывает поле излучения, возникающего при внезапной остановке заряда, а первый член — излучение, создаваемое

изображением. Интенсивность излучения с частотой ω в телесный угол $d\Omega$ определяем по формуле

$$dI(\omega, \theta) = c|E(\omega, \theta)|^2 r^2 d\Omega = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta d\Omega}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (7)$$

В нерелятивистском пределе ($\beta \ll 1$) формула (7) дает дипольное излучение:

$$dI(\omega, \theta) = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (8)$$

интенсивность которого пропорциональна квадрату скорости частицы. Отметим, что интенсивность излучения не зависит от массы частицы.

Интегралы от (7) и (8) по ω , дающие угловое распределение полного излучения (со всеми частотами), будут расходящимися. Это обусловлено тем, что металл считался идеально проводящим. В действительности, уже в инфракрасной области спектра металл нельзя считать идеально проводящим, так что при высоких частотах результаты (7) и (8) неверны.

Спектральное распределение полного излучения получится интегрированием (7) по верхней полусфере:

$$I(\omega) = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\beta^2 - 1}{\beta^3} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{3}{4\beta^2} \right). \quad (9)$$

В ультрарелятивистском пределе, когда полная энергия частицы \mathcal{E} много больше энергии покоя mc^2 , формула (9) дает

$$I(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c} \ln \frac{\mathcal{E}}{mc^2}.$$

Интенсивность излучения растет логарифмически с ростом энергии.

В нерелятивистском пределе выражение в скобках обращается в единицу:

$$I(\omega) = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3}. \quad (10)$$

841. Компонента Фурье вектора поляризации имеет вид

$$P_\omega = -\frac{ie}{2\pi\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(x)\delta(y). \quad (1)$$

Определим сначала поле в точке A от осцилляторов, находящихся в области $z > 0$ (рис. 133). Достаточно рассмотреть осцилляторы, лежащие вблизи

точки $z = 0$, так как только они создают поле излучения (см. предыдущую задачу).

При использовании теоремы взаимности выберем осциллятор p_B на оси z вблизи $z = 0$ (точка B), а осциллятор p_A в точке A , поле в которой мы должны определить. Пусть оба они одинаковы по абсолютной величине

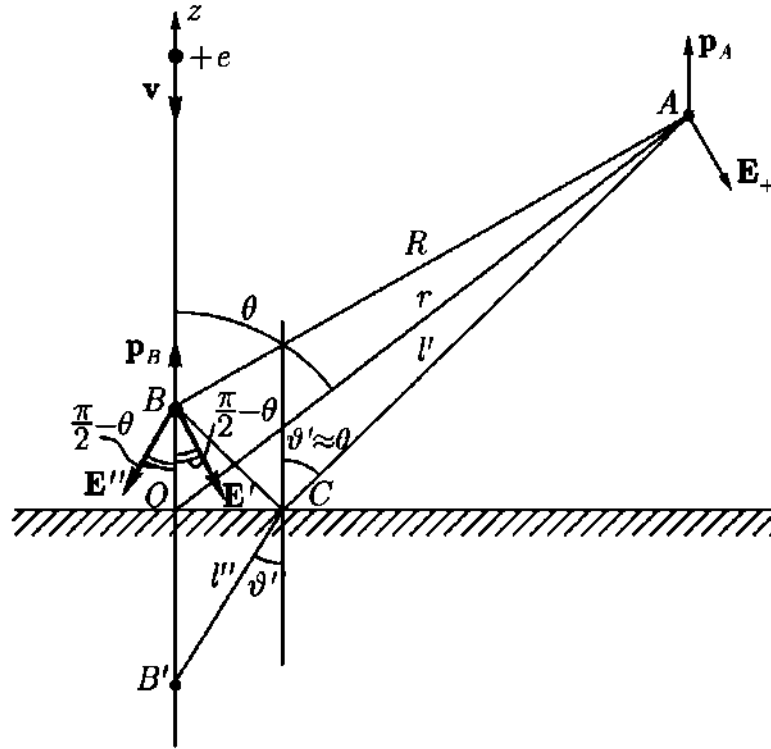


Рис. 133

и направлены вдоль z , а расстояние между ними велико по сравнению с длиной волны. Осциллятор p_B создает в точке A поле, амплитуда E_+ которого составляет с осью z угол, приблизительно равный $\frac{\pi}{2} - \theta$ (см. рис. 133). Волны из A в B приходят двумя путями: непосредственно и после отражения от границы диэлектрика. Соответствующие амплитуды обозначены на рисунке через E' и E'' . Они составляют с Oz такие же углы $\frac{\pi}{2} - \vartheta' \approx \frac{\pi}{2} - \theta$.

Поэтому по теореме взаимности имеем $E_+ = E' + E''$ или, учитывая, что в волновой зоне осциллятора $H = n \times E$, получаем $H_+ = -H' - H''$ (все три вектора H_+ , H' , H'' перпендикулярны плоскости AOz).

Волна, приходящая из A в B непосредственно, создает поле

$$dH' = \frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R} P_\omega \sin \theta dz. \tag{2}$$

Амплитуду отраженной волны можно определить с помощью формул Френеля, так как расстояние AC велико и волна, испускаемая из точки A , может рассматриваться вблизи точки C как плоская. С помощью формул (VIII.20), учитывая изменение фазы волны и то, что $\vartheta' \approx \theta$, получим

$$dH'' = \frac{\omega^2 f e^{ikR'}}{c^2 R'} P_\omega \sin \theta dz, \quad (3)$$

где

$$f = \frac{\varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}, \quad R' = ACB.$$

То поле H_+ , которое создается в точке A всеми осцилляторами, находящимися в области $z > 0$, получится интегрированием суммы $-(dH' + dH'')$ по z от 0 до ∞ . Интегрирование проводится точно так же, как в предыдущей задаче. Результат имеет вид

$$H_+ = \frac{ev}{2\pi c^2} \left(\frac{1}{1 + \beta \cos \theta} + \frac{f}{1 - \beta \cos \theta} \right) \frac{\sin \theta e^{ikr}}{r}. \quad (4)$$

Эту формулу легко понять путем сравнения с аналогичной формулой (6) предыдущей задачи. Первый член описывает поле частицы, движущейся в вакууме и внезапно останавливающейся в точке $z = 0$; второй — поле изображения $(-ef)$, движущегося в диэлектрике навстречу частице и также останавливающегося в точке $z = 0$. В отличие от случая идеального проводника, изображение слабее в f раз, его величина зависит от частоты ω рассматриваемой гармоники (через $\varepsilon(\omega)$) и от положения точки наблюдения (через угол θ).

Поле H_- от диполей, лежащих при $z < 0$, определяем таким же путем. Волна придет из A в B , преломившись на границе раздела. Используя снова формулы Френеля, получим

$$dH_- = -\frac{\omega^2}{\varepsilon c^2 R''} (1 + f) P_\omega \sin \vartheta' e^{i\varphi} dz. \quad (5)$$

Здесь $R'' = l' + l''$ — длина ломаной линии ACB' (см. рис. 133). Фаза φ учитывает запаздывание:

$$\varphi = \frac{\omega}{c} l' + \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} l''.$$

При $|z| \ll r$ ($z < 0$) имеем $l' = r + z \operatorname{tg} \vartheta'' \sin \theta$, $l'' = -\frac{z}{\cos \vartheta''}$. Учитывая закон преломления $\sin \vartheta'' = \frac{\sin \vartheta'}{\sqrt{\epsilon}}$ и заменяя ϑ' на θ , находим

$$\varphi = \frac{\omega}{c} r - \frac{\omega}{c} z \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}.$$

Проинтегрировав (5) от $-\infty$ до 0, получим поле от диполей, лежащих в области $z < 0$:

$$H_- = -\frac{ev}{2\pi\epsilon c^2} (1+f) \frac{1}{1 - \beta \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{\sin \theta e^{ikr}}{r}. \quad (6)$$

Полное поле в точке A равно сумме $H_+ + H_-$. Интенсивность излучения с частотой ω в телесный угол $d\Omega$:

$$dI(\omega, \theta) = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} A^2(\omega, \theta) \sin^2 \theta d\Omega,$$

$$A(\omega, \theta) = \frac{2\beta \cos \theta}{1 - \beta \cos^2 \theta} + (1+f) \left[\frac{1}{\epsilon(1 - \beta \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta})} - \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \right]. \quad (7)$$

Величина A зависит от частоты через $\epsilon(\omega)$.

В нерелятивистском пределе $\beta \ll 1$ получаем

$$dI(\omega, \theta) = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{(\epsilon - 1)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\epsilon \cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta})^2} d\Omega. \quad (8)$$

ГЛАВА XIV

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

§ 1. Движение отдельных частиц в плазме

$$844. \quad d\omega(\vartheta) = \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{[1 + (n-1)\cos^2 \vartheta]^{3/2}}, \quad \overline{\mathcal{E}^2} = \frac{2n+1}{3} \mathcal{E}_0^2 - \frac{2(n-1)}{3} m^2 c^4.$$

В нерелятивистском случае имеем для средней кинетической энергии \overline{T} в конечном состоянии

$$\overline{T} = \frac{2n+1}{3} T_0, \quad T_0 = \frac{p_0^2}{2m}.$$

845. Для вычисления v_d , нужно найти добавку к скорости частицы, обусловленную наличием градиента поля ∇H и усредненную по циклотронному периоду вращения. Запишем уравнения движения для поперечной скорости частицы v_{\perp} :

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{eH}{mc} [v_{\perp} \times \mathbf{h}]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{h} — единичный вектор в направлении магнитного поля. В уравнение входит $H(\mathbf{r})$ — значение поля в точке, где находится частица. Представим его в виде

$$H(\mathbf{r}) = H(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla H), \quad (2)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор ведущего центра, \mathbf{r} — радиус-вектор частицы, отсчитываемый от положения ведущего центра. В первом приближении можно считать, что ведущий центр не испытывает поперечных смещений за время одного оборота частицы. Подставив (2) в (1), получим уравнение движения вида

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = v_{\perp} \times \Omega \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \nabla H}{H} \right), \quad (3)$$

где $\Omega = \frac{eH(\mathbf{R})}{mc} \mathbf{h}$.

Разложим \mathbf{v}_\perp на две составляющие — скорость $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ в однородном поле и малую добавку \mathbf{v}_1 :

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1.$$

В поправочном члене уравнения (3) можно заменить величины \mathbf{v}_\perp и \mathbf{r} на \mathbf{v}_0 и \mathbf{r}_0 . Учитывая, что

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (4)$$

получим для \mathbf{v}_1 уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \nabla H)] \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (5)$$

Усредним обе части этого уравнения по периоду вращения частицы. При усреднении производной $d\mathbf{v}_1/dt$ получим

$$\overline{\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}} = \frac{\mathbf{v}_1(t+T) - \mathbf{v}_1(t)}{T} \approx 0$$

с точностью до членов первого порядка по малой величине ∇H . Усредняя правую часть, найдем

$$\mathbf{v}_d = \overline{\mathbf{v}_1} = -\overline{\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \nabla H)}. \quad (6)$$

Величины \mathbf{v}_0 и \mathbf{r}_0 соответствуют движению частицы в однородном поле и могут быть получены из уравнения (4). Их можно выбрать в виде

$$\mathbf{r}_0 = R_\perp(\mathbf{e}_1 \sin \Omega t + \mathbf{e}_2 \cos \Omega t), \quad \mathbf{v}_0 = v_\perp \mathbf{r}_0 \times \mathbf{h}, \quad (7)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — орты, перпендикулярные \mathbf{h} и друг другу. Проведя усреднение, получим формулу, приведенную в условии задачи.

846. Адиабатическим инвариантом для релятивистской частицы является величина $\gamma\mu$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\mu = p_\perp v_\perp / 2H$ — магнитный момент.

Если кинетическая энергия частицы сохраняется, то $\gamma = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. Последнее соотношение выполняется для нерелятивистской частицы, у которой $\gamma \approx 1$, и в том случае, когда ее энергия не сохраняется.

847. $F = -\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla H$, где $\boldsymbol{\mu} = \frac{p_\perp v_\perp}{2H} \mathbf{h}$ — магнитный момент, создаваемый вращением частицы. Это выражение совпадает с правой частью уравнения (XIV.2), если в ней положить $\mathbf{E} = 0$, так как из уравнения Максвелла $\text{div } \mathbf{H} = 0$ следует $H \text{ div } \mathbf{h} = -\mathbf{h} \cdot \nabla H$.

$$848. \sin \vartheta > \sqrt{H/H_m}.$$

$$849. R = 1 - H/H_m.$$

$$850. r = r_0 \sqrt{H_0/H},$$

где r_0 — расстояние ведущего центра до оси ловушки в поле H_0 , r — расстояние после изменения поля до величины H . Возрастание поля вызывает сжатие плазмы к оси ловушки.

$$851. \text{Ведущий центр перейдет на силовую линию } r = l, \varphi = \frac{2cq}{Hv_{\parallel}l^2}.$$

852. Ведущий центр протона движется равномерно по окружности радиуса $r = 2r_*$ лежащей в плоскости экватора, с угловой скоростью

$$\omega_d = \frac{3c\mathcal{E}}{e\mu}r - \frac{3\gamma m M}{e\mu},$$

где γ — гравитационная постоянная; $R > 226$ км, $T \approx 14,9$ сек.

853. а) Из уравнения (XIV.1), вычисляя произведения $[\mathbf{h} \times \nabla H]$ и $[\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}]$ для поля магнитного диполя, находим, что движение поперек магнитных силовых линий сводится к азимутальному дрейфу, при котором расстояние до центра Земли и широтный угол не меняются. Кроме того, ведущий центр движется вдоль силовой линии, уравнение которой имеет вид

$$r = r_0 \cos^2 \lambda, \quad (1)$$

где r_0 расстояние в экваториальной плоскости от силовой линии до центра. При этом энергия частицы остается постоянной вследствие пренебрежения гравитационным полем.

Используя известные выражения для напряженности поля магнитного диполя, а также уравнения (XIV.1), (1) и (XIV.5), находим угловую скорость азимутального дрейфа.

$$\omega_d = \frac{(\mathbf{v}_d)_\alpha}{r} = -\frac{3cpr_0 \sin^2 \alpha}{2e\mu} \frac{1 + \sin^2 \lambda}{\cos^3 \lambda (3 \sin^2 \lambda + 1)} - \frac{cpr_0 \cos^3 \lambda (3 \sin^3 \lambda - 1)}{e\mu (3 \sin^2 \lambda + 1)^2}. \quad (2)$$

Здесь p и v — импульс и скорость протона.

б) С помощью уравнения (XIV.5) находим условие, определяющее $\lambda_m > 0$;

$$\frac{\cos^6 \lambda_m}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda_m + 1}} = \sin^2 \alpha.$$

Частицы движутся в области $-\lambda_m \leq \lambda \leq \lambda_m$.

в) Протон достигает поверхности Земли при условии

$$r_0 \cos^2 \lambda_m \leq r_*,$$

где r_* — радиус земного шара.

854. Через площадку $d\sigma = s ds d\alpha$ плоскости, перпендикулярной направлению движения частиц, проходит за единицу времени $nv d\sigma$ частиц. Они передают неподвижной частице импульс, равный

$$m\Delta v_z nv d\sigma, \quad (1)$$

где Δv_z изменение z -компоненты скорости одной частицы при рассеянии ее на неподвижной частице.

Искомая сила, равная полному импульсу, передаваемому за единицу времени, получится интегрированием (1) по всему сечению пучка частиц. При этом нужно выразить Δv_z через прицельный параметр s . Поскольку столкновения упругие, имеем

$$\Delta v_z = -2v \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

θ — угол рассеяния. Его связь с прицельным параметром s была найдена при решении задачи 713:

$$s^2 = \frac{e^2 e'^2}{m^2 v^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

После подстановки (2), (3) в (1) и интегрирования по α получим выражение для силы:

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{m} e^2 e'^2 n \lambda \frac{\mathbf{v}}{v^2}, \quad (4)$$

где

$$\lambda = \ln \left[s_m \frac{mv^2}{ee'} \right]. \quad (5)$$

При $s_m \rightarrow \infty$, что соответствует неограниченному пучку, величина λ расходится. Этот результат объясняется дальнедействующим характером кулоновых сил, в результате чего с неподвижной частицей взаимодействуют

и те частицы, которые пролетают от нее сколь угодно далеко. Фактически в плазме любой заряд экранируется зарядами противоположного знака, поэтому с любой частицей взаимодействуют только те частицы, которые пролетают от нее на расстояниях, не превышающих радиуса экранировки. Для статистически равновесной плазмы радиус экранировки был вычислен в задаче 308 (радиус Дебая – Хюккеля):

$$s_m = \sqrt{\frac{kT}{4\pi(e'^2 N + e^2 n)}}, \quad (6)$$

где e и e' – заряды электронов и ионов, n и N – их концентрации.

Величина λ называется кулоновым логарифмом. Пренебрегая слабой зависимостью λ от v , можно считать $\lambda = \text{const}$, где const – число порядка 10.

855.

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{v}) = -\frac{4\pi}{\mu} e^2 e'^2 \lambda \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f(\mathbf{v}') (d\mathbf{v}'), \quad (1)$$

где $\mu = \frac{mm'}{m+m'}$ – приведенная масса.

Полезно иметь в виду следующую электростатическую аналогию: выражение (1) можно записать в виде электрической силы $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, с которой действует на заряд $q = -\frac{4\pi}{\mu} e^2 e'^2 \lambda$ «электростатическое поле»

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = -\text{grad}_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{v}), \quad (2)$$

где

$$\varphi(\mathbf{v}) = \int \frac{f(\mathbf{v}') (d\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}$$

– «электростатический потенциал», удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{v}) = -4\pi f(\mathbf{v}).$$

856. Энергия пробной частицы не меняется при столкновениях с неподвижными бесконечно тяжелыми частицами. Изменение среднего импульса описывается уравнением

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{F}}$ – средняя сила. Ее удобно вычислять с помощью электростатической аналогии, указанной в решении предыдущей задачи. Распределение

по скоростям частиц среды описывается функцией $f(\mathbf{v}) = n\delta(\mathbf{v})$. Поэтому $\varphi(\mathbf{v}) = n/v$, $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = n\mathbf{v}/v^3$,

$$\bar{\mathbf{F}} = -\frac{4\pi}{m}e^2e'^2n\lambda\frac{\mathbf{v}}{v^3}, \quad (2)$$

$\bar{\mathbf{F}}$ имеет характер «силы трения», стремящейся уменьшить направленную скорость частицы. Но это трение тем меньше, чем больше скорость частицы ($\bar{\mathbf{F}} \sim 1/v^2$, «падающее трение»).

Интегрируя уравнение (1), найдем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right],$$

где $\tau = \frac{mv^3}{4\pi e^2 e'^2 n \lambda}$ — характерное время потери частицей направленной скорости.

857.

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{cases} 0 & \text{при } v < v_0, \\ 4\pi e^2 e'^2 \lambda \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{n\mathbf{v}}{v^3} & \text{при } v > v_0. \end{cases}$$

858.

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{cases} -4\pi e^2 e'^2 \lambda n \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{\mathbf{v}_0}{v^3} & \text{при } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 > v_0^2, \\ 4\pi e^2 e'^2 \lambda n \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{\mathbf{v}_0}{v^3} & \text{при } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 < v_0^2. \end{cases}$$

859. На электрон, движущийся со скоростью v в среде неподвижных однозарядных ионов, действует сила трения

$$\bar{\mathbf{F}} = -\frac{4\pi e^4 n \lambda}{m} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \quad (1)$$

(см. решение задачи 856). Отметим, что зависимость силы F от скорости можно получить и из следующих полукачественных соображений. Сила трения есть потеря импульса частицей в единицу времени из-за столкновений. Если среднее время между столкновениями τ , а при каждом столкновении теряется импульс порядка полного импульса частицы mv (это означает, что в результате столкновения электрон отклоняется на большой угол), то

$$F \approx \frac{mv}{\tau}. \quad (2)$$

При таком столкновении электрон подходит к иону на расстояние, на котором его кинетическая энергия — порядка потенциальной:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{e^2}{r}. \quad (3)$$

Это приближенное равенство позволяет оценить сечение столкновения

$$\sigma \approx \pi r^2 \approx \frac{4\pi e^4}{m^2 v^4} \quad (4)$$

и среднее время между столкновениями

$$\tau \approx \frac{1}{n\sigma v} \approx \frac{m^2 v^3}{4\pi n e^4}. \quad (5)$$

Подставляя τ в (2), находим $F \approx \frac{4\pi n e^4 \mathbf{v}}{mv^2}$, или, учитывая тормозящий характер силы,

$$\bar{F} \approx -\frac{4\pi n e^4 \mathbf{v}}{mv^3}, \quad (6)$$

что отличается от (1) отсутствием кулонова логарифма λ . Но это естественно: при оценке по формулам (2)–(5) мы не учитывали далеких столкновений с малыми передачами импульса, вклад которых и дается кулоновым логарифмом.

Усредним теперь формулу (1) по возможным скоростям электрона. Для этого положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_T, \quad (7)$$

где \mathbf{v}_T — тепловая скорость, \mathbf{u} — скорость, приобретаемая под действием электрического поля \mathbf{E} . При $u \ll v_T$ можем положить в знаменателе выражения (1) $v^3 \approx v_T^3$. В числителе же нельзя пренебречь \mathbf{u} по сравнению с \mathbf{v}_T , так как при усреднении по направлениям тепловой скорости получим $\bar{\mathbf{v}}_T = 0$. В итоге будем иметь

$$\bar{F} = \frac{4\pi n e^4 \lambda}{mv_T^3} \mathbf{u}, \quad (8)$$

где под v_T теперь нужно понимать величину порядка средней тепловой скорости. В случае распределения Максвелла $v_T^2 = 3kT/m$. Таким образом, при $u \ll v_T$ получаем $F \sim u$.

При $u \gg v_T$ полагаем $v \approx u$ и получаем

$$\bar{F} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{mu^2}, \quad (9)$$

т.е. $\bar{F} \sim 1/u^2$. Максимуму \bar{F} , очевидно, будет соответствовать значение $u \sim v_T$; при этом обе формулы (8) и (9) дадут одинаковое значение

$$\bar{F} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m v_T^2}. \quad (10)$$

Примерный ход функции $\bar{F}(u)$ представлен на рис. 134.

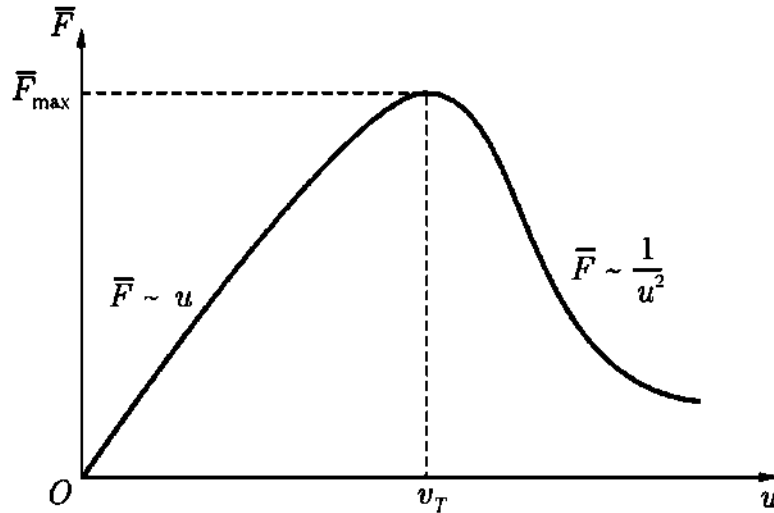


Рис. 134

Если поле в плазме $E < \bar{F}_{\max}/e = E_D$,¹ то сила торможения при некотором значении u , удовлетворяющем равенству $\bar{F}(u) = eE$, превысит ускоряющую электрическую силу eE , и электроны не смогут больше ускоряться. Это — область значений поля E , при которых имеет место обычный закон Ома. В случае $E > E_D$ ускоряющая сила превышает торможение, и электроны получают возможность ускоряться неограниченно². Это явление получило название «убегающих электронов».

Подставляя $v_T^2 = 3kT/m$ в формулу (10), получим

$$E_D = \frac{1}{3} \frac{e\lambda}{D^2}, \quad D^2 = \frac{kT}{4\pi n e^2}. \quad (11)$$

Точный расчет для этого же случая дает ([28], в. 1)

$$E_D = 0,214 \frac{e\lambda}{D^2}. \quad (12)$$

Наша порядковая оценка дала результат, близкий к точному значению.

¹Критическое значение поля $E = E_D$ называется драйсеровским.

²В действительности из-за коллективных эффектов электронный газ как целое не ускоряется, его сопротивление может даже возрастать.

§ 2. Коллективные движения в плазме

860. Естественно предположить, что скорость движения жидкости направлена вдоль оси z и зависит только от поперечной координаты x . Поскольку движущаяся проводящая жидкость увлекает за собой силовые линии магнитного поля, то при движении должна возникнуть продольная составляющая магнитного поля $H_z(x)$. Таким образом, неизвестные функции \mathbf{v} и \mathbf{H} ищем в виде $\mathbf{v}(0, 0, v(x))$; $\mathbf{H}(H_0, 0, H_z(x))$; при этом уравнения (XIV.9), (XIV.10) удовлетворяются тождественно. Уравнения (XIV.7), (XIV.8) принимают следующий вид:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{c^2}{4\pi\sigma H_0} \frac{d^2 H_z}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{H_0}{4\pi\eta} \frac{dH_z}{dx} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{dz} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (3)$$

Из последнего равенства следует, что $p + \frac{H^2}{8\pi}$ зависит только от z . Но

$$\frac{d}{dz} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = \frac{dp}{dz} = \text{const}, \quad (4)$$

так как $H^2/8\pi$ от z не зависит. Поэтому равенства (1) и (2) представляют собой систему обыкновенных линейных уравнений для определения неизвестных функций $v(x)$, $H_z(x)$. Исключая из них $\frac{dH_z}{dx}$, получим уравнение относительно $u = \frac{dv}{dx}$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{x_0^2} u = 0, \quad x_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}, \quad (5)$$

из которого следует

$$v = x_0 \left(A \exp \left[\frac{x}{x_0} \right] - B \exp \left[-\frac{x}{x_0} \right] \right) + C. \quad (6)$$

Граничные условия имеют вид $v(\pm a) = 0$, так как вязкая жидкость у стенки неподвижна. Кроме того, из соображений симметрии следует $v(x) = v(-x)$.

Из граничных условий и (6) находим

$$v(x) = v_0 \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{x_0} - \operatorname{ch} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{ch} \frac{a}{x_0} - 1}, \quad (7)$$

где v_0 — новая постоянная, имеющая смысл скорости в средней плоскости $x = 0$. v_0 можно выразить через градиент давления:

$$v_0 = -\frac{ax_0}{\eta} \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{x_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{a}{x_0}} \frac{dp}{dz}. \quad (8)$$

Магнитное поле определяется из (2), (7) и граничных условий $H_z(\pm a) = 0$:

$$H_z(x) = -\frac{4\pi\eta}{c} \sqrt{\sigma\eta} v_0 \frac{\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{a}{x_0} - \operatorname{sh} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{ch} \frac{a}{x_0} - 1}. \quad (9)$$

Отношение $a/x_0 = M$ называется числом Гартмана. При $M \ll 1$ имеем

$$v_0 = \frac{a^2}{\eta} \frac{dp}{dz}, \quad v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (10)$$

как в обычной гидродинамике. Магнитное поле $H_z = 0$ в первом порядке по числу Гартмана. Продольное поле H_z появляется только в следующих приближениях.

В противоположном предельном случае $M \gg 1$ получаем

$$v_0 = -\frac{a^2}{\eta M} \frac{dp}{dz}; \quad v(x) = v_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{a - |x|}{x_0}\right]\right). \quad (11)$$

Сравнение (10) с (11) показывает, что средняя скорость движения уменьшается с ростом H_0 , а профиль скоростей становится более плоским в средней части потока, но резко меняется в слое толщиной x_0 у стенок. Продольное магнитное поле в этом пределе имеет вид

$$H_z(x) = \frac{4\pi a^2 \sqrt{\sigma\eta}}{cM} \frac{dp}{dz} \left(\frac{x}{a} - \exp\left[-\frac{a}{x_0}\right] \operatorname{sh} \frac{x}{x_0}\right). \quad (12)$$

Как видно из формулы, оно убывает с ростом числа Гартмана. Наибольшую величину H_z имеет при $M \approx 1$.

Плотность тока в движущейся жидкости вычисляется из уравнения Максвелла $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$. Отлична от нуля только y -компонента тока:

$$j_y(x) = \frac{c}{H_0} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{a}{x} \frac{\text{ch } \frac{x}{x_0}}{\text{sh } \frac{a}{x_0}} \right). \quad (13)$$

Создаваемое им магнитное поле H_z равно нулю всюду вне области, занятой жидкостью. Там остается только поперечное поле H_0 .

861. $v(x) = v_0 \frac{\text{sh } \frac{x}{x_0}}{\text{sh } \frac{a}{x_0}}$. Плотность тока $j(x) = \frac{c\eta v_0}{H_0 x_0^2} \frac{\text{sh } \frac{x}{x_0}}{\text{sh } \frac{a}{x_0}}$. Этот ток создает магнитное поле

$$H_z(x) = \frac{4\pi\eta v_0}{H_0 x_0} \frac{\text{ch } \frac{a}{x_0} - \text{ch } \frac{x}{x_0}}{\text{sh } \frac{a}{x_0}},$$

обращающееся в нуль при $|x| \geq a$.

862. Магнитное поле имеет одну проекцию

$$H_\varphi \equiv H(r) = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r r j(r) dr.$$

Интегрируя уравнение движения (XIV.7) с граничным условием $p|_{r \geq a} = 0$, находим

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \int_r^a \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 H^2) dr, \quad (1)$$

где $H = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r r j(r) dr$ при $r < a$, $H = 2\mathcal{I}/cr$ при $r > a$.

Чтобы связать силу тока \mathcal{I} с T и N , полагаем $p = 2n(r)kT$, где k — постоянная Больцмана, и интегрируем обе части (1) по площади поперечного сечения столба плазмы. Получим

$$\mathcal{I} = 2c\sqrt{NkT}. \quad (2)$$

При $T \approx 10^8$ °К и $N \approx 10^{15}$ частица/см³ (значения, характерные для термоядерных исследований) имеем

$$\mathcal{I} = 7,5 \cdot 10^4 a.$$

863. Ток должен течь по тонкому поверхностному слою. Тогда внутри столба будет постоянное давление

$$p = \frac{\mathcal{J}^2}{2\pi c^2 a^2}.$$

864. Беря проекцию уравнения (XIV.12) на ось r и подставляя $\mathbf{v} = v \frac{\mathbf{r}}{r}$, $v = \text{const}$, получим уравнение для определения H_r :

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = -\frac{2v}{r} H_r - v \frac{\partial H_r}{\partial r}. \quad (1)$$

Решение этого уравнения выражается через произвольную функцию F от аргументов $r - vt$, ϑ и α :

$$H_r(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r^2} F(r - vt, \vartheta, \alpha). \quad (2)$$

Граничное условие имеет вид

$$H_r|_{r=a} = H_{0r}(\vartheta, \alpha + \Omega t) = \frac{1}{a^2} F(a - vt, \vartheta, \alpha) \quad (3)$$

(аргумент $\alpha - \Omega t$ у H_{0r} написан в связи с переходом в неподвижную систему координат). Таким образом,

$$F(a - vt, \vartheta, \alpha) = a^2 H_{0r}(\vartheta, \alpha + \Omega t).$$

Следовательно, (2) запишется в виде

$$H_r(r, \vartheta, \alpha, t) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 H_{0r}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right). \quad (4)$$

Таким же путем находим

$$\begin{aligned} H_\vartheta &= \frac{a}{r} H_{0\vartheta}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right), \\ H_\alpha &= \frac{a}{r} H_{0\alpha}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения $\text{div } \mathbf{H} = 0$ вытекает следующая связь между проекциями вектора H_0 :

$$-\frac{a\Omega}{v} \frac{\partial H_{0r}}{\partial \alpha} \sin \vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_{0\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{\partial H_{0\alpha}}{\partial \alpha} = 0.$$

При $H_{0\vartheta} = 0$ находим $H_{\vartheta} = 0$,

$$H_{0\alpha} = \frac{a\Omega}{v} H_{0r} \sin \vartheta + f(\vartheta);$$

если положить $f(\vartheta) = 0$, то будем иметь

$$H_{\alpha}(r, \vartheta, \alpha, t) = \frac{a^2\Omega}{vr} H_{0r} \left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t \right) \sin \vartheta. \quad (6)$$

Паркер использовал рассмотренную модель для описания межпланетного магнитного поля, создаваемого потоками солнечной плазмы (солнечным ветром). В модели межпланетного магнитного поля Паркера $H_{\vartheta} = 0$, а H_r и H_{α} даются формулами (4), (6). Измерения межпланетного магнитного поля, произведенные на спутниках и ракетах, показывают, что усредненное магнитное поле вблизи орбиты Земли удовлетворительно описывается моделью Паркера.

865. Силовые линии имеют вид спиралей Архимеда:

$$\begin{aligned} r &= \frac{v}{\Omega} (\alpha - \alpha_0), & \alpha_0 &= \text{const}, \\ \theta &= \text{arctg} \frac{r_0\Omega}{v} \approx 56^\circ; & H &\approx 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ э.} \end{aligned}$$

866. $\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi c^2 \rho}{H^2}$, где ρ — плотность плазмы. Найденное значение ε_{\perp} получается из результатов задачи 321 в предельном случае $\omega \rightarrow 0$.

867. $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$, где m — масса электрона.

868. При $\omega < \omega_p$, $R = 1$,

$$\mathbf{E} = \frac{2iq}{k + iq} \mathbf{E}_0 \exp[-qz - i\omega t],$$

где $q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$, $k = \frac{\omega}{c}$, \mathbf{E}_0 — амплитуда падающей волны. Глубина проникновения $\delta = \frac{1}{q} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$; $\delta \approx \frac{c}{\omega_p}$ при $\omega \ll \omega_p$. Затухание поля вызвано не диссипацией энергии, а возникновением токов в плазме, которые создают поле противоположного знака.

При $\omega > \omega_p$

$$R = \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2, \quad \mathbf{E} = \frac{2q}{k + q} \mathbf{E}_0 \exp[i(qz - \omega t)],$$

где $q = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}/c$, волна распространяется в плазме без затухания.

869. Представим радиус-вектор частицы в виде

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_1(t), \quad (1)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость частицы в отсутствие поля (тепловая скорость); \mathbf{R}_0 — радиус-вектор при $t = 0$; $\mathbf{R}_1(t)$ — добавка, обусловленная действием электрического поля плоской волны (магнитным полем пренебрегаем, считая частицы нерелятивистскими).

Величина \mathbf{R}_1 удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{\mathbf{R}}_1 = e\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1 - \omega t)]. \quad (2)$$

В показателе экспоненты можно пренебречь слагаемым $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1$, считая выполненным неравенство $kR_1 \ll 1$. В этом приближении, линейном по \mathbf{E}_0 , решение (2), соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид

$$\mathbf{R}_1(t) = -\frac{\mathbf{E}_0 \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0 - i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)t]}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2}. \quad (3)$$

Скорость частицы выражается в виде¹

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{ie}{m} \frac{\mathbf{E}_0}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0 - i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)t]. \quad (4)$$

Ток, создаваемый одной частицей, начальные значения радиуса-вектора и скорости которой равны соответственно \mathbf{R}_0 и \mathbf{v}_0 , запишем в виде

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)), \quad (5)$$

¹Расходимость выражений (3) и (4) при $\mathbf{k}\mathbf{v}_0 = \omega$ связана с некорректным рассмотрением «резонансных» частиц, т.е. частиц, скорость которых удовлетворяет условию $\mathbf{k}\mathbf{v}_0 = \omega$. Чтобы избежать этой трудности, предположим, что в плазме отсутствуют частицы с такими скоростями, т.е. исключим из рассмотрения интервал скоростей, удовлетворяющих неравенству $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| \ll v_0$.

где $\mathbf{v}(t)$ — скорость частицы в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$. Для вычисления полного тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ нужно умножить (5) на число частиц в объеме $(d\mathbf{R}_0)$, обладающих начальной скоростью \mathbf{v}_0 , и проинтегрировать по всем возможным значениям $\mathbf{R}_0, \mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = en \int \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) f(\mathbf{v}_0) (d\mathbf{v}_0) (d\mathbf{R}_0). \quad (6)$$

Начнем с интегрирования по координатам. Аргумент δ -функции зависит от \mathbf{R}_0 сложным образом, поэтому перейдем к новой переменной интегрирования $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_0, t)$. Вычисляя якобиан преобразования с точностью до членов, линейных по \mathbf{E}_0 , получим

$$(d\mathbf{R}_0) = \frac{\partial(R_{0x}, R_{0y}, R_{0z})}{\partial(R_x, R_y, R_z)} (d\mathbf{R}) \approx (1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1) (d\mathbf{R}). \quad (7)$$

После этого интегрирование по $(d\mathbf{R})$ не представляет труда и проводится с помощью формулы типа (П 1.4). Подставляя под интеграл (6) выражение (7) и пренебрегая снова слагаемыми $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1$ в показателях экспонент, получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = en \int \left\{ \mathbf{v}_0 + \frac{i e \mathbf{E}}{m(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} + \frac{i e \mathbf{v}_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{m(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2} \right\} f(\mathbf{v}_0) (d\mathbf{v}_0), \quad (8)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$. Точка $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = \omega$ не является особой точкой подынтегрального выражения, так как предполагается, что $f(\mathbf{v}_0) = 0$ при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = \omega$. Поэтому можно произвести разложение по отношению $v_0/v_\varphi = kv_0/\omega$, предполагая характерные скорости частиц малыми по сравнению с фазовой скоростью волны. Это позволяет представить (8) в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int \left\{ \mathbf{v}_0 + \frac{i e \mathbf{E}_0}{m\omega} \left[1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2}{\omega^2} \right] + \frac{i e (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}_0}{m\omega^2} \left(1 + \frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega} \right) \right\} f(\mathbf{v}_0) (d\mathbf{v}_0). \quad (9)$$

Предполагая, что $f(v_0)$ не зависит от углов, получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{i n e^2}{m\omega} \left\{ \left(1 + \frac{k^2 \overline{v_\parallel^2}}{\omega^2} \right) \mathbf{E}_\perp + \left(1 + \frac{3k^2 \overline{v_\parallel^2}}{\omega^2} \right) \mathbf{E}_\parallel \right\}. \quad (10)$$

Здесь

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}}{k^2}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel},$$

$$\overline{v_{\parallel}^2} = 2\pi \int v_{\parallel}^2 f(\mathbf{v}) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \quad (11)$$

В случае распределения Максвелла $\overline{v_{\parallel}^2} = T/m$.

Из выражения (10) находим тензор проводимости:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{ine^2}{m\omega} \left[\left(1 + \frac{k^2 \overline{v_{\parallel}^2}}{\omega^2} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right) + \left(1 + \frac{3k^2 \overline{v_{\parallel}^2}}{\omega^2} \right) \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right]. \quad (12)$$

Он является чисто мнимым, что свидетельствует об отсутствии диссипации энергии. Вычисляя тензор диэлектрической проницаемости по формуле

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad (13)$$

будем иметь

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\perp} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right) + \varepsilon_{\parallel} \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2 \overline{v_{\parallel}^2}}{\omega^2} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m},$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 \overline{v_{\parallel}^2}}{\omega^2} \right). \quad (15)$$

По сравнению со случаем отсутствия теплового движения ($\overline{v_{\parallel}^2} = 0$) возник новый важный эффект — зависимость ε от \mathbf{k} , пространственная дисперсия. В связи с этим диэлектрическая проницаемость стала тензорной величиной. Зависимость ε от \mathbf{k} объясняется тем, что ток в некоторой точке создается частицами, приходящими из соседних областей, поле в которых не равно полю в рассматриваемой точке. Пространственная неоднородность поля вместе с тепловым движением частиц и приводят к пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости.

Поведение резонансных ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = \omega$) частиц рассмотрено в этой задаче недостаточно корректно, в связи с чем при расчете утеряна малая мнимая часть ε_{\parallel} , которая описывает передачу энергии от волны к частицам (затухание Ландау, которое существует даже в бесстолкновительной плазме).

870. $v_\varphi = \frac{\omega_p}{k} + \frac{3k\overline{v_\parallel^2}}{2\omega_p} \approx \frac{\omega_p}{k}$; $v_g = \frac{3\overline{v_\parallel^2}}{\omega_p}k$. В отсутствие теплового движения $v_g = 0$. Таким образом, плазменные колебания распространяются в результате переноса электромагнитной энергии частицами.

871. а) $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) \cos \omega_p t$,

б) $\rho(x, t) = \text{Re} \left\{ \rho_0 x_0^2 \frac{x}{(x_0^2 + 4i\beta t)^{3/2}} \exp \left[-\frac{x^2}{(x_0^2 + 4i\beta t)} - i\omega_p t \right] \right\}$,

где $\beta = \frac{3}{2} \frac{\overline{v_\parallel^2}}{\omega_p}$. В случае б), кроме плазменных колебаний плотности заряда с частотой ω_p , происходит его релаксация из-за теплового движения частиц, $\rho(x, t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. δ -ФУНКЦИЯ

δ -функция Дирака определяется равенствами:¹

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq a, \\ \infty & \text{при } x = a; \end{cases} \quad (\text{П 1.1})$$

$$\int_{\Delta} \delta(x - a) dx = 1. \quad (\text{П 1.2})$$

Интегрирование в (П 1.2) выполняется по промежутку Δ произвольной длины, содержащему внутри себя точку a .

δ -функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad (\text{П 1.3})$$

$$\int_{\Delta} f(x)\delta(x - a) dx = f(a), \quad (\text{П 1.4})$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x), \quad (\text{П 1.5})$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

Трехмерная δ -функция определяется аналогичными соотношениями:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathbf{r} \neq \mathbf{a}, \\ \infty & \text{при } \mathbf{r} = \mathbf{a}; \end{cases} \quad (\text{П 1.6})$$

$$\int_{\Delta} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) dV = \begin{cases} f(\mathbf{a}), & \text{если } \mathbf{a} \text{ внутри объема } V, \\ 0, & \text{если } \mathbf{a} \text{ вне объема } V. \end{cases} \quad (\text{П 1.7})$$

Здесь $f(\mathbf{r})$ — непрерывная функция.

¹ Математически корректное определение δ -функции требует обобщения обычного понятия функции (см.: И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов «Обобщенные функции и действия над ними», т. I, Физматгиз, 1958; В. С. Владимиров «Уравнения математической физики», «Наука», 1967). δ -функция относится к классу сингулярных обобщенных функций.

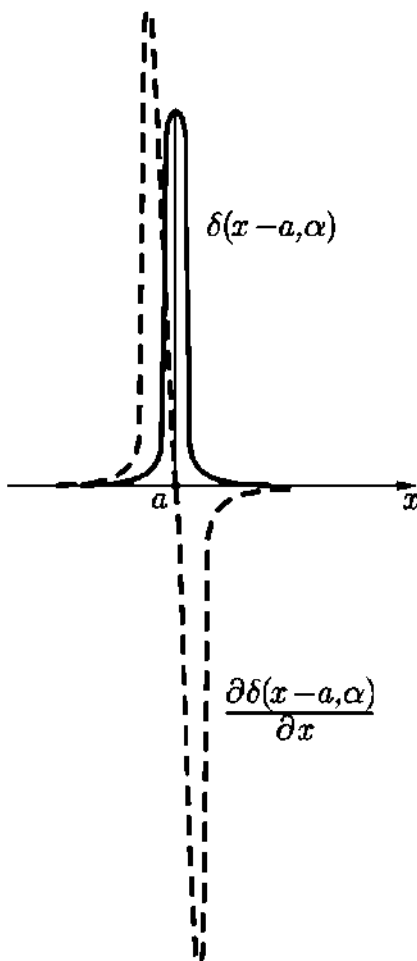


Рис. 135

С помощью δ -функции можно описывать распределение в пространстве заряда точечной частицы. Объемная плотность такого распределения

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad (\text{П 1.8})$$

где e — заряд частицы, \mathbf{a} — радиус-вектор точки, в которой находится частица.

Можно определить также производную от δ -функции. Точный ее смысл содержится в формуле

$$\int_{\Delta} f(x) \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a}, \quad (\text{П 1.9})$$

которая получается интегрированием по частям. Аналогично определяются производные высших порядков:

$$\int_{\Delta} f(x) \delta^{(n)}(x-a) dx = (-1)^n f^n(a). \quad (\text{П 1.10})$$

Сама δ -функция может рассматриваться как производная от функции, испытывающей в некоторой точке a конечный скачок b . Если $f(a+0) - f(a-0) \equiv b$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b\delta(x-a) + \text{ограниченная функция}. \quad (\text{П 1.11})$$

Наглядное представление о δ -функции и ее производных можно получить, рассматривая график некоторой непрерывной функции $\delta(x-a, \alpha)$, такой что $\int_{\Delta} \delta(x-a, \alpha) dx = 1$ (рис. 135). Параметр α характеризует ширину промежутка, в котором $\delta(x-a, \alpha)$ отлична от нуля. δ -функция и ее производные определяются как пределы:

$$\delta(x-a) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(x-a, \alpha),$$

$$\frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial \delta(x-a, \alpha)}{\partial x}$$

и т. д.

Свойства δ -функции приобретают многие несингулярные функции, зависящие от параметра, при определенных предельных значениях этого параметра. Например:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad (\text{П 1.12})$$

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin kx}{x}, \quad (\text{П 1.13})$$

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 kx}{kx^2}. \quad (\text{П 1.14})$$

При k и n целых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\pi). \quad (\text{П 1.14}')$$

Легко убедиться в том, что любое из представлений (П 1.12–П 1.14') согласуется со всеми определениями (П 1.1–П 1.5), а также с определением (П 1.9) производной от δ -функции. При вычислении интегралов вида $\int f(x)\delta(x - a) dx$ с помощью представлений типа (П 1.12–П 1.14) нужно иметь в виду, что предельный переход должен производиться после выполнения интегрирования, например при использовании (П 1.12):

$$\int f(x)\delta(x - a) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int f(x)\delta(x - a) dx.$$

Путем рассмотрения интеграла Фурье (или с помощью представления (П 1.13)) можно получить еще одно полезное представление δ -функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk. \quad (\text{П 1.15})$$

К δ -функции близки две другие обобщенные функции $\delta_+(x)$ и $\delta_-(x)$. Они определяются равенствами, сходными с (П 1.15):

$$\delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm ikx} dk. \quad (\text{П 1.16})$$

Функции δ_+ и δ_- связаны с δ -функцией соотношениями

$$\delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2}\delta(x) \pm \frac{i}{2\pi} P \frac{1}{x}, \quad (\text{П 1.17})$$

так что $\delta(x) = \delta_+(x) + \delta_-(x)$. Символ P^1 в формуле (П 1.17) представляет главное значение интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} f(x) \delta_{\pm}(x-a) dx &= \frac{1}{2} f(a) \pm \frac{i}{2\pi} P \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(x)}{x-a} dx = \\ &= \frac{1}{2} f(a) \pm \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a_1}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\varepsilon}^{a_2} \frac{f(x)}{x-a} dx \right], \end{aligned}$$

где $a_1 < a < a_2$, $\varepsilon > 0$.

Если аргумент δ -функции является однозначной функцией независимой переменной x , то имеет место формула

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(\alpha_i)|} \delta(x - \alpha_i), \quad (\text{П 1.18})$$

где α_i — корни уравнения $\varphi(x) = 0$.

2. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Сферическая функция порядка l , m , зависящая от полярных углов ϑ , α , определяется формулой:

$$Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \delta_m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\alpha}, \quad (\text{П 2.1})$$

в которой целые числа l , m удовлетворяют условиям $l \geq 0$, $-l \leq m \leq l$; $\delta_m = (-1)^m$ при $m \geq 0$, $\delta_m = 1$ при $m < 0$. Через P_{lm} обозначен присоединенный полином Лежандра

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|} P_l(x)}{dx^{|m|}}, \quad (\text{П 2.2})$$

¹Часто вместо обозначения $P \int_a^b$ используют обозначение $\overset{b}{\underset{a}{f}}$.

где $P_l(x)$ — обычный полином Лежандра. Он совпадает с $P_{lm}(x)$ при $m = 0$:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l(x^2 - 1)^l}{dx^l} = P_{l0}(x). \quad (\text{П } 2.3)$$

Присоединенные полиномы Лежандра удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \frac{dP_{lm}(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{x^2 - 1} \right] P_{lm}(x) = 0. \quad (\text{П } 2.4)$$

Приведем некоторые формулы, полезные при работе со сферическими функциями:

$$\left. \begin{aligned} Y_{lm}(0, 0) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, & Y_{lm}(\vartheta, \alpha) &= (-1)^l Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \alpha), \\ P_l(1) &= 1, & P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & P_{2n+1}(0) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} (l+1)P_{l+1}(x) &= (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x), \\ (x^2 - 1) \frac{dP_l(x)}{dx} &= l[xP_l(x) - P_{l-1}(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 2.6)$$

Сферические функции с $l = 0, 1, 2$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\alpha}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2}, \\ Y_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\alpha}, & Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 2.7)$$

Сферические функции образуют на поверхности сферы полную ортонормированную систему функций от ϑ, α . Это означает, что

$$\int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha) Y_{l'm'}(\vartheta, \alpha) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{П } 2.8)$$

¹Символом $n!!$ обозначено произведение всех последовательных целых чисел, имеющих ту же четность, что и n , от 2 до n при n четном и от 1 до n при n нечетном.

где $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ — элемент телесного угла, и что произвольная функция от ϑ, α с интегрируемым квадратом модуля может быть разложена в ряд

$$f(\vartheta, \alpha) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \quad (\text{П 2.9})$$

Коэффициенты a_{lm} определяются формулами

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha) f(\vartheta, \alpha) d\Omega. \quad (\text{П 2.10})$$

Функции вида $r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ и $r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ называют шаровыми гармониками. Легко проверить с помощью (П 2.4), что шаровые гармоники являются частными решениями уравнения Лапласа во всех точках, кроме $r = 0$:

$$\Delta \left[\frac{Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}} \right] = 0, \quad \Delta [r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] = 0. \quad (\text{П 2.11})$$

Решением уравнения Лапласа является также суперпозиция шаровых гармоник с произвольными коэффициентами

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} r^{-l-1} + b_{lm} r^l) Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \quad (\text{П 2.12})$$

Если $\mathbf{r}(r, \vartheta, \alpha)$ и $\mathbf{r}'(r', \vartheta', \alpha')$ — радиусы-векторы двух точек пространства, причем $r > r'$ (см. рис. 7), то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \quad (\text{П 2.13})$$

Функция $1/R$ называется производящей функцией для полиномов Лежандра. Имеет место следующая теорема сложения для сферических функций:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \quad (\text{П 2.14})$$

Углы ϑ, α и ϑ', α' входят в (П 2.14) вполне симметричным образом.

Подстановка (П 2.14) в (П 2.13) приводит к разложению:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \quad (\text{П 2.15})$$

Из формулы (П 2.13) следует (если положить $\frac{r'}{r} = e^{-|\xi|}$) разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+\frac{1}{2})|\xi|} P_l(\cos \eta). \quad (\text{П } 2.16)$$

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цилиндрические функции $Z_p(kx)$ являются решениями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{1}{xr} \frac{dZ}{dx} + \left(k^2 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z = 0. \quad (\text{П } 3.1)$$

Решение, которое при $p \geq 0$ ограничено в точке $r = 0$, называется цилиндрической функцией первого рода (или функцией Бесселя):

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}. \quad (\text{П } 3.2)$$

Так как в уравнение (П 3.1) входит p^2 , то J_{-p} также является решением этого уравнения. То же относится к любой линейной комбинации J_p и J_{-p} . Цилиндрическая функция второго рода (функция Неймана)¹ определяется следующим образом:

$$N_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \quad (\text{П } 3.3)$$

Часто употребляются также цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля):

$$\left. \begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + iN_p(x), \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - iN_p(x). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 3.4)$$

В качестве общего решения уравнения Бесселя может быть взята линейная комбинация с произвольными коэффициентами любых двух линейно независимых цилиндрических функций. Такими функциями являются, в частности, $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$, если p не равно целому числу. При $p = n$,

¹Эту функцию называют иногда функцией Вебера и обозначают $Y_p(x)$.

где n — целое, функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ линейно зависимы, и тогда в качестве общего решения можно взять, например, линейную комбинацию J_n и N_n .

Цилиндрические функции от чисто мнимого аргумента называются модифицированными функциями Бесселя. При целом n они определяются равенствами:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix). \quad (\text{П } 3.5)$$

Функция $K_n(x)$ называется функцией Макдональда.

В физических задачах часто требуется знать приближенный вид цилиндрических функций при малых и больших значениях аргумента. При $|x| \ll 1$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} J_p(x) &\approx \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)}, & J_n(x) &\approx \frac{x^n}{2^n n!}, & I_n(x) &\approx \frac{x^n}{2^n n!}, \\ J_0(x) &\approx 1 - \frac{x^2}{4}, & I_0(x) &\approx 1 + \frac{x^2}{4}, \\ N_n(x) &\approx -\frac{2^n (n-1)!}{\pi x^n}, & K_n(x) &\approx \frac{2^{n-1} (n-1)!}{x^n}, \\ N_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2}, & K_0(x) &\approx \ln \frac{2}{\gamma x}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 3.6)$$

где $n \geq 1$, $\ln \gamma = 0,5772$.

Выражения для функций Ханкеля при $|x| \ll 1$ могут быть получены из (П 3.6) с помощью (П 3.4). В частности,

$$H_0^{(1,2)}(x) \approx 1 \pm \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} = \pm \frac{2i}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{\pm 2i} \right). \quad (\text{П } 3.7)$$

Асимптотические выражения для цилиндрических функций ($|x| \gg 1$):

$$\left. \begin{aligned} J_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \\ N_p(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \\ H_p^{(1,2)} &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}, \\ I_n(x) &\approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, & K_n(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 3.8)$$

Между функциями J_p , N_p и $H_p^{(1,2)}$ (общий символ Z_p), а также I_n , K_n существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} Z_{p-1}(x) + Z_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} Z_p(x), \\ Z_{p-1}(x) - Z_{p+1}(x) &= 2Z'_p(x), \quad Z'_0(x) = -Z_1(x); \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 3.9})$$

$$\left. \begin{aligned} I_{p-1}(x) - I_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} I_p(x), \quad I_{p-1}(x) - I_{p+1}(x) = 2I'_p(x), \\ K_{p-1}(x) - K_{p+1}(x) &= -\frac{2p}{x} K_p(x), \\ K_{p-1}(x) + K_{p+1}(x) &= -2K'_p(x). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 3.10})$$

Функции Бесселя могут быть представлены в виде интегралов

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(x \cos \varphi - n\varphi)} d\varphi. \quad (\text{П 3.11})$$

где α — любое вещественное число.

Интегралы с функциями Бесселя могут быть вычислены с помощью формул (П 3.9), (П 3.10). В частности,

$$\int x^p Z_p(x) dx = x^p Z_{p-1}(x), \quad \int x^{-p} Z_p(x) dx = -x^{-p} Z_{p+1}(x), \quad (\text{П 3.12})$$

$$\int_0^1 x J_p(\alpha x) J_p(\beta x) dx = \frac{\alpha J'_p(\alpha) J_p(\beta) - \beta J'_p(\beta) J_p(\alpha)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (\text{П 3.13})$$

В настоящем сборнике задач используются также следующие интегральные формулы ($\text{Re } k > 0$):

$$(\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk, \quad (\text{П 3.14})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px dx}{(q^2 + x^2)^{s+1}} = \sqrt{\pi} \left(\frac{p}{2q} \right)^{s+1/2} \cdot \frac{K_{s+\frac{1}{2}}(pq)}{\Gamma(s+1)}, \quad (\text{П 3.15})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(xr)x dx}{x^2 + k^2} = K_0(kr). \quad (\text{П 3.16})$$

Сферические функции Бесселя первого рода и сферические функции Ханкеля первого и второго рода (общий символ $z_l(x)$) определяются равенствами:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad h_l^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(1,2)}(x). \quad (\text{П } 3.17)$$

При малых x :

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad h_l^{(1,2)}(x) \text{ расходится как } x^{-l-1}. \quad (\text{П } 3.18)$$

При больших x :

$$\left. \begin{aligned} j_l(x) &= \frac{1}{x} \cos \left[x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right], \\ h_l^{(1,2)}(x) &= \frac{1}{x} e^{\pm i \left[x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 3.19)$$

Если $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (см. рис. 7), то имеет место разложение:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = 4\pi ik \sum_{l,m} j_l(kr') h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') \quad (r > r'). \quad (\text{П } 3.20)$$

Функции $z_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ являются частными решениями волнового уравнения для монохроматических волн $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$. Последнему уравнению удовлетворяют также суперпозиции функций указанного вида.

ЛИТЕРАТУРА

Иваненко Д. Д., Соколов А. А. [57], Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. [31], Лебедев Н. Н. [68], Гобсон Е. В. [39], Грей Э., Мэтьюз Г. Б. [44], Розет Т. А. [89], Стрэттон Дж. А. [100], Рыжик И. М., Градштейн И. С. [90], Двайт Г. Б. [50], Янке Е., Эмде Ф. [119].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абрагам–Беккер, Теория электричества, ГОНТИ, 1939.
- [2] Альвен Г., Фельтхаммар К. Г., Космическая электродинамика, «Мир», 1967.
- [3] Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.
- [4] Арцимович Л. А., Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.
- [5] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И., Спиновые волны в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, УФН 71, в. 4, 533 (1960).
- [6] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, Физматгиз, 1959, изд. 2-е; «Наука», 1969, изд. 3-е.
- [7] Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б., Медленные электромагнитные волны, УФН 44, в. 3, 321 (1951).
- [8] Балдин А. М., Гольданский В. И., Розенталь И. Л., Кинематика ядерных реакций, Физматгиз, 1959.
- [9] Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М., Генерация, усиление и индикация инфракрасного и оптического излучения с помощью квантовых систем, УФН 72, в. 2, 161 (1960).
- [10] Бейтмен Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, 1958.
- [11] (Бейтмен Г., Эрдели А., Магнус В., Оберхеттингер Ф., Трикоми Ф.) Bateman H., Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F., Higher Transcendental Functions, v. I, II, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
- [12] Беккер Р., Электронная теория, ГОНТИ, 1936.
- [13] Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.

- [14] Болотовский Б. М., Теория эффекта Вавилова – Черенкова, УФН **62**, в. 3, 201 (1957); **75**, в. 2, 295 (1961).
- [15] Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В., Дифракционное излучение, УФН **88**, в. 2, 209 (1966).
- [16] Борн М., Оптика, ГОНТИ, 1937.
- [17] Борн М., Космические путешествия и парадокс часов, УФН **69**, в. 1, 105 (1959).
- [18] (Борн М., Вольф) Э. Born M., Wolf E., Principles of optics, Pergamon Press, London, 1959.
- [19] Бриллюэн Л., Пароди М., Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, 1959.
- [20] Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1956.
- [21] Вайнштейн Л. А., Открытые резонаторы и открытые волноводы, «Сов. радио», 1966.
- [22] Вайнштейн Л. А., Теория дифракции и метод факторизации, «Сов. радио», 1966.
- [23] Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны, Советское радио, 1957.
- [24] Вайскопф В., Видимая форма быстро движущихся тел, УФН **84**, в. 1, 183 (1964).
- [25] Власов А. А., Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, 1955.
- [26] Волькенштейн М. В., Молекулярная оптика, Гостехиздат, 1951.
- [27] Вольф Э., Мандель Л., Когерентные свойства оптических полей, УФН **87**, в. 3, 491 (1965); **88**, в. 4, 619 (1966).
- [28] Вопросы теории плазмы, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, в. 1, 2, 3, 1963; в. 4, 1965; в. 5, 1967.
- [29] Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.
- [30] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1951.
- [31] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.

- [32] Гинзбург В. Л., Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде, УФН 69, в. 4, 537, 1959.
- [33] Гинзбург В. Л., Распространение электромагнитных волн в плазме «Наука», 1967.
- [34] Гинзбург В. Л., Мотулевич Г. П., Оптические свойства металлов, УФН 44, в. 3, 321 (1951).
- [35] Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И., О магнитотормозном (синхротронном) излучении и его реабсорбции, УФН 94, в. 1, 63 (1968).
- [36] Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., происхождение космических лучей, Изд. АН СССР, 1963.
- [37] Гинзбург В. Л., Франк И. М., Об эффекте Доплера при сверхсветовой скорости, ДАН СССР 56, в. 6 (1947).
- [38] Гинзбург В. Л., Франк И. М., Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую, ЖЭТФ 16, в. 1 (1946).
- [39] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
- [40] Говорков В. А., Купальян С. Д., Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах, «Сов. радио», 1957.
- [41] Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, 1957.
- [42] Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В., Электромагнитные поля и волны, «Сов. радио», 1956.
- [43] Горелик Г. С., Колебания и волны, Физматгиз, 1959.
- [44] Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
- [45] Гринберг А. П., Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1950.
- [46] Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948.
- [47] Гуревич А. Г., Полые резонаторы и волноводы, «Сов. радио», 1952.
- [48] Гуревич А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.

- [49] Гуревич Л. Э., Электродинамика, Изд. ЛГУ, 1940.
- [50] Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, ИЛ, 1948.
- [51] Де-Бройль Л., Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, ИЛ, 1948.
- [52] Джексон Дж., Классическая электродинамика, «Мир», 1965.
- [53] Желли Дж., Черенковское излучение и его применения, ИЛ, 1960.
- [54] Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958.
- [55] Зоммерфельд А., Оптика, ИЛ, 1953.
- [56] Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. I, Гостехиздат, 1956.
- [57] Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, Гостехиздат, 1951.
- [58] Кельман В. М., Явор С. Я., Электронная оптика, Изд. АН СССР, 1959.
- [59] Киттель Ч., Введение в физику твердого тела, Гостехиздат, 1957.
- [60] Компанец А. С., Теоретическая физика, Гостехиздат, 1957.
- [61] Конторович М. И., Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1955.
- [62] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, 1951.
- [63] Кривоглаз М., А., Теория рассеяния рентгеновских лучей и тепловых нейтронов реальными кристаллами, «Наука», 1967.
- [64] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958.
- [65] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1967.
- [66] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
- [67] (Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.), Landau L., Lifshitz E., On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Zs. d. Sowjetunion 8, №2, 153 (1935).
- [68] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.

- [69] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1955.
- [70] Левич В. Г., Курс теоретической физики, т. I, Физматгиз, 1962.
- [71] Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А., Курс теоретической физики, т. II, Физматгиз, 1962.
- [72] Лефферт К., Донайе Т., Парадокс часов и физика разрывных гравитационных полей, УФН 69, в. 1. 111 (1959).
- [73] Ливингстон М. С., Ускорители. Установки для получения заряженных частиц больших энергий, ИЛ, 1956.
- [74] Лонгмайр К., Физика плазмы, Атомиздат, 1966.
- [75] (Лондон Ф.) London F., Superfluids, v. I, New York, 1950; см. также Шенберг Д., Сверхпроводимость, ИЛ, 1955.
- [76] Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. V, Лекции по теории относительности, Изд. АН СССР, 1950.
- [77] (Маркс Г., Дьёрдьи Г.) Marx G., Dyörgyi G., Über den Energie-Impuls-Tensor des electromagnetischen Feldes in Dielektrika, Ann. d. Phys., ser. 6, 16, №5-8, 241 (1955).
- [78] Микаэлян А. Л., Магнитное вращение плоскости поляризации на сантиметровых волнах, УФН 51, в. 2, 213 (1953).
- [79] Минковский Г., Пространство и время, УФН 69, в. 2, 303 (1959).
- [80] Моррисон Ф., Ядерные реакции, в сб. «Экспериментальная ядерная физика» под ред. Э. Сегре, т. II, ИЛ, 1955.
- [81] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. I, 1958; т. II, 1960.
- [82] Нортроп Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц, Атомиздат, 1967.
- [83] Окунь Л. Б., Слабое взаимодействие элементарных частиц, Физматгиз, 1963.
- [84] О'Нейл Э., Статистическая оптика, «Мир», 1967.
- [85] Пайнс Д., Элементарные возбуждения в твердых телах, «Мир», 1965.
- [86] (Пановский В., Филипс М.), Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963.

- [87] Паули В., Теория относительности, Гостехиздат, 1947.
- [88] Петрунькин В. Ю., Электромагнитные колебания, ч. III, изд. Ленинградского политехнического института, 1959.
- [89] Розет Т. А., Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, «Сов. радио», 1956.
- [90] Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.
- [91] Силин В. П., Рухадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
- [92] Скачков С. В., Константинов Л. В., Строганова Р. П., Юрова Л. Н., Топоркова Э. П., Сборник задач по ядерной физике, Гостехиздат, 1958.
- [93] Смайт В., Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.
- [94] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Физматгиз, 1958.
- [95] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 1, Физматгиз, 1958.
- [96] Смоленский Г. А., Гуревич А. Г., Ферромагнитные полупроводники, в сб. «Полупроводники в науке и технике» под ред. А. Ф. Иоффе, т. II, Изд. АН СССР, 1958.
- [97] Соколовский Ю. И., Теория относительности в элементарном изложении, Изд. ХГУ, 1960.
- [98] Спитцер Л., Физика полностью ионизированного газа, «Мир», 1965.
- [99] Строук Дж., Введение в когерентную оптику и голографию, «Мир», 1967.
- [100] Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
- [101] Тамм И. Е., Основы теории электричества, «Наука», 1966.
- [102] Тамм И. Е., Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы, УФН 68, в. 3, 387 (1959).
- [103] Тамм И. Е., Франк И. М., Когерентное излучение быстрого электрона в среде, ДАН СССР 14, 107 (1937).

- [104] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
- [105] (Ферми Э.) Fermi E., Ionisation energy losses in gases and condensed media, Phys. Rev. **57**, 485 (1940).
- [106] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнманские лекции по физике, «Мир», в. 1, 2, 3, 4, 1965; в. 5, 6, 7, 1966.
- [107] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
- [108] Франк И. М., Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах, УФН **68**, в. 3, 397 (1959).
- [109] Франк-Каменецкий Д. А., Лекции по физике плазмы, Атомиздат, 1964.
- [110] Фрелих Г., Теория диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость и диэлектрические потери, ИЛ, 1960.
- [111] Френкель Я. И., Электродинамика, т. I, Общая теория электричества, ГОНТИ, 1934; Собрание избранных трудов, т. 1, изд. АН СССР, 1956.
- [112] Френкель Я. И., Электродинамика, т. II, Макроскопическая электродинамика материальных тел., ГОНТИ, 1935.
- [113] Цытович В. Н., Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967.
- [114] Челлен Г., Физика элементарных частиц, «Наука», 1966.
- [115] Шимони К., Теоретическая электротехника, «Мир», 1964.
- [116] Шифрин К. С., Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, 1951.
- [117] Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
- [118] Эйхенвальд А. А., Теоретическая физика, ч. 6, Электромагнитное поле, ГОНТИ, 1931.
- [119] Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
- [120] Франсон М., Сланский С., Когерентность в оптике, «Наука», 1967.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:
Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Батыгин Владимир Владимирович
Топтыгин Игорь Николаевич**

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Компьютерная верстка Ю. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина*

Подписано в печать 19.05.02. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 38,11. Уч. изд. л. 37,52.
Гарнитура Таймс. Бумага газетная.
Тираж 1800 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
