

242815

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ
обозначенного здесь срока

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.М. БЕЛОКОПЫТОВ, В.М. КУЛЫГИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

Учебное пособие
по курсам
«Электродинамика систем заряженных частиц»,
«Физика плазмы»
для студентов, обучающихся по направлению
«Техническая физика»

2-е издание,
исправленное

НТБ МЭИ



242815

Москва

Издательство МЭИ

| | |
|----|------------------------|
| УК | БИБЛИОТЕКА |
| | Моск. Энергетич. ин-та |

УДК
537.537
Б-435

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия
для студентов
Подготовлено на кафедре общей физики и ядерного синтеза (ОФиЯС)

РЕЦЕНЗЕНТЫ: Ученый секретарь ИЯС РНЦ «Курчатовский
институт», канд. физ.-мат. наук, доцент
Л.К. Кузнецова;
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ОФиЯС МЭИ
В.В. Манухин.

Белокопытов В.М. Элементы теории термоядерной плазмы: учеб. пособие / В.М. Белокопытов, В.М. Кулыгин. — 2-е изд., испр. — М: Издательство МЭИ, 2005. — 84 с.

ISBN 5-7046-1300-4

162

В пособие включены отдельные разделы теоретической физики, знание которых необходимо для описания физических процессов, происходящих в плазме. Излагаются, в частности, общая теория электромагнитного поля, электро- и магнитостатика, теория излучения, распространения и рассеяния электромагнитных волн, движение заряженных частиц в электромагнитных полях, основы теории столкновений.

Для студентов, обучающихся по специальности «Физика и техника плазменных установок и термоядерных реакторов».

ISBN 5-7046-1300-4

© Московский энергетический институт, 2005

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Система уравнений Максвелла

Уравнения этой системы — основы электродинамики — не вытекают из каких-то более общих теоретических положений, а являются непосредственной математической записью наблюдавшихся экспериментальных фактов.

Выпишем их в дифференциальной и интегральной формах:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q \quad (1.4)$$

и обсудим физический смысл.

Первое из выписанных соотношений есть ни что иное, как обобщенная запись закона электромагнитной индукции. Особенно хорошо это видно из интегральной формы записи — изменение магнитного потока, пронизывающего некоторый замкнутый контур, вызывает в этом контуре электрическое поле. Дифференциальная форма — существенное обобщение — утверждает, что всякое изменение магнитного поля порождает вихревое электрическое поле.

Уравнение (1.2) отражает тот факт, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты (пусть даже и на бесконечности).

Третье уравнение содержит в себе закон Био—Савара, утверждающий порождение вихревого магнитного поля электрическим током (движущимися зарядами), и весьма важное обобщение, введенное из соображений симметрии и приведшее к возможности теоретического описания распространения электромагнитных волн в пространстве.

Речь идет о так называемом токе смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ или об утверждении, что в отсутствие движения зарядов вихревое магнитное поле может возникать при изменении поля электрического.

Последнее из уравнений говорит о том, что источником электрического поля могут быть заряды, на которых начинаются и оканчиваются силовые линии.

Система уравнений (1.1) — (1.4) представляет собой систему из восьми скалярных уравнений ((1.1) и (1.3) — векторные, каждое содержит по три — для каждой из скалярных компонент; (1.2) и (1.4) — скалярные соотношения). Если считать заданными распределения зарядов и токов, то они позволяют определить шесть неизвестных — компонент электрического и магнитного полей. Избыточность здесь кажущаяся, так как независимыми являются именно шесть скалярных уравнений, а уравнения для дивергенций \vec{E} и \vec{H} следуют из уравнений для роторов, если иметь в виду сохранение зарядов и некоторые общие соображения о начальных условиях.

Действительно, возьмем уравнение (1.3) и применим операцию div к обеим его частям

$$\text{div rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E}. \quad (1.5)$$

Поскольку дивергенция любого ротора всегда равна нулю, то

$$4\pi \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E}. \quad (1.6)$$

Закон сохранения зарядов запишем в виде соотношения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (1.7)$$

Подставив выраженную из (1.7) $\text{div } \vec{j}$ в (1.6), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} \rho, \quad (1.8)$$

что с точностью до не зависящей от времени величины дает неполное соотношение для $\text{div } \vec{E}$. Эту временную константу следует положить равной нулю, так как рассматривая общий случай, не следует входить в противоречие с известными частными ситуациями. Поскольку известно, что для электростатики, т.е. в случае покоящихся зарядов

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (1.9)$$

а при интегрировании (1.8) можно считать время от того момента, когда заряды покоились, то это означает справедливость соотношения (1.9) для любого случая.

Аналогично продемонстрируем возможность получения (1.2) из (1.1).

Уравнения (1.1) — (1.4) — система дифференциальных уравнений в частных производных. В том случае, когда заданы распределения зарядов и токов, эта система является линейной. В силу ее линей-

ности действует принцип суперпозиции электромагнитных полей. Задание распределений зарядов и токов не может быть совершенно произвольным. Мы уже использовали в своих рассуждениях такую связь между этими двумя распределениями, как закон сохранения заряда. Кроме того, необходимо учесть действие электромагнитных полей на движущиеся заряды. Максвелловская система при этом дополнится уравнениями движения зарядов (при отсутствии столкновений):

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right). \quad (1.10)$$

Правая часть уравнения (1.10) — сила Лоренца, \vec{p}_i — импульс частицы. Строго говоря, в (1.10) должно подставляться полное поле, создаваемое как другими зарядами, так и самим рассматриваемым зарядом. Практически, в большинстве случаев собственное поле можно не учитывать и считать, что \vec{E} и \vec{H} задают внешнее поле, созданное всеми частицами, кроме рассматриваемой. При задании непрерывного распределения зарядов вместо уравнений движения отдельных частиц можно записать уравнение движения для элемента объема

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_0 = \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right), \quad (1.11)$$

где под \vec{p}_0 понимают суммарный импульс частиц в единице объема, ρ — плотность заряда. При этом, разумеется, нужно считать, что выделенный элемент объема имеет поперечные размеры настолько малые, что изменением поля в его пределах можно пренебрегать.

Систему уравнений (1.1) — (1.4), дополненную уравнениями типа (1.10) или (1.11), называют уравнениями Максвелла—Лоренца. Они содержат полное описание совокупности полей и зарядов и являются замкнутой системой уравнений электродинамики.

1.2. Потенциалы электромагнитного поля

Описание электромагнитных полей с помощью напряженностей \vec{E} и \vec{H} не является единственно возможным способом. Более того, иногда оказывается удобным использовать для вычислений поля другую систему величин, называемых потенциалами электромагнитного поля. Разумеется, две эти системы, описывающие один и тот же материальный объект, эквивалентны друг другу.

Если напряженности \vec{E} и \vec{H} являются силовыми характеристиками и введены непосредственно через экспериментально найденные законы взаимодействия материальных объектов, то потенциалы

вводятся для удобства вычислений, на основе рассмотрения обобщенных формализованных свойств электромагнитного поля.

Действительно, имея в виду равенство нулю дивергенции напряженности магнитного поля

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

можно считать, что сам вектор \vec{H} представляет собой ротор какого-то вектора

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (1.12)$$

поскольку дивергенция любого ротора всегда равна нулю. Введенный таким образом вектор \vec{A} называем векторным потенциалом. Он является функцией времени и зависит от координат: $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Подставляя (1.12) в (1.1), имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Легко преобразовать это выражение в такое:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

это дает основание считать вектор $\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ потенциальным вектором, т.е. он может быть представлен в виде градиента некоторой скалярной величины φ

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

φ — функция координат и времени. Назовем эту величину скалярным потенциалом. Таким образом, вектор напряженности электрического поля может быть представлен через скалярный и векторный потенциалы

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Первый член в формуле (1.13) задает «электростатическую» составляющую поля, «потенциальную» его часть, второй — описывает электромагнитную индукцию.

Подставив в уравнение (1.12) в (1.3), с учетом (1.13), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.14)$$

Затем воспользуемся соотношением векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[\nabla \left[\nabla \vec{A} \right] \right] = \nabla (\nabla \vec{A}) - (\nabla \nabla) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

и перепишем (1.14) в виде

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Перегруппировав члены последнего выражения, получим:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.15)$$

Используя (1.13) для подстановки в оставшееся уравнение (1.4), имеем:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) можно упростить и придать им симметричный вид, воспользовавшись оставшейся неопределенностью в нахождении потенциалов. Действительно, здесь задан ротор векторного потенциала \vec{A} , а не сам потенциал. Поэтому можно доопределить формально введенные величины \vec{A} и φ , записав любые дополнительные условия, не изменяющие соотношений (1.12) и (1.13). Удобно, например, задать связь между дивергенцией \vec{A} и производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ с помощью следующего соотношения, называемого соотношением Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

Видно, что это условие резко упрощает уравнение (1.15), обращая в нуль последний член в правой его части. Теперь имеем

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.16) с помощью этого же условия (1.17) получает вид

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (1.19)$$

Система уравнений (1.18) — (1.19) при заданных распределениях заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и токов $\vec{j}(\vec{r}, t)$ точно так же, как и система уравнений Максвелла, позволяет найти электромагнитное поле.

Обсудим подробнее вопрос о степени произвола в выборе потенциалов. Из определения (1.12) прямо следует, что к вектору \vec{A} может быть добавлен градиент любой функции координат и времени $\psi(\vec{r}, t)$. Поскольку ротор любого градиента равен нулю, то такое добавление никак не скажется на величине напряженности магнитного поля, вычисляемой по формуле (1.12). Таким образом, преобразование

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \text{grad } \psi(\vec{r}, t) \quad (1.20)$$

не изменяет результата вычислений \vec{H} . Если теперь подставить (1.20) в (1.13), то получим

$$E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\text{grad} \left(\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}.$$

Видно, что для сохранения результата вычислений напряженности электрического поля по формуле (1.13) необходимо преобразовать скалярный потенциал по следующему правилу:

$$\varphi \rightarrow \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Итак, если векторный потенциал определен с точностью до вектора, представляющего собой градиент произвольной функции координат и времени, то скалярный потенциал определен с точностью до временной производной от той же функции.

Неизменность полей \vec{E} и \vec{H} при различном выборе потенциалов в соответствии с правилами (1.20) и (1.21) называется калибровочной инвариантностью, а сами варианты — различными калибровками. Частный случай, использованный при выводе уравнений (1.18) и (1.19), называется калибровкой Лоренца и является наиболее употребительным в классической электродинамике.

1.3. Энергия электромагнитного поля

Энергия, заключенная в электромагнитном поле, проявляется, в конечном счете, в совершении работы при перемещении зарядов. Составим уравнение баланса энергии для системы, состоящей из электромагнитного поля и зарядов с плотностью ρ , заполняющих элементарный объем dV :

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{F} \vec{v} dV = \int \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right) \rho \vec{v} dV. \quad (1.22)$$

Преобразуя (1.22) с учетом того, что $[\vec{v} \vec{H}] \perp \vec{v}$ и $\rho \vec{v} = \vec{j}$, получаем:

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \vec{E} dV. \quad (1.23)$$

Изменение энергии, заключенной в рассматриваемом объеме, происходит за счет электрического поля — магнитное поле работы не совершает из-за того, что магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна к скорости заряда. Выразив \vec{j} из уравнения (1.3):

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

подставим его в (1.23)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \text{rot } \vec{H} dV - \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = \frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \left(\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV \quad (1.24)$$

и добавим к правой части полученного выражения (1.24) аналогичный интеграл с заменой \vec{E} на \vec{H} и наоборот

$$-\frac{c}{4\pi} \int \vec{H} \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV$$

с точностью до знаков. Этот интеграл равен нулю в силу первого из максвелловских уравнений (1.1). Не изменяя (1.24) количественно, его прибавление дает нам в правой части симметричное относительно \vec{E} и \vec{H} выражение, что будет полезно для дальнейшего выявления его физического смысла. Действительно, (1.24) теперь преобразуется в

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) dV - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV. \quad (1.25)$$

В соответствии с правилами векторного анализа преобразуем

$$\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E} = -\text{div} [\vec{E} \vec{H}],$$

при этом выражение для баланса электромагнитной энергии в объеме V примет вид

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \oint [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV. \quad (1.26)$$

При переходе от (1.25) к (1.26) кроме записанного выше правила использовано преобразование объемного интеграла в поверхностный

$$\int \operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] dV = \oint[\vec{E}\vec{H}] d\vec{S}.$$

Обсудим теперь выражение (1.26). Слева — работа, совершаемая в единицу времени электромагнитным полем над заряженными частицами

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \vec{E} dV.$$

Поскольку рассматриваемая система состоит из заряженных частиц и электромагнитного поля, то совершение работы над частицами идет в результате убывания энергии поля. Кроме того, энергия поля в заданном объеме может изменяться вследствие ее притока или оттока через поверхность, ограничивающую этот объем. Поэтому подынтегральное выражение последнего члена формулы (1.26) может быть интерпретировано как плотность энергии электромагнитного поля $(E^2 + H^2)/8\pi$, а вектор, поток которого через поверхность дает отток или приток энергии

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}],$$

называемый вектором Пойнтинга, представляет собой плотность потока электромагнитной энергии.

Удобно переписать выражение для баланса энергии, придав ему дифференциальную форму:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\vec{j} \vec{E} - \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]. \quad (1.27)$$

Здесь слева стоит изменение плотности электромагнитной энергии, справа — передача энергии частицам и уход ее за счет выноса.

1.4. Импульс электромагнитного поля

Импульс электромагнитного поля также удобно обнаружить при передаче его заряженным частицам. Выкладки при этом подобны тем, что были сделаны в предыдущем параграфе. Запишем изменение импульса частиц в некотором объеме V в единицу времени

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{p}_0 dV = \int \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [v\vec{H}] \right) dV = \int \rho \vec{E} dV + \frac{1}{c} \int [\vec{j}\vec{H}] dV. \quad (1.28)$$

Из уравнений (1.3) и (1.4) выражаем ρ и \vec{j} и, подставив их в (1.28), получаем:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{част}} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} dV - \frac{1}{4\pi c} \int \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right] dV + \frac{1}{4\pi} \int [\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{H}] dV. \quad (1.29)$$

Как и в предыдущем параграфе, прибавим к правой части (1.29), равное нулю выражение:

$$\frac{1}{4\pi} \left[\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \vec{E} \right] + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \operatorname{div} \vec{H}, \quad (1.30)$$

придающее соотношению желательную симметрию:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{част}} = & -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int [\vec{E}\vec{H}] dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] - [\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H}] \right\} dV. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Второй интеграл в этом выражении сводится к поверхностному. Поскольку он симметричен относительно \vec{E} и \vec{H} , займемся вначале его «электрической» частью. Преобразуем интеграл

$$I = \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \right\} dV. \quad (1.32)$$

Для этого воспользуемся следующими соотношениями векторного анализа:

$$\oint (\vec{n}\vec{a}) \vec{b} dS = \int (\vec{b} \operatorname{div} \vec{a}) dV + \int (\vec{a} \operatorname{grad} \vec{b}) dV,$$

где \vec{n} — вектор нормали к поверхности S ,

$$\operatorname{grad} \frac{a^2}{2} = (\vec{a} \operatorname{grad} \vec{a}) + [\vec{a} \operatorname{rot} \vec{a}],$$

которые дают возможность записать:

$$\int (\vec{E} \operatorname{grad} \vec{E}) dV = \oint (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} dS - \int \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} dV,$$

$$\int (\vec{E} \operatorname{grad} \vec{E}) dV = \int \operatorname{grad} \frac{E^2}{2} dV - \int [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] dV.$$

Вычитая нижнее равенство из верхнего, имеем:

$$\int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \right\} dV = \int (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} dS - \int \operatorname{grad} \frac{E^2}{2} dV,$$

откуда, учитывая векторное соотношение

$$\oint \varphi d\vec{S} = \int \operatorname{grad} \varphi dV,$$

получаем:

$$I = \oint \left\{ (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} - \vec{n} \frac{E^2}{2} \right\} dS.$$

Записывая по аналогии «магнитную» часть интеграла, получаем окончательно,

$$\frac{d}{dt} \bar{p}_{\text{част}} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \bar{E} \bar{H} \right] dV + \oint \left\{ (\bar{E} \bar{n}) \bar{E} - \bar{n} \frac{E^2}{2} + (\bar{H} \bar{n}) \bar{H} - \bar{n} \frac{H^2}{2} \right\} dS. \quad (1.33)$$

Поверхностный интеграл в (1.33) задает поток импульса через поверхность, ограничивающую объем, а вектор

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi c} [\bar{E} \bar{H}], \quad (1.34)$$

стоящий под объемным интегралом, представляет собой плотность импульса электромагнитного поля.

Выражению для баланса импульса электромагнитного поля можно также придать дифференциальную форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c} [\bar{E} \bar{H}] \right) = -\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t} - \text{div}(-\{ \}), \quad (1.35)$$

здесь $\text{div}(-\{ \})$ — от подынтегрального выражения второго члена правой части (1.33), взятого с обратным знаком.

Выражение (1.33) показывает, что изменение полного импульса поля в некотором объеме $\int \bar{g} dV$ равно изменению импульса частиц, находящихся в этом объеме, и потоку импульса через поверхность, ограничивающую объем.

1.5. Электростатическое поле

Электростатика изучает поля, создаваемые неподвижными электрическими зарядами. В этом случае токи обращаются в нуль. Равны нулю также и все временные производные. Магнитные поля отсутствуют, и вся система уравнений Максвелла сводится к двум:

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{E} &= 4\pi\rho, \\ \text{rot} \bar{E} &= 0. \end{aligned}$$

Причем с учетом потенциальности электростатического поля

$$\bar{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (1.36)$$

второе из них выполняется автоматически и единственным уравнением, полностью описывающим ситуацию, является уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho. \quad (1.37)$$

Решая его, находим распределение скалярного потенциала, а затем, дифференцируя в соответствии с (1.36), получаем картину поля.

Потенциал в данном случае определен с точностью до константы. Решения уравнения Пуассона ищутся с учетом условия равенства нулю потенциала на бесконечности

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

При этом условии решение уравнения Пуассона может быть записано в общем виде. Его можно получить строгими методами. Здесь воспользуемся качественными соображениями.

Потенциал, создаваемый точечным зарядом на расстоянии $|\bar{r}_i|$ от него, запишем в виде:

$$\varphi_i = \frac{q_i}{|\bar{r}_i|} = \frac{q_i}{|\bar{r} - \bar{r}'_i|}, \quad (1.39)$$

где $\bar{r}_i = \bar{r} - \bar{r}'_i$, \bar{r} — радиус-вектор точки, где ищется потенциал, \bar{r}'_i определяет место расположения заряда. Далее нетрудно найти потенциал системы зарядов

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\bar{r} - \bar{r}'_i|} \quad (1.40)$$

и, перейдя к непрерывному их распределению, заменить суммирование интегрированием

$$\varphi(\bar{r}) = \int \frac{\rho(\bar{r}') dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}. \quad (1.41)$$

1.6. Поле системы точечных зарядов

В ряде случаев оказывается важным уметь рассчитывать поле системы точечных зарядов. Потенциал этого поля определяется соотношением (1.40). Поле можно подсчитать по формуле

$$\bar{E} = -\text{grad} \varphi = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \bar{r}_i. \quad (1.42)$$

Совершенно ясно, что при большом количестве зарядов суммирование становится утомительным, а то и малореальным. К счастью, вычисления могут быть упрощены в том случае, если нас интересуют поля на расстояниях, существенно превышающих характерные размеры системы:

$$|\bar{r}| \gg |\bar{r}'|.$$

Наличие малого параметра позволяет получить для вычисления потенциала достаточно удобное выражение с помощью разложения общего решения (1.40) в ряд Тейлора. Действительно, любой член суммы (1.40)

$$\frac{1}{(\bar{r} - \bar{r}_i)} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_{\alpha} - x'_{i\alpha})^2}} \quad (1.43)$$

при разложении в ряд Тейлора запишется в виде

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_i|} = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha} x'_{i\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \dots \quad (1.44)$$

Подставляя это разложение в формулу для потенциала (1.40), получаем:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad (1.45)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\sum q_i}{r}, \quad (1.46)$$

$$\Phi_1 = - \sum_{\alpha} \left(\sum_i q_i x'_{i\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1.47)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\sum_i q_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (1.48)$$

Первый член разложения совпадает со значением потенциала, который был бы создан в данной точке точечным зарядом, равным суммарному заряду системы. Для нейтральной в целом системы этот член равен нулю и следует принимать в рассмотрение второй член разложения. Удобно вернуться к векторной записи

$$\Phi_1 = - \left(\sum_i q_i x'_{i\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{1}{r} \right) = - \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) \sum_i q_i \bar{r}_i = - \sum_i q_i \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \bar{r}_i. \quad (1.49)$$

здесь градиент берется по координатам точки наблюдения.

Величина

$$\bar{d} = \sum_i q_i \bar{r}_i = \int \rho \bar{r}' dV' \quad (1.50)$$

называется дипольным моментом системы.

Итак, потенциал электрически нейтральной системы в первом (дипольном) приближении записывается в виде

$$\Phi = \Phi_1 = - \bar{d} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{\bar{d} \bar{r}}{r^3}. \quad (1.51)$$

При этом поле такой системы

$$\bar{E} = - \text{grad} \Phi \approx - \text{grad} \Phi_1 = - \text{grad} \frac{\bar{d} \bar{r}}{r^3} = - \frac{1}{r^3} \text{grad} (\bar{d} \bar{r}) - (\bar{d} \bar{r}) \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \quad (1.52)$$

после преобразований записывается в виде

$$\bar{E} = \frac{3\bar{r}(\bar{r}\bar{d}) - r^2\bar{d}}{r^5}. \quad (1.53)$$

Учет следующего члена разложения (1.45) приводит к понятию квадрупольного момента, являющегося тензором второго ранга.

1.7. Работа и энергия в электростатическом поле

Строго говоря, совершение работы подразумевает перемещение зарядов, что делает несправедливым основное наше предположение о неподвижности зарядов в электростатике. Однако если рассматриваются такие перемещения зарядов, которые существенным образом не сказываются на картине поля, то мы можем оставаться в рамках электростатики. В частности, работу по перемещению пробного заряда из одной точки в другую выразим через разность потенциалов между этими двумя точками

$$W = q \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} = -q(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (1.54)$$

Отсюда можно выразить потенциальную энергию заряда в поле

$$U(\bar{r}) = q\Phi(\bar{r}). \quad (1.55)$$

Соответствующая величина для системы зарядов в электростатическом поле примет вид

$$U = \sum q_i \Phi(\bar{r}_i), \quad (1.56)$$

где $\Phi(\bar{r}_i)$ — потенциал внешнего поля в точке \bar{r}_i .

В случае системы с нулевым полным зарядом ($\sum q_i = 0$) ее потенциальная энергия во внешнем поле выражается через дипольный момент

$$U = -\bar{E} \bar{d}. \quad (1.57)$$

Легко может быть записана потенциальная энергия взаимодействия заряда с диполем

$$U = -\vec{E}\vec{d} = -\frac{q\vec{r}\vec{d}}{r^3} \quad (1.58)$$

и диполя с диполем

$$U = -\vec{d}_1\vec{E}_2 = \frac{(\vec{d}_1\vec{d}_2)r^2 - 3(\vec{d}_1\vec{r})(\vec{d}_2\vec{r})}{r^5} \quad (1.59)$$

Далее перейдем к непосредственному вычислению энергии системы взаимодействующих зарядов. Записав ее для случая заряд-заряд

$$U = \frac{q_1q_2}{r_{12}} \quad (1.60)$$

и пользуясь аддитивностью электростатического поля, выразим потенциальную энергию, запасенную в системе заряженных частиц зависимостью:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{q_iq_k}{r_{ik}} \quad (1.61)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что в сумме встречаются дважды члены с одинаковыми парами частиц.

Соответствующее выражение для случая непрерывного распределения заряда получается при замене суммирования на интегрирование

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (1.62)$$

Это выражение нетрудно преобразовать

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{8\pi} \left[\int \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV - \int \vec{E} \operatorname{grad} \varphi dV \right] = \\ &= \int \frac{E^2}{8\pi} dV + \frac{1}{8\pi} \oint \varphi \vec{E} d\vec{S}. \end{aligned}$$

При $r \rightarrow \infty$ второй интеграл исчезает, так как

$$\varphi < \frac{1}{r}, \quad E < \frac{1}{r^2}, \quad S \sim r^2.$$

Поэтому окончательно имеем

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dV \quad (1.63)$$

Эта формула подтверждает более общий вывод, сделанный в § 1.3.

1.8. Магнитное поле постоянного тока

Если в электростатике анализировалось поле, создаваемое неподвижными зарядами, то теперь перейдем к несколько более сложному случаю. Рассмотрим достаточно медленное движение зарядов, такое, чтобы в уравнениях Максвелла достаточно было бы учесть кроме их распределения еще распределение плотности тока $\vec{j}(\vec{r})$.

Все временные производные считаем малыми и пренебрегаем членами, их содержащими. При этом уравнения Максвелла приобретают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.64)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (1.65)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1.66)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (1.67)$$

Уравнения, описывающие электрическое и магнитное поля, не связаны друг с другом и могут исследоваться отдельно. Что касается уравнений для электрического поля, то они полностью совпадают с теми, которые изучались в § 1.5, и сводятся к одному уравнению Пуассона. Движение зарядов происходит медленно (настолько, чтобы не нужно было учитывать скорость распространения поля), поэтому в каждый данный момент времени можно с помощью методов электростатики рассчитать ту конфигурацию электрического поля, которая определяется расположением зарядов в этот момент. Таким образом, с помощью уравнений (1.64) и (1.65) остается рассчитать магнитное поле.

Воспользуемся для вычислений понятием векторного потенциала. Поскольку временными зависимостями пренебрегаем, уравнение для векторного потенциала примет вид

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.68)$$

Его нужно дополнить соотношением Лоренца, которое в рассматриваемой ситуации также примет «укороченный» вид

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (1.69)$$

Запись общего решения уравнения Пуассона нам уже знакома по электростатике

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.70)$$

Это решение удовлетворяет условию (1.69), если считать, что движущиеся заряды не выходят за границы области, по которой ведется интегрирование.

Используя (1.70), нетрудно получить выражение для вычисления напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.71)$$

По отношению к оператору $\operatorname{rot}_{\vec{r}}$ плотность тока, зависящая от \vec{r}' , считается константой. Поэтому, используя соотношение

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) \equiv [\nabla, \varphi \vec{a}] = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}],$$

имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j} \vec{R}]}{R^3}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

и окончательно

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}, (\vec{r} - \vec{r}')] dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.72)$$

Уравнение (1.72) — закон Био—Савара.

1.9. Поле одиночного заряда, движущегося равномерно

Для одиночного заряда q , движущегося со скоростью \vec{v}_0 (причем $|\vec{v}_0| \ll c$), можно сразу написать:

$$\varphi = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t)|}, \quad (1.73)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t)|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \quad (1.74)$$

Или, поскольку $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q(\vec{r} - \vec{v}_0 t)}{|\vec{r} - \vec{v}_0 t|^3}, \quad (1.75)$$

т.е. точка с данным значением \vec{E} движется равномерно вместе с зарядом.

Магнитное поле можно определить, используя результаты выкладок предыдущего параграфа с учетом того, что

$$\vec{j} = q \vec{v}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.76)$$

Подставив (1.76) в (1.72), имеем:

$$\vec{H} = \frac{q}{c} \int \frac{[\vec{v}_0, \vec{r} - \vec{r}'] \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q}{c} \frac{[\vec{v}_0, \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{c} [\vec{v}_0 \vec{E}]. \quad (1.77)$$

1.10. Магнитный момент

Это понятие возникает при рассмотрении системы зарядов, совершающих финитное движение в некоторой замкнутой области пространства. Если это движение медленное ($|\vec{v}| \ll c$) и квазистационарное (можно пренебречь временными производными), то, рассматривая магнитное поле, создаваемое этим движением на расстоянии много большем по сравнению с размерами области, можно использовать разложение (1.44), написав:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right). \quad (1.78)$$

Подставив (1.78) в (1.70), имеем:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j} dV' - \frac{1}{c} \int \vec{j} \left(\vec{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV'. \quad (1.79)$$

Так как интегрирование ведется по всей области, в которой происходит движение зарядов, и, следовательно, токи замкнуты внутри области интегрирования, первый интеграл в (1.79) равен нулю и поэтому

$$\vec{A} = -\frac{1}{c} \int \vec{j} \left(\vec{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dV'. \quad (1.80)$$

Преобразуем полученное выражение. Так как

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.81)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{r^3 c} \int \vec{j} (\vec{r}' \vec{r}) dV'.$$

Легко убедиться, что

$$\vec{j} (\vec{r}' \vec{r}) = \frac{1}{2} \left[[\vec{r}' \vec{j}] \vec{r} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \vec{j} (\vec{r}' \vec{r}) + \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}) \right\},$$

с учетом этого

$$\vec{A} = \frac{1}{2cr^3} \left[\int [\vec{r}' \vec{j}] dV', \vec{r} \right] - \frac{1}{2cr^3} \int \left\{ \vec{j} (\vec{r}' \vec{r}) + \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}) \right\} dV'. \quad (1.82)$$

Второй интеграл в формуле (1.82) может быть сведен к поверхностному, он обращается в нуль, если токи не пересекают границы области интегрирования. Поэтому, введя

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \iint [\vec{r} \vec{j}] dV', \quad (1.83)$$

получаем

$$\vec{A} = \frac{[\vec{M} \vec{r}]}{r^3}. \quad (1.84)$$

Вектор \vec{M} , определяемый уравнением (1.83), называется магнитным моментом системы. Окончательно получаем для напряженности магнитного поля следующее выражение:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \frac{[\vec{M} \vec{r}]}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{M} \vec{r}) - r^2 \vec{M}}{r^5}. \quad (1.85)$$

В преобразованиях использовано соотношение $\text{div} \vec{a} \equiv \nabla \varphi \vec{a} = \vec{a} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{a}$,

дающее нам

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{r} \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{div} \vec{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0,$$

и затем

$$(\vec{M} \text{grad}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\vec{M} \text{grad}) \vec{r} + \vec{r} \left(\vec{M} \text{grad} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\vec{M}}{r^3} - \frac{3\vec{r}(\vec{M} \vec{r})}{r^5}.$$

Видим, что формула (1.85) совпадает с формулой (1.53) с точностью до замены дипольного момента системы покоящихся зарядов магнитным моментом изучаемой здесь системы.

Рассмотрим важный частный случай, когда движение зарядов происходит по одной замкнутой траектории или токовой трубке. Тогда выражение (1.83) сведется к

$$\vec{M} = I \frac{1}{2c} \iint [\vec{r}' d\vec{l}'], \quad (1.86)$$

где I — ток в замкнутом контуре.

Интеграл $\vec{S} = \frac{1}{2} \iint [\vec{r}' d\vec{l}']$ представляет собой площадь боковой поверхности конуса, опирающегося на контур с током. Если движение зарядов происходит по окружности, то \vec{S} — вектор нормали к площади контура, умноженный на величину площади. Таким образом, можно записать

$$\vec{M} = \frac{I \vec{S}}{c}. \quad (1.87)$$

Если переписать выражение для магнитного момента системы движущихся зарядов, используя выражение

$$\vec{j} = \rho \vec{v},$$

то получим:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \iint [\vec{r}' \rho \vec{v}] dV' = \frac{1}{2c} \sum_i [\vec{r}'_i q \vec{v}_i] \quad (1.88)$$

Здесь суммирование ведется по всем зарядам системы.

1.11. Поле системы произвольно движущихся зарядов

Рассмотрим систему зарядов, на движение которых не накладываются упрощающие анализ ограничения. Пусть известны в любой момент времени распределения плотности заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Тогда электромагнитное поле системы описывается уравнениями:

$$\Delta \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}, t), \quad (1.89)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (1.90)$$

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.91)$$

Уравнения (1.89) и (1.90) заменяют систему уравнений Максвелла, уравнение (1.91) представляет собой калибровочное условие Лоренца.

Полная постановка задачи требует кроме записи уравнений, описывающих поведение системы, задания начальных и граничных условий. Удобно считать, что в начальный момент времени система находилась в невозмущенном состоянии — токи и заряды отсутствовали

$$\rho(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{j}(\vec{r}, 0) = 0;$$

при этом отсутствовали также и электрическое, и магнитное поля

$$\vec{E}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{H}(\vec{r}, 0) = 0.$$

Тогда начальные условия для потенциалов могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(\bar{r}, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{A}(\bar{r}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \\ \varphi(\bar{r}, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

В качестве граничных условий примем требования о стремлении к нулю потенциалов при $r \rightarrow \infty$.

Для получения решения применим следующий достаточно простой и наглядный метод, хотя и не обладающий математической строгостью, но дающий верный результат. Выделим в объеме V' , занимаемом системой, элементарный объем δV_i . Тогда заряд, сосредоточенный в этом элементарном объеме, выразим соотношением:

$$\delta q_i = \rho(\bar{r}, t) \delta V_i.$$

Далее будем искать потенциалы, создаваемые этим зарядом в произвольной точке. Окончательный результат получим, просуммировав потенциалы, созданные всеми зарядами δq_i , входящими в систему.

Если рассматриваем лишь заряд δq_i , то во всех точках пространства, не входящих в объем δV_i , потенциалы поля будут описываться следующей системой:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Воспользуемся сферической системой координат с центром внутри объема δV_i .

Можно считать, что поле, создаваемое зарядом δq_i вне объема δV_i , обладает сферической симметрией. Тогда уравнения для потенциалов перепишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.94)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.95)$$

Видно, что и скалярный потенциал, и все три компоненты вектора-потенциала описываются уравнениями одного и того же типа.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (1.96)$$

Домножим обе части уравнения (1.96) на r и введем новую функцию

$$\psi = r f, \quad (1.97)$$

имея в виду, что r всегда больше нуля, так как нас интересует область пространства, находящаяся вне δV_i , получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.98)$$

Далее, перейдя к переменным

$$\xi = t - \frac{r}{c}, \quad (1.99)$$

$$\eta = t + \frac{r}{c}, \quad (1.100)$$

из (1.98) получаем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.101)$$

Действительно, выразив из (1.99) и (1.100)

$$t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad r = \frac{\eta - \xi}{2} c,$$

имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = -\frac{4}{c^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (1.101). Его решением может быть любая функция одной из переменных. Поэтому общее решение может быть записано в следующем виде:

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta), \quad (1.102)$$

или с учетом обозначений (1.99) и (1.100):

$$\psi(r, t) = \psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right). \quad (1.103)$$

Переходя вновь к функции f , имеем:

$$f = \frac{\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (1.104)$$

Итак, получили общее решение уравнения типа (1.96), представляющее собой наложение двух сферических волн. Одна из них, описываемая функцией ψ_1 , расходится из начала координат, удаляясь на бесконечность, вторая — сходится из бесконечности к началу координат. Таким образом, и скалярный потенциал, и компоненты вектора потенциала выражаются функциями типа (1.104).

Обсудим физический смысл этих решений на примере следующего выражения для скалярного потенциала:

$$\varphi(r, t) = \frac{\varphi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (1.105)$$

Это выражение является частным решением уравнения (1.89) в области вне объема δV_i (в том числе на значительном удалении от него). Теперь нужно выбрать вид функции φ_1 таким образом, чтобы формула (1.105) переходила в решение уравнения Пуассона вблизи области δV_i . Ибо именно в уравнение Пуассона переходит выражение (1.89), если положить $c \rightarrow \infty$. Решение уравнения Пуассона для рассматриваемого случая известно:

$$d\varphi_i = \frac{\delta q_i(t)}{r} = \frac{\rho(\bar{r}, t)\delta V_i}{r}, \quad (1.106)$$

Поэтому, если (1.105) перепишем в виде

$$d\varphi_i(r, t) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)\delta V_i}{r}, \quad (1.107)$$

то получим выражение для потенциала, создаваемого зарядом δq_i , в области δV_i , как вблизи самого этого заряда, так и на удалении от него. Из (1.107) следует, что скалярный потенциал в любой точке, находящейся на расстоянии r от начала координат, в момент времени t

определяется величиной заряда в момент времени $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ — более

ранний. Причем временной сдвиг определяется отношением $\frac{r}{c}$ —

временем, необходимым для распространения электромагнитного поля на расстояние r . В связи с этим говорят о «запаздывании» потенциала по отношению к изменению заряда, определяющего его величину.

Интегрируя теперь (1.107) по всему объему V_i , получаем полное значение потенциала, создаваемого в произвольной точке системы зарядов, движущихся в этом объеме:

$$\varphi(\bar{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV'. \quad (1.108)$$

Аналогичный ответ получается для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV'. \quad (1.109)$$

Записанные частные решения системы (1.89) — (1.90) отвечают функции ψ_1 общего решения (1.104). Решения, отвечающие функции ψ_2 могут быть записаны в виде опережающих потенциалов φ^* , \vec{A}^* . Линейные комбинации запаздывающих и опережающих потенциалов:

$$\alpha_1\varphi + \alpha_2\varphi^* \quad \text{и} \quad \beta_1\vec{A} + \beta_2\vec{A}^*$$

дают общие решения интересующей нас системы уравнений. Соответствующие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ определяются из граничных и начальных условий. В частности, для задачи, рассмотренной в данном параграфе, следует положить $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, т.е. ответ запишется только через запаздывающие потенциалы.

Таким образом, система зарядов, начавшая в момент времени $t = 0$ нестационарное движение, создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, распространяющееся в виде сферических волн со скоростью c . То, что решение рассмотренной задачи записывается в виде запаздывающих потенциалов, имеет принципиальное мировоззренческое значение. Это свидетельствует о воздействии одного тела на другое, служит доказательством материальности, реальности поля, как агента, осуществляющего передачу этого воздействия.

1.12. Дипольное приближение

Получить какие-либо точные выражения, пригодные для вычислений, из общих формул (1.108) и (1.109) обычно не удается. Трудности тут связаны, с необходимостью брать значения ρ и \vec{j} в различных точках пространства в различные моменты времени. Эти трудности обычно обходят, делая некоторые упрощающие предположения, позволяющие провести выкладки, дающие результаты, пригодные для многих практически важных случаев.

Первым предположением является удаленность точки наблюдения от излучающей системы. Считаем, что

$$|\vec{r}| \gg |V|^{1/3}.$$

Это допущение уже пользовались при вычислении полей от неподвижных и медленно движущихся зарядов. Оно позволяет провести упрощения, разложив характерное выражение $\left| \frac{1}{\vec{r} - \vec{r}'} \right|$ в ряд. Применяя такое разложение и ограничиваясь двумя первыми его членами, из (1.108) получаем:

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \right) \rho dV' = \int \frac{\rho dV'}{r} + \int \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \rho dV'. \quad (1.110)$$

Однако произведенное упрощение еще не позволяет вычислить в общем виде интегралы, входящие в (1.110). Дело в том, что величина $\rho(\vec{r}', \tau)$, входящая в подынтегральные выражения, является сложной функцией координат и времени. Само время запаздывания $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ — величина, различная для каждой точки внутри излу-

чающей системы. Направивается дальнейшее упрощение: считать, что время запаздывания — одно для всей системы и записать

$$\tau = \tau_0 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}, \quad (1.111)$$

где $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$ учитывает время, необходимое для распространения поля из начала координат до точки наблюдения, а $\vec{r}\vec{r}'/cr$ — запаздывание, обусловленное распространением поля в пределах самой системы. Ясно, что

$$\left| \frac{\vec{r}'}{c} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}V'}{c} \right| \ll \left| \frac{|\vec{r}|}{c} \right|, \quad \text{если } |\vec{r}| \gg \sqrt{3}V'.$$

Однако использовать малый параметр $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$ для разложения в ряд по нему плотности заряда можно лишь в том случае, если распределение плотности заряда в пределах V' не будет существенно изменяться за время распространения поля внутри V' , т.е. нужно, чтобы скорости движения зарядов были гораздо меньше скорости света:

$$v \ll c. \quad (1.112)$$

При этом условии можно воспользоваться разложением

$$\rho(\vec{r}', \tau) = \rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0). \quad (1.113)$$

Подставив (1.113) в (1.110), имеем

$$\varphi = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \right) \left(\rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) \right) dV' = \int \left\{ \frac{\rho}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr^2} \dot{\rho} \right\} dV'. \quad (1.114)$$

В (1.114) отброшены члены, меньшие по порядку, чем $\frac{1}{r^2}$.

Поскольку в выражении (1.114) значения плотности заряда берутся в один и тот же момент времени, определяемый запаздыванием τ_0 , то первый член подынтегрального выражения представляет собой просто Q/r , где $Q = \int \rho dV'$ — полный заряд, содержащийся в объеме V' . В квазинейтральной системе, состоящей из равного количества положительных и отрицательных зарядов, он равен нулю. Тогда остается

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{cr} \int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV'. \quad (1.115)$$

Далее имеем

$$\int \vec{r}' \dot{\rho} dV' = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau_0) dV' = \dot{\vec{d}}(\tau_0).$$

Это дает возможность переписать (1.115) в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{cr}. \quad (1.116)$$

С помощью аналогичных выкладок получается выражение для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{cr}. \quad (1.117)$$

Выполнение условия Лоренца для потенциалов (1.116) и (1.117) легко проверяется непосредственно.

Очень важным результатом, следующим из выкладок, приведенных в данном параграфе, является пропорциональность «излучательных» потенциалов $1/r$, т.е. гораздо меньшее падение их величины с расстоянием, чем аналогичного электростатического потенциала, который пропорционален $1/r^2$.

Найдем теперь выражения для магнитного и электрического полей:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислениях пространственных производных вдали от излучателя величину $1/r$ можно считать постоянной. Поэтому

$$\vec{H} = \frac{1}{cr} \text{rot} \dot{\vec{d}}(\tau_0) = \frac{1}{cr} \left[\text{grad} \tau_0, \frac{d\dot{\vec{d}}}{d\tau_0} \right] = \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{A}}, \frac{\vec{r}}{r} \right],$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r^2} \left[\ddot{\vec{d}} \vec{r} \right]. \quad (1.118)$$

Для любой функции τ_0 имеем

$$\text{grad} f(\tau_0) = \frac{df}{d\tau_0} \text{grad} \tau_0 = -f \frac{\vec{r}}{rc}, \quad \text{где} \quad \dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial t}.$$

С учетом этого

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} + \frac{\vec{r}}{rc} \dot{\varphi} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} + \frac{\vec{r}}{rc} \left(\frac{\vec{r}}{r} \dot{\vec{A}} \right) =$$

$$= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \dot{\vec{A}} \right) - \dot{\vec{A}} \right\} = \frac{1}{c} \left[\left[\frac{\dot{\vec{A}} \vec{r}}{r} \right] \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{1}{c^2 r^3} \left[\left[\ddot{\vec{d}} \vec{r} \right] \vec{r} \right]. \quad (1.119)$$

Векторы \vec{E} и \vec{H} связаны между собой соотношением

$$\vec{E} = \left[\vec{H} \frac{\vec{r}}{r} \right].$$

1.13. Излучение диполя

Рассмотрим более детально излучение электронной системы, обладающей дипольным моментом \vec{d} . Введем сферическую систему координат r, θ, ψ , расположив излучатель в ее центре таким образом, чтобы вектор \vec{d} был ориентирован вдоль полярной оси.

Обозначим $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$ — единичный вектор в направлении радиуса-

вектора точки наблюдения (рис. 1.1). Считая далее, что изменения \vec{d} происходят только по абсолютной величине, имеем:

$$\left[\ddot{\vec{d}} \vec{r} \right]_r = 0, \quad \left[\ddot{\vec{d}} \vec{r} \right]_\theta = 0, \quad \left[\ddot{\vec{d}} \vec{r} \right]_\psi = -\ddot{d} \sin \theta,$$

что дает возможность выписать компоненты вектора \vec{H} :

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta.$$

Вектор \vec{E} , как это следует из сравнения формул (1.119) и (1.118), равен по абсолютной величине вектору \vec{H} и направлен перпендикулярно \vec{H} и \vec{n} :

$$E_r = 0; \quad E_\theta = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta; \quad E_\psi = 0.$$

Вектор Пойнтинга для исследуемой системы

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} [\ddot{\vec{d}} \vec{r}]^2 \vec{n} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \ddot{d}^2 \sin^2 \theta \vec{n}$$

направлен по радиусу-вектору от излучающей системы, причем максимум плотности потока энергии излучения диполя находится в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Подсчитаем интенсивность излучения — поток энергии в телесный угол $d\Omega$

$$dI = \Pi r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} r^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^3 \theta d\theta d\psi$$

и, наконец, полную мощность излучения или полную интенсивность излучателя

$$I = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{2}{3} \frac{\ddot{d}^2}{c^3}. \quad (1.120)$$

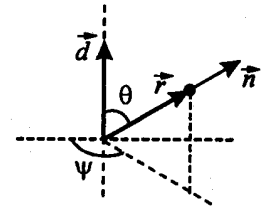


Рис. 1.1

Полная интенсивность излучения в дипольном приближении определяется только значением второй производной дипольного момента по времени.

1.14. Дипольное излучение одиночного заряда

Если на одиночную заряженную частицу действует сила \vec{F} то

$$\left. \begin{aligned} \vec{d} &= e\vec{r} \\ \ddot{\vec{d}} &= e\ddot{\vec{r}} = e\frac{\vec{F}}{m} \end{aligned} \right\}$$

где $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ — ускорение, которое частица получает под действием этой силы.

Чтобы определить потери энергии на излучение, можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа. При этом необходимо сделать некоторые оговорки. Хотя при получении формулы (1.120) использовалось разложение по малому собственному запаздыванию в системе, которое теряет смысл в случае одиночного заряда, этим выражением все-таки можно пользоваться, так как более строгое рассмотрение задачи о движущемся одиночном заряде приводит к тождественному результату.

Итак, можем записать

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}.$$

Для физики высокотемпературной плазмы, в частности, важен случай, когда заряженная частица движется в однородном магнитном поле. Ее ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e}{mc} [\vec{v}\vec{H}].$$

При этом частица излучает электромагнитные волны с полной интенсивностью излучения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} [\vec{v}\vec{H}]^2.$$

Далее для простоты считаем, что $\vec{v} \perp \vec{H}$ и потеря энергии мала, т.е. $v \approx v_0$. Окончательно имеем

$$I = \frac{4}{3} \frac{e^4 H^2}{m^3 c^5} \left(\frac{m v_0^2}{2} \right).$$

Полученная формула годится лишь для нерелятивистского случая $v \ll c$.

1.15. Плоская электромагнитная волна

Вдали от излучателя практически можно пренебречь различием в направлении векторов \vec{r}_0 (единичный вектор из начала координат в точку наблюдения) и \vec{n} (единичный вектор от излучателя к точке наблюдения). Введем вектор $\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c}$ (это — волновой вектор):

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где λ — длина волны. Вектор \vec{k} ориентирован по направлению распространения волны. Если расстояние от излучателя до точки наблюдения $|\vec{r}|$ много больше длины волны λ , то можно воспользоваться приближением плоской волны. При этом

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.121)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.122)$$

амплитуды \vec{E}_0 и \vec{H}_0 перпендикулярны друг к другу и к вектору \vec{k} :

$$\vec{E}_0 = [\vec{H}_0 \vec{n}]. \quad (1.123)$$

Направим ось x в направлении распространения волны.

Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.124)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (1.125)$$

Вектор Пойнтинга в плоской волне может быть легко выражен

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [[\vec{H}\vec{n}]\vec{H}] = \vec{n} \frac{c\vec{H}^2}{4\pi} = \vec{n} c \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \quad (1.126)$$

Поскольку плоская волна при своем распространении не уменьшается по амплитуде, то и вектор Пойнтинга оказывается в ней постоянным. Это поток энергии, движущийся со скоростью света.

Плотность импульса плоской электромагнитной волны определим соотношением

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{\vec{n}}{c} \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \quad (1.127)$$

1.16. Поляризация плоской волны

Запишем комплексную амплитуду плоской волны в формуле (1.124) в виде

$$\vec{E}_0 = \vec{g}_1 + i\vec{g}_2,$$

где \vec{g}_1 и \vec{g}_2 — вещественные векторы.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re} \left\{ (\vec{g}_1 + i\vec{g}_2) \left[\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + i \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \right] \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \left[\vec{g}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \vec{g}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \right] + \right. \\ &+ i \left[\vec{g}_1 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + \vec{g}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \right] \left. \right\} = \\ &= \vec{g}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \vec{g}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.128)$$

Перейдем от \vec{g}_1 и \vec{g}_2 , ориентированных под произвольным углом друг к другу, к ортогональным векторам \vec{E}_1 и \vec{E}_2 :

$$\vec{E}_1 = \vec{g}_1 \cos \alpha + \vec{g}_2 \sin \alpha, \quad (1.129)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{g}_1 \sin \alpha - \vec{g}_2 \cos \alpha. \quad (1.130)$$

Перемножая (1.129) и (1.130) скалярно, имеем:

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2 = (g_1^2 - g_2^2) \sin \alpha \cos \alpha - \vec{g}_1 \vec{g}_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

откуда

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2\vec{g}_1 \vec{g}_2}{g_1^2 - g_2^2}.$$

Выразив \vec{g}_1 и \vec{g}_2 , из (1.129) и (1.130):

$$\vec{g}_1 = \vec{E}_1 \cos \alpha + \vec{E}_2 \sin \alpha, \quad \vec{g}_2 = \vec{E}_1 \sin \alpha - \vec{E}_2 \cos \alpha$$

и подставив в (1.128), получим:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) + \vec{E}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Считая, что волны распространяются вдоль оси x и выбрав ось y по вектору \vec{E}_1 , будем иметь \vec{E}_2 ориентированным по оси z .

Тогда

$$E_y = E_1 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (1.131)$$

$$E_z = E_2 \sin(\omega t - kx + \alpha). \quad (1.132)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 — амплитуды, а $\psi = (\omega t - kx + \alpha)$ — фаза волны. Из (1.131) и (1.132) можно исключить фазу

$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} = 1. \quad (1.133)$$

Из уравнения (1.133) можно заключить, что вектор \vec{E} в данной плоскости $x = \text{const}$ вращается в плоскости yz так, что его конец описывает эллипс. Если \vec{E}_1 и \vec{E}_2 равны по модулю, то получается окружность. Направление вращения определяется фазой. Если вращение идет по часовой стрелке, то оно считается положительным. Если \vec{E}_1 или \vec{E}_2 равен нулю, то изменение вектора \vec{E} происходит в плоскости.

1.17. Интерференция волн. Волновой пакет

Рассмотрим наложение бесконечного множества плоских монохроматических волн, частоты которых изменяются в узком интервале $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$, где $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

Пусть амплитуда всех волн постоянна. Для напряженности электрического поля можно записать выражение

$$\vec{E} = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} d\omega = \vec{E}_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega t - kx)} d\omega.$$

Для дальнейшего полезно считать волновое число k функцией частоты ω , вообще говоря, произвольной.

Полагая

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0), \quad k = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0),$$

имеем

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \bar{E}_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{i(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right]} d\omega = \\ &= \bar{E}_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \exp \left\{ iu \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \right\} du = \\ &= 2\bar{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right]}{t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x} \exp \{ i(\omega_0 t - k_0 x) \}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

где $u = \omega - \omega_0$.

Результат, отражаемый формулой (1.134), заключается в том, что наложение множества монохроматических волн, частоты которых лежат в узком диапазоне $2\Delta\omega$ вокруг основной частоты ω_0 , приводит к возникновению волнового образования, представляющего собой волну с частотой ω_0 и модулированной амплитудой

$$\bar{A} = 2\bar{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega (x - v_g t)}{x - v_g t}, \quad (1.135)$$

$$v_g = \left(\frac{d\omega_0}{dk} \right). \quad (1.136)$$

Имеется главный максимум при $\alpha = 0$ ($\bar{A}_{\max} = 2\Delta\omega \bar{E}_0$). По обе стороны от главного максимума находится ряд побочных с существенно меньшими амплитудами (рис. 1.2). Практически можно считать, что поле сосредоточено вблизи главного максимума. Такое волновое образование называется волновым пакетом.

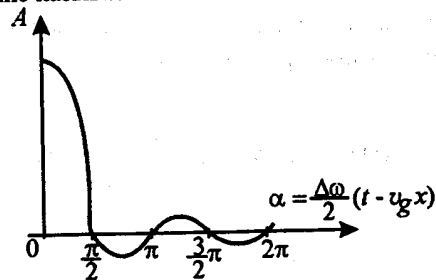


Рис. 1.2

Он движется в пространстве как целое со скоростью v_g , называемой групповой скоростью. Размеры волнового пакета следуют из равенства

$$\Delta\omega \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 x \right] \approx 2\pi. \quad (1.137)$$

В момент времени t поле отлично от нуля между точками пространства x_1 и x_2 :

$$x_1 - x_2 = \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\omega \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0} = \frac{2\pi}{\Delta k}. \quad (1.138)$$

Соответственно, если фиксировать точку x , то можно получить отрезок времени, в течение которого волновой пакет проходит эту точку:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (1.139)$$

Итак, ограничения по пространственной и временной протяженностям волнового пакета определяются условиями:

$$\Delta t \Delta\omega \sim 2\pi; \quad \Delta x \Delta k \sim 2\pi. \quad (1.140)$$

1.18. Рассеяние электромагнитных волн

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, падающую на линейный гармонический осциллятор. Волна — плоскополяризованная. Выпишем уравнение движения осциллятора для этого случая

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \ddot{\vec{r}} + \frac{e\bar{E}_0 e^{i\omega t}}{m}.$$

Считая затухание слабым, записываем $\ddot{\vec{r}} \approx -\omega_0^2 \vec{r}$, при этом

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma \dot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \bar{E}_0 e^{i\omega t}, \quad (1.141)$$

где $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}$.

Нас интересует частное решение этого уравнения

$$\vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \bar{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (1.142)$$

описывающее движение осциллятора под действием вынуждающей силы.

Интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол $d\Omega$:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\ddot{\vec{p}} \right]^2 d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi m^2 c^3 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \right]} \cos^2(\omega t - \delta) d\Omega. \quad (1.143)$$

Это излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на величину

$$\delta = \arctg \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где θ — угол между \vec{n} и \vec{E}_0 .

Введя интенсивность падающего излучения $I_0 = \frac{c \vec{E}_0^2}{4\pi}$ и усред-

няя ее за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, имеем:

$$\overline{dI} = \frac{1}{T} \int_0^T (dI) dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (1.144)$$

Введем дифференциальное эффективное сечение рассеяния как отношение интенсивности, рассеянной в угол $d\Omega$, к интенсивности падающего излучения:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{I_0}. \quad (1.145)$$

Из уравнения (1.144) следует выражение для дифференциального эффективного сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (1.146)$$

Связь между углами ясна из рис. 1.3.

$$\cos \theta = \sin \varphi \cos \psi$$

или

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi. \quad (1.147)$$

Чтобы найти теперь сечение рассеяния неполяризованного излучения, нужно усреднить выражение по всем воз-

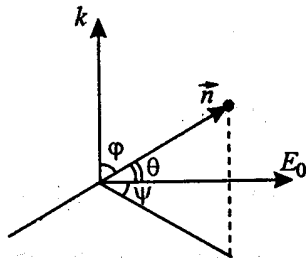


Рис. 1.3

можным направлениям ориентации вектора \vec{E}_0 в плоскости xy . Это означает усреднение по углу ψ .

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} = \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}.$$

Подставляя это выражение в (1.146), имеем:

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} d\Omega, \quad (1.148)$$

откуда следует, что самое сильное рассеяние происходит в направлении падающего излучения ($\varphi = 0$) и в противоположном направлении ($\varphi = \pi$).

Интегрируя далее (1.148) по всему телесному углу $d\Omega$, получаем полное сечение рассеяния неполяризованного излучения:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (1.149)$$

Эта так называемая дисперсионная формула имеет весьма общий характер. Она совпадает по форме с выражением для рассеяния света атомами, которое получается в квантовой механике.

Можно видеть, что для резонансного случая $\omega_0 \rightarrow \omega$

$$\sigma_{\max} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}. \quad (1.150)$$

Так как $\gamma \ll \omega_0$, то σ_{\max} достигает очень больших значений.

1.19. Поглощение излучения

Рассмотрим поглощение излучения также на примере линейного осциллятора, причем ограничимся областью близкой к резонансной. Однако будем считать, что падающее излучение имеет некоторое непрерывное распределение по частотам.

Запишем падающее излучение в виде разложения в интеграл Фурье

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Подставим это выражение в уравнение движения для линейного осциллятора (1.141), разложив также в интеграл Фурье смещение осциллятора:

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{r}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

После чего нетрудно найти

$$\bar{r}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\bar{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (1.151)$$

Потеря энергии излучения волной равна работе, совершенной полем над осциллятором:

$$-\Delta E = W = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F} \bar{v} dt = e \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(t) \dot{\bar{r}}(t) dt. \quad (1.152)$$

Используя соотношение Парсеваля для интеграла Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.153)$$

получаем:

$$\begin{aligned} -\Delta E &= \frac{2e^2}{m} \int_0^{\infty} i\omega \left\{ \bar{E}(\omega) \bar{r}^*(\omega) - \bar{E}^*(\omega) \bar{r}(\omega) \right\} d\omega = \\ &= 2 \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \gamma |\bar{E}(\omega)|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\omega = \\ &\approx 2 \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{\gamma |\bar{E}(\omega)|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} d\omega. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Полученное выражение имеет резкий максимум вблизи резонанса. При $\gamma \ll \omega_0$ можно приближенно вычислить этот интеграл, воспользовавшись следующим представлением δ -функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}.$$

Получается

$$-\Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\bar{E}(\omega_0)|^2, \quad (1.155)$$

эта поглощенная энергия не зависит от каких-либо свойств поглощающей системы, кроме положения резонанса частоты ω_0 .

1.20. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Пусть имеется однородное, постоянное во времени электрическое поле. Рассмотрим движение в нем частицы с зарядом e и массой m . Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = e \bar{E}. \quad (1.156)$$

Направив ось x по полю и считая, что $\bar{v}_0 = \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_{t=0} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= eE, \\ m\dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.157)$$

Интегрируя уравнения (1.157), получаем:

$$v = x = \pm \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \quad (1.158)$$

где $U = \phi_2 - \phi_1$ — разность потенциалов, пройденная зарядом.

Если $\bar{v}_0 \neq 0$, то интегрирование уравнений движения приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e}{m} Et + v_0 \sin \theta, \\ x &= \frac{et^2 E}{2m} + (v_0 \sin \theta)t, \\ \dot{y} &= v_0 \cos \theta, \\ y &= (v_0 \cos \theta)t, \end{aligned} \quad (1.159)$$

где θ — угол между \bar{v}_0 и осью y .

Если исключить t из выражений для x и y , то получится уравнение траектории движения частицы

$$x = y \operatorname{tg} \theta + \frac{eE}{2m(v_0 \cos \theta)^2} y^2, \quad (1.160)$$

представляющее собой уравнение параболы.

Пусть теперь имеется однородное, постоянное во времени магнитное поле \vec{H} , направленное вдоль оси z ($H \equiv H_z$).

Уравнение движения частицы при этом

$$m\ddot{\bar{r}} = \frac{e}{c} [\bar{v} \vec{H}], \quad (1.161)$$

что эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc} \dot{y} = \omega_c \dot{y}, \quad (1.162)$$

$$\ddot{y} = -\frac{eH}{mc} \dot{x} = -\omega_c \dot{x}, \quad (1.163)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (1.164)$$

где $\omega_c = \frac{eH}{mc}$ — циклотронная частота. Если частица стартует из начала координат, то решения можно выписать в виде

$$x = R_c \sin \omega_c t, \quad (1.165)$$

$$y = R_c \cos \omega_c t, \quad (1.166)$$

где $R_c = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_c}$, $v_{\perp 0}^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$ — начальная скорость частицы в плоскости (xy), перпендикулярной магнитному полю.

Если частица в начальный момент помимо скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, в которой она движется по окружности, имела компоненту скорости вдоль оси z , то вдоль этой оси она будет сохранять равномерное движение. Сложение движения по окружности в поперечной к магнитному полю плоскости, с равномерным движением вдоль поля дает траекторию в виде винтовой линии.

При движении в постоянном магнитном поле выполняются следующие законы сохранения:

- сохранение полной энергии частицы

$$\varepsilon = \frac{m}{2} (v_{\perp 0}^2 + v_{z0}^2) = \text{const};$$

- сохранение проекции момента импульса на ось z

$$L_z = mR_c^2 \omega_c = \text{const};$$

- сохранение магнитного момента

$$\mu = \frac{e}{2mc} L_z = \frac{eR_c^2 \omega_c}{2c} = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2} \cdot \frac{1}{H} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{H} = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь более общий случай — движение частицы в однородных и постоянных во времени электрическом и магнитном полях

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}]. \quad (1.167)$$

Введем новую переменную

$$\vec{V} = \vec{v} - \frac{c[\vec{E}\vec{H}]}{H^2}. \quad (1.168)$$

Используя (1.168), преобразуем уравнение (1.167):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{e}{m} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}\vec{H}] + \frac{[\vec{E}\vec{H}]\vec{H}}{H^2} \right\}. \quad (1.169)$$

Учитывая, что $[[\vec{E}\vec{H}]\vec{H}] = \vec{H}(\vec{H}\vec{E}) - \vec{E}H^2$, получаем:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\vec{H}(\vec{H}\vec{E})}{H^2} + \frac{e}{mc} [\vec{V}\vec{H}]. \quad (1.170)$$

Если электрическое поле перпендикулярно к магнитному, то $\vec{H}\vec{E} = 0$ и

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{e}{mc} [\vec{V}\vec{H}], \quad (1.171)$$

что по форме совпадает с (1.161). Таким образом, по аналогии с (1.161), можно сказать, что \vec{V} — скорость движения частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной \vec{H} . Полная скорость частицы с учетом (1.168) выразится следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{V} + \frac{c[\vec{E}\vec{H}]}{H^2}. \quad (1.172)$$

Ее проекции

$$v_x = V_x + \frac{cE_y}{H} = v_{\perp 0} \cos \omega_c t + \frac{cE_y}{H}, \quad (1.173)$$

$$v_y = V_y = v_{\perp 0} \sin \omega_c t \quad (1.174)$$

Скорость $\vec{v}_D = c \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{H^2}$ называется дрейфовой скоростью частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Эта скорость направлена перпендикулярно к обоим полям. По абсолютной величине она равна $\frac{cE}{H}$ и не зависит ни от заряда, ни от массы частицы. Проинтегрировав еще раз уравнения (1.173) и (1.174), получим уравнения траектории частицы в параметрическом виде

$$x = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{cEt}{H} + x_0, \quad (1.175)$$

$$y = -\frac{v_{\perp 0}}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0. \quad (1.176)$$

Кривая, по которой движется частица, носит название троиходы. Если \vec{E} не перпендикулярно к \vec{H} , то уравнение (1.170) можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную к \vec{H} , и на ось z:

$$\frac{d\vec{V}_{\perp}}{dt} = \frac{e}{mc} [\vec{V}_{\perp} \vec{H}], \quad \frac{dV_z}{dt} = \frac{e}{m} E_{\parallel}.$$

Результатом рассмотрения будет дрейфовое движение, определяемое \vec{E}_{\perp} , на которое наложится равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы eE_{\parallel} (E_{\parallel} — слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю).

1.21. Движение заряженных частиц в медленно изменяющихся магнитных полях

Пусть однородное в пространстве магнитное поле медленно изменяется во времени. Рассмотрим частицу, вращающуюся с циклотронной частотой ω_c в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. То, что поле медленно изменяется во времени, означает, что оно мало изменяется за один оборот частицы

$$T_c \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| \ll |\vec{H}|, \quad (1.177)$$

где $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$.

Используем соотношение

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (1.178)$$

где контурный интеграл берется по траектории частицы. Считая $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ постоянной величиной, имеем

$$e \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{e}{c} \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| S = -\frac{e}{c} \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| \pi R_c^2. \quad (1.179)$$

Слева в последнем равенстве стоит выражение, означающее работу, совершаемую над зарядом за один период циклотронного вращения. Эта работа идет на приращение кинетической энергии движения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\Delta \epsilon_{\perp}$:

$$\Delta \epsilon_{\perp} = -\frac{e}{c} \pi R_c^2 \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right|, \quad (1.180)$$

$$\frac{d\epsilon_{\perp}}{dt} = \frac{\Delta \epsilon_{\perp}}{T_c} = \frac{e \pi R_c^2}{c T_c} \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| = \frac{e \pi \omega_c R_c^2}{2\pi c} \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right| = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.181)$$

Из определения μ следует

$$\epsilon_{\perp} = \mu H, \quad \frac{d\epsilon_{\perp}}{dt} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} + H \frac{\partial \mu}{\partial t}. \quad (1.182)$$

Сравнивая уравнения (1.181) и (1.182), получаем:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \quad (1.183)$$

что означает сохранение магнитного момента в изучаемом нами случае.

Пусть теперь магнитное поле медленно изменяется в пространстве вдоль оси z, по которой оно и направлено (рис. 1.4).

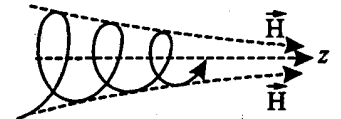


Рис. 1.4

Медленность его изменения задается соотношением

$$R_c \left| \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \right| \ll |\vec{H}|. \quad (1.184)$$

Уравнение непрерывности силовых линий удобно записать в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (1.185)$$

откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = -r \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (1.186)$$

Интегрируем по r, считая, что $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ можно при этом считать константой:

$$H_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (1.187)$$

При условии (1.184), означающем малость угла наклона силовой линии поля к оси, можем считать $H_r \ll H_z$ и $H = H_z$.

Поэтому

$$H_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial |\vec{H}|}{\partial z}. \quad (1.188)$$

Компонента поля H_r обеспечит наличие силы в направлении оси z , поэтому

$$m \frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{c} v_{\perp} H_r = -\frac{e}{2c} v_{\perp} R_c \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{e}{2c} R_c^2 \omega_c \frac{\partial H}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (1.189)$$

Умножив обе части на v_z , получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_z^2}{2} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.190)$$

Записав закон сохранения полной энергии частицы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_z^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = 0, \quad (1.191)$$

из уравнений (1.190) и (1.191) имеем:

$$\frac{d\varepsilon_{\perp}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.192)$$

Из сравнения (1.192) с (1.182) делаем вывод, что $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$.

Этот факт, установленный нами, имеет очень большое значение. Его следствием является, в частности, отражение частиц от так называемых магнитных «пробок» или «зеркал». Действительно, если частица входит в область, где H растет, то для сохранения μ должна увеличиваться ε_{\perp} . А так как полная энергия сохраняется, то ε_{\parallel} может возрасти только в результате уменьшения ε_z . Поэтому падает v_z , которая может обратиться в нуль в некоторой точке, называемой точкой отражения. Количественно это выглядит следующим образом:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{m\bar{v}_{\perp}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \sin^2 \theta = \mu H,$$

где θ — угол между \vec{v}_0 и \vec{H} .

Если в исходной точке $\theta = \theta_0$ и $H = H_0$, то

$$\sin \theta = \sin \theta_0 \sqrt{H/H_0}$$

и точкой отражения будет точка, где $\sqrt{H/H_0} = \frac{1}{\sin \theta_0}$, $\sin \theta = 1$ и

$$v_{\perp} = v_0.$$

1.22. Взаимодействие двух заряженных частиц

Рассмотрим две частицы с массами m_1 и m_2 и зарядами e_1 и e_2 . Для простоты будем считать частицу 2 неподвижной и рассмотрим движение в ее поле пробной частицы 1. Это будет случай движения в центральном поле с потенциальной энергией, обратно пропорциональной r . Силы при этом пропорциональны $1/r^2$. Этот частный случай носит название задачи Кеплера.

При движении в центральном поле, т.е. в поле, в котором потенциальная энергия частицы зависит лишь от ее расстояния от центра, сохраняется момент системы относительно центра

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (1.193)$$

Так как $\vec{L} \perp \vec{r}$, постоянство \vec{L} означает, что \vec{r} все время остается в одной плоскости — перпендикулярной к \vec{L} . Значит вся траектория должна лежать в этой плоскости. Удобно использовать для анализа полярные координаты. Закон сохранения момента тогда запишется в виде

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (1.194)$$

Для полного решения задачи потребуется еще и закон сохранения энергии

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{mr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{e_1 e_2}{r}. \quad (1.195)$$

Отсюда

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{e_1 e_2}{r} \right] - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (1.196)$$

и далее, разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{e_1 e_2}{r} \right] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} + \text{const}. \quad (1.197)$$

Из уравнения (1.194) можем выразить

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt.$$

Подставив сюда dt , выраженное из (1.196), получим после интегрирования

$$\varphi = \int \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2m \left[E - e_1 e_2 / r \right] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{const.} \quad (1.198)$$

Формулы (1.197) и (1.198) содержат решение поставленной задачи в общем виде. Вторая из них дает связь r и φ , т.е. траекторию движения, а первая — определяет связь со временем радиального движения в поле с «эффективной» потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{e_1 e_2}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.199)$$

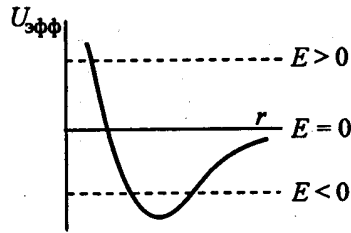


Рис. 1.5

Величина $L^2/2mr^2$ носит название центробежной энергии. Выражение записано для разноименно заряженных частиц. Из графика $U_{\text{эфф}}(r)$ видно, что при $E > 0$ движение частицы будет инфинитным, а при $E < 0$ — финитным (рис. 1.5).

$$(U_{\text{эфф}})_{\min} = -\frac{e^4 m}{2L^2}.$$

Интегрируя выражение (1.198) получаем:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{me^2}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 e^4}{L^2}}}. \quad (1.200)$$

Здесь φ_0 выбрано равным 0.

Введя обозначения

$$P = \frac{L^2}{me^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{me^4}},$$

можем переписать формулу для траектории таким образом:

$$\frac{P}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi. \quad (1.201)$$

Формула (1.201) представляет собой уравнение конического сечения с фокусом в начале координат; P и ε — параметр и эксцентриситет;

$$a = \frac{P}{1 - \varepsilon^2} = \frac{e}{2|E|};$$

$$b = \frac{P}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}.$$

При $E < 0$ $\varepsilon < 1$ и орбита является эллипсом (рис. 1.6).

При значении $E = (U_{\text{эфф}})_{\min}$ эксцентриситет равен $\varepsilon = 0$ и эллипс обращается в окружность.

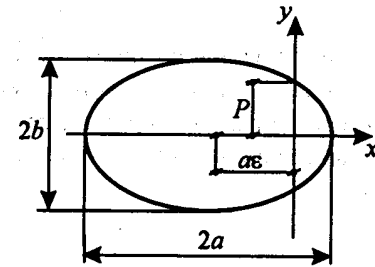


Рис. 1.6

При $E \geq 0$ движение инфинитно. Если $E > 0$, то $\varepsilon > 1$ и траектория является гиперболой, огибающей центр поля (рис. 1.7).

$$r_{\min} = \frac{P}{\varepsilon - 1} = a(\varepsilon - 1),$$

$$a = \frac{P}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\varepsilon}{2E}.$$

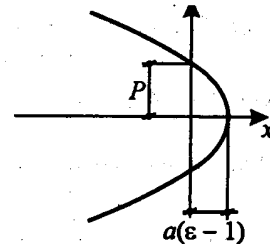


Рис. 1.7

При $E = 0$ $\varepsilon = 1$, т.е. частица движется по параболе с расстоянием перигелия $r_{\min} = P/2$. Этот случай реализуется, когда частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Зависимость координат от времени при движении по орбите может быть найдена из формулы (1.197).

1.23. Рассеяние частиц

Рассмотрим теперь более подробно случай взаимодействия заряженных частиц при $E > 0$. При этом условии движение происходит по незамкнутой орбите. По-прежнему будем считать одну из частиц неподвижной. Пусть на нее из бесконечности налетает вторая частица с заданной скоростью v_0 . По мере приближения налетающей частицы к неподвижной происходит искривление ее траектории, а частица, ра-

нее неподвижная, приходит в движение. Такой процесс называют столкновением, приводящим к рассеянию.

Экспериментальное изучение процесса рассеяния обычно производится статистически: на рассеиватель направляется поток частиц интенсивностью

$$I_0 = nv_0$$

(где n — число частиц в единице объема пучка, v_0 — их скорость) и измеряется число частиц dN , которое проходит в единицу времени через площадку, видимую из рассеивающего центра под телесным углом $d\Omega$. Тогда величиной, характеризующей процесс рассеяния, будет отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{I_0}, \quad (1.202)$$

называемое дифференциальным эффективным сечением рассеяния и имеющее размерность площади. При этом число частиц, рассеянных в угол $d\Omega$ за время dt объемом рассеивателя V , равно

$$dN = d\sigma I_0 \rho V dt, \quad (1.203)$$

где ρ — плотность частиц рассеивателя, ρV — полное число рассеивающих частиц.

Полное эффективное сечение рассеяния определяется как

$$\sigma = \int d\sigma. \quad (1.204)$$

Интегрирование в (1.204) сводится к интегрированию по всем возможным значениям телесного угла.

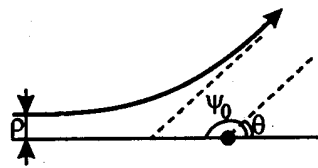


Рис. 1.8

Для получения связи между величиной $d\sigma$ и величинами, характеризующими индивидуальный акт столкновения, рассмотрим рис. 1.8.

ρ — прицельный параметр,

θ — угол рассеяния.

При заданных ρ и v_0 (или ϵ_0) траектория частицы полностью определена. Поскольку поле симметрично, эффективное сечение зависит только от угла θ . Поэтому

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta,$$

а число частиц, рассеянных в $d\Omega$, равно

$$dN = 2\pi I_0 \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = I_0 d\sigma, \quad (1.205)$$

где

$$d\sigma = 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Число частиц, рассеянных на угол θ , определяется числом частиц, имевших прицельный параметр ρ . Точнее, в элемент $d\theta$ рассеиваются частицы, лежащие в интервале $d\rho$. Поэтому, с другой стороны,

$$dN = I_0 2\pi \rho d\rho. \quad (1.206)$$

Приравняв (1.205) и (1.206), имеем

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|. \quad (1.207)$$

Абсолютное значение производной взято из физического смысла σ : оно должно быть величиной положительной, а большим значением ρ соответствуют малые значения θ . Далее, интегрируя (1.207) по ρ и θ , получаем важное соотношение

$$\frac{\rho^2}{2} = \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (1.208)$$

Чтобы установить связь между ρ и θ , нужно рассчитать траекторию и найти зависимость угла ψ_0 от параметра ρ . Из формулы (1.198) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int_{r_0}^L \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E - \frac{e_1 e_2}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}} = \rho \sqrt{2mE} \int \frac{dr}{\sqrt{2m \left(E - \frac{e_1 e_2}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}} = \\ &= \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{e_1 e_2}{rE} \right) - \frac{1}{r^2}}}. \end{aligned} \quad (1.209)$$

Пределы интегрирования определяются из следующих соображений: ψ_0 — изменение угла ψ при пролете частицы по всей траектории. Вся траекторию можно разделить на две части: до точки наибольшего приближения и после этой точки. Вся траектория симметрична относительно этой точки r_0 . Поэтому можно записать

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{e_1 e_2}{rE} \right) - \frac{1}{r^2}}},$$

где r_0 определяется из уравнения

$$E = \frac{e_1 e_2}{r_0} + \frac{\rho^2 E}{r_0^2}$$

или

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2} + \sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}$$

и

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1/\rho^2 (1 - |e_1 e_2|/rE) - 1/r^2}}$$

Вводя новую переменную $z = \frac{1}{r}$, имеем:

$$\psi_0 = 2 \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1/\rho^2 - z^2 - |e_1 e_2|/\rho^2 E - z^2}} = -2 \arccos \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E} + z}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}} \Big|_0^{z_0} \quad (1.210)$$

$$= 2 \arccos \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}}$$

При вычислении подставлено значение $z_0 = \frac{1}{r_0}$. Далее имеем

$$\cos \frac{\psi_0}{2} = \frac{e_1 e_2 / 2\rho^2 E}{\sqrt{\left(e_1 e_2 / 2\rho^2 E\right)^2 + 1/\rho^2}}$$

откуда

$$\rho = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

что и дает необходимую связь между ρ и θ . Подставляя теперь это значение ρ в (1.207), имеем:

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{1}{16} \frac{(e_1 e_2)^2}{E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.211)$$

Это выражение носит название формулы Резерфорда.

1.24. Излучение при рассеянии

Это так называемое тормозное излучение. Особый интерес здесь представляют частицы высоких энергий, углы рассеяния которых достаточно малы. Траектории при этом можно считать почти прямолинейными. Такой подход сильно упрощает формулы. Поместив начало координат в рассеивающий центр, можно написать выражение для компонент сил, действующих на пролетающую частицу:

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{r^3} x, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{r^3} y. \quad (1.212)$$

Поскольку движение происходит в плоскости xu компонента силы F_z отсутствует. Считая, что скорость движения постоянна, можно в формулах для компонент силы записать

$$x = vt, \quad y = \rho, \quad dt = \frac{dx}{v}. \quad (1.213)$$

Энергия, излучаемая частицей в телесный угол $d\Omega$ при пролете мимо рассеивающего центра:

$$-\Delta E d\Omega = \int dI dt = \frac{1}{4\pi c^3} d\Omega \int \left[\ddot{\vec{d}\vec{n}} \right]^2 dt = \frac{1}{4\pi c^3} d\Omega \frac{e_1^2}{v m_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ddot{\vec{F}\vec{n}} \right]^2 dx.$$

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \left[\ddot{\vec{F}\vec{n}} \right]^2 &= F^2 - (\ddot{\vec{F}\vec{n}})^2 = F_x^2 + F_y^2 - (F_x n_x + F_y n_y)^2 = \\ &= (1 - n_x^2) F_x^2 + (1 - n_y^2) F_y^2 - 2F_x F_y n_x n_y, \end{aligned}$$

где n_x и n_y — компоненты единичного вектора \vec{n} в направлении телесного угла $d\Omega$.

Теперь нужно вычислить три интеграла. Первый — определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2 dx = e_1^2 e_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{r^6} dx = 2e_1^2 e_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \rho^2)^3}.$$

Полагая $\frac{x}{\rho} = \operatorname{tg} \varphi$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2 dx = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\rho^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)^3 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\rho^3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{e_1^2 e_2^2}{2\rho^3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi e_1^2 e_2^2}{8\rho^3}.$$

Аналогично вычисляются второй и третий интегралы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_y^2 dx = 2e_1^2 e_2^2 \rho^2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{r^6} = \frac{3e_1^2 e_2^2 \pi}{8\rho^3}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_x F_y dx = 0,$$

так как $F_x F_y$ — нечетная функция x .

Окончательно получим

$$-\Delta E d\Omega = \frac{e_1^4 e_2^2}{32c^3 v m_1^2 \rho^3} \left\{ (1 - n_x^2) + 3(1 - n_y^2) \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{e_1^4 e_2^2}{32c^3 v m_1^2 \rho^3} \left\{ 4 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \psi \right\} \sin \theta d\theta d\psi.$$

Полная излучаемая энергия

$$-\Delta E_{\text{полн}} = -\int \Delta E d\Omega = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{3 c^3 m_1^2 v \rho^3}. \quad (1.214)$$

Для физики плазмы интересно вычислить потери энергии быстрыми электронами на ионах, являющихся рассеивающими центрами. Для них $e_2 = ze$, где z — номер элемента, e — заряд электрона. При рассеянии на каждом ядре частица излучает энергию, определяемую формулой (1.214). Умножая (1.214) на число ядер на единице длины в цилиндре радиуса ρ , $\rho + d\rho$ и интегрируя по всем ρ , находим

$$-\frac{dE}{dx} = -\int \Delta E_{\text{полн}} N 2\pi \rho d\rho = \frac{2\pi^2 e_1^4 z^2 e^2 N}{3c^3 m_1^2 v} \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2\pi^2 e_1^4 z^2 e^2 N}{3c^3 m_1^2 v} \frac{1}{\rho_{\min}},$$

где N — число ядер в единице объема, ρ_{\min} — минимальное значение прицельного расстояния.

2. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ

Несмотря на то, что характерным признаком, отличающим плазму от обыкновенного газа, является наличие в ней процессов, называемых «коллективными» и связанных с «дальнодействием» кулоновских сил, зачастую важнейшие характеристики плазмы определяются столкновительными процессами. Поэтому методы, принципы и понятия физики атомных столкновений занимают существенное место в плазмофизических исследованиях.

Действительно, за исключением спонтанного высвечивания возбужденных атомов или молекул, которое происходит с испусканием фотонов, практически все остальные процессы связаны со столкновениями двух или более одинаковых или различных частиц. Те из столкновений, которые приводят только к изменению кинетической энергии участвующих в них частиц, носят название «упругих». Если же в процессе столкновения происходят другие изменения, то такое столкновение называется «неупругим». В процессе неупругого столкновения может произойти изменение массы, зарядового состояния, внутренней энергии частицы.

Поскольку плазма — система многих частиц, то все реально наблюдаемые величины, представляющие собой интегральные характеристики плазменных процессов, носят статистический характер. При изучении «неколлективных» движений в плазме так же, как в газе, вводятся такие понятия, как средняя длина свободного пробега, среднее время между столкновениями того или иного вида, вычисляются вероятности процессов. При этих вычислениях строятся предположительные модели взаимодействий частиц между собой, которые затем могут быть проверены сравнением экспериментальных результатов измерений реальных величин (потоков и концентраций частиц, интенсивностей излучений и т.д.) с результатами соответствующих вычислений, проводимых на основе принятых моделей.

2.1. Эффективные сечения столкновений и коэффициенты скоростей реакций

Вероятности как упругих, так и неупругих столкновений определяются через «эффективные сечения столкновений» σ .

Если рассматривать атомы или молекулы как упругие шарики радиусом r , то среднюю длину свободного пробега в чистом газе с плотностью n (м^{-3}) можно записать в виде

$$l = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n} = \frac{1}{4\sqrt{2}\sigma n}. \quad (2.1)$$

Лучше перейти к определению эффективного сечения с другой точки зрения: вероятность того, что быстрая частица испытает в газе столкновение, пройдя малое расстояние dx будет определена следующим образом:

$$dP = \frac{dx}{l} = n\sigma dx, \text{ где } l = \frac{1}{n\sigma}. \quad (2.2)$$

Если через $S = 1 \text{ м}^2$ проходит пучок N частиц, движущихся со скоростью v , то после прохождения пути dx число частиц в некотором состоянии уменьшится на $dN = N n \sigma dx$. Интегрируя, получаем:

$$N = N_0 e^{-n\sigma x}, \quad (2.3)$$

где N — число частиц, прошедших расстояние x . Если частицы заряжены однократно и при столкновении теряют свой заряд, то на расстоянии x ток $J_0 = N_0 v$ уменьшится до величины

$$J = J_0 \exp[-n\sigma x]. \quad (2.4)$$

Аналогично поглощаются фотоны

$$I = I_0 \exp[-\mu x], \quad (2.5)$$

где I — интенсивность света, μ — коэффициент поглощения фотонов. Соотношение (2.5) называется законом Ламберта.

Возвращаясь к пучку частиц, заметим, что при достаточно малых n , т.е. при низких давлениях, когда средняя длина свободного пробега значительно превосходит x ($\frac{1}{n\sigma} \gg x$, т.е. $1 \gg n\sigma x$), имеем:

$$J/J_0 = 1 - n\sigma x. \quad (2.6)$$

В таких случаях говорят, что эксперименты проводятся в «условиях однократных столкновений».

Величина $n\sigma$ представляет собой коэффициент поглощения и обозначается как α .

Теоретики предпочитают выражать эффективные сечения в единицах a_0^2 или πa_0^2 , где a_0 — радиус первой боровской орбиты атома водорода

$$a_0 = 0,5292 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

поэтому

$$\pi a_0^2 = 8,806 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2,$$

$$a_0^2 = 2,803 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2.$$

Часто при изучении столкновений измеряется не поглощение налетающих частиц, а ток частиц, образующихся в мишени.

$$J_2 = J_1 n \sigma x.$$

В простейшем случае малого давления этот ток линейно зависит от давления. Если частицы, проходя мишень, при столкновениях превращаются в частицы другого типа, а те могут за счет обратного процесса превратиться в исходные, то при достаточно высоких давлениях устанавливается равновесие между прямым и обратным процессами и отношение числа ударяющих частиц первого типа к числу ударяющих частиц второго типа не зависит от давления.

Важным понятием является понятие дифференциального эффективного сечения рассеяния. Его удобно ввести, основываясь на простом случае упругого рассеяния, распространив затем полученные выводы на более общий случай. Пусть имеется поток частиц, налетающих на мишень вдоль оси z . Число частиц из этого налетающего потока, рассеянных на мишени в элемент телесного угла $d\Omega$ в единицу времени, равно $N_p(\theta, \varphi) d\Omega$. Очевидно, что $N_p d\Omega \sim N_n n_m$ (где N_n — число частиц, налетающих в единицу времени, n_m — число частиц мишени).

Тогда, введя коэффициент пропорциональности $\sigma_d(\theta, \varphi)$, запишем

$$N_p(\theta, \varphi) d\Omega = \sigma_d(\theta, \varphi) N_n n_m d\Omega = d\sigma_d(\theta, \varphi) N_n n_m.$$

Введенная величина, умноженная на элемент телесного угла $\sigma_d d\Omega = d\sigma_d$, называется дифференциальным сечением упругого рассеяния. Оно равно

$$d\sigma_d(\theta, \varphi) = \frac{N_p(\theta, \varphi) d\Omega}{N_n n_m}.$$

Полное сечение упругого рассеяния связано с дифференциальным следующим образом:

$$\sigma = \int d\sigma_d(\theta, \varphi) = \int \sigma_d(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_d(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Если величина дифференциального сечения может рассматриваться, как эффективная площадь поперечного сечения частицы в мишени, на которой бомбардирующая частица рассеивается в угол $d\Omega$, то полное сечение — соответствующая площадь, на которой рассеяние идет в полный телесный угол 4π .

Если $P(\theta, \varphi) d\Omega$ — вероятность того, что рассеяние налетающей частицы потока произойдет в элемент телесного угла $d\Omega$, то дифференциальное сечение рассеяния можно связать с этой вероятностью следующим образом:

$$\sigma_d(\theta, \varphi) d\Omega = \sigma P(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Откуда следует

$$P(\theta, \varphi) = \frac{\sigma_d(\theta, \varphi)}{\sigma}.$$

В случае неупругих процессов взаимодействия именно вероятностный подход служит хорошей физической интерпретацией. Вероятности процессов неупругих столкновений часто выражают не через эффективные сечения, а через «коэффициенты» и «скорости» реакций. Например, «коэффициент рекомбинации», «скорость прилипания».

В случае реакции между двумя компонентами скорость убывания концентраций может быть записана в виде

$$dn_1/dt = -kn_1n_2, \quad dn_2/dt = -kn_1n_2,$$

где k — коэффициент рекомбинации (измеряется в $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$). Связь с соответствующим сечением процесса σ дается выражением

$$k = \int_0^{\infty} v\sigma(v)f(v)dv, \text{ т.е. } k = \langle \sigma v \rangle,$$

где v — относительная скорость частиц. При такой записи подразумевается, что частицы одной из компонент покоятся, а другой — распределены по скоростям в соответствии с функцией распределения $f(v)$.

2.2. Теоретические подходы в теории столкновений

Любая теория столкновительного процесса должна позволить рассчитать такие его характеристики, как эффективное сечение или вероятность. Расчеты проводятся исходя из определенных предположений о механизме взаимодействия между сталкивающимися частицами — о распределении силовых полей, о классичности или квантовости рассмотрения. Выбор расчетной модели определяют из конкретных условий процесса, подлежащего исследованию, в частности, исходя из относительной энергии взаимодействующих частиц.

Существует область энергий, где квантовая и классическая теории дают одинаковые результаты. Там вполне можно использовать классический подход. Критерием применимости классической теории

является малость дебройлевской длины волны налетающей частицы по сравнению с размерами мишени или области взаимодействия. Дебройлевская длина волны

$$\lambda = h/(m_1v),$$

где m_1 — масса частицы, v — ее скорость, h — постоянная Планка.

Более строгий критерий применимости классической механики выглядит следующим образом:

$$\theta y \gg h/(m_1v),$$

где y — расстояние наибольшего сближения частиц, θ — угол рассеяния, v — относительная скорость.

При $\theta = 0$ y совпадает с прицельным параметром ρ . Это условие существенно в основном при рассмотрении упругого рассеяния электронов и ионов. Нетрудно доказать, что обычно величина θy уменьшается с уменьшением θ . Поэтому классическая механика обычно неприменима при рассмотрении рассеяния на очень малые углы. При изучении рассеяния на сравнительно большие углы классический подход дает достаточно хорошие результаты. Большинство экспериментов по рассеянию вполне описываются классическими расчетами, более того, чтобы наблюдать квантовые эффекты при рассеянии, необходимо добиваться повышенной разрешающей способности приборов. В то же время при рассмотрении процессов возбуждения классический подход в чистом виде неприменим — нужно вводить допустимые собственные значения энергии.

Исходным моментом любых расчетов является определение потенциальной энергии взаимодействия двух частиц. В классике иногда пользуются приближением «непроницаемых сфер» или «бильiardных шаров», которое, однако, не всегда достаточно информативно. Поэтому приходится задаваться тем или иным видом распределения силового поля, а в случае столкновений молекул принимать во внимание также принцип Франка-Кондона.

2.3. Потенциальная энергия взаимодействия между электроном и атомом

1. Потенциальная энергия взаимодействия между электроном и атомом водорода хорошо аппроксимируется выражением

$$U(r) = -e^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0} \right) \exp \left[-\frac{2r}{a_0} \right],$$

где a_0 — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода.

2. Для более тяжелых атомов Хартри, используя метод самосогласованного поля, получаем:

$$U(r) = -\frac{Z_p e^2}{r},$$

здесь Z_p — функция r , экспоненциально убывающая при больших r . (Z_p табулирована для большого числа атомов и ионов).

3. Для наиболее тяжелых атомов часто достаточно использовать модель Томаса—Ферми, в которой все электроны считаются статистически распределенными в элементе объема пространства импульсов. По этой модели

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r} \Phi\left(\frac{r}{\mu}\right),$$

где Z — заряд ядра атома, $\mu = 0,885Z^{1/3} a_0$. Значения $\Phi(x)$ табулированы.

4. При достаточно больших расстояниях между электроном и атомом потенциальная энергия взаимодействия может быть описана известной формулой для работы поляризационных сил

$$U_p(r) = -\frac{\alpha e^2}{2r^4},$$

где α — поляризуемость атома.

Зависимость $U(r) \sim 1/r^4$ в некотором смысле дополняет модель непроницаемых сфер. Из соображений размерности следует, что для $U(r) \sim 1/r^n$ вероятность рассеяния на угол $\theta_c - I_s(\theta_c)$ в системе центра масс пропорциональна $v_e^{-4/n}$. Для роя электронов в газе частота столкновений

$$v_e = I_s(\theta_c) v_e,$$

следовательно, при $U(r) \sim 1/r^4$ она не зависит от скорости электрона, тогда как в модели непроницаемых сфер от скорости электрона не зависят средняя длина свободного пробега и эффективное сечение.

2.4. Потенциальная энергия взаимодействия между атомными системами

В наиболее простой форме потенциальную энергию взаимодействия двух атомов можно считать функцией только расстояния r между двумя ядрами. При этом можно выделить две области: область короткодействующего экспоненциального поля и область далекодействующего поля сил поляризации. Первая — область сил отталкивания, вторая — область притяжения (хотя иногда и здесь возможно отталкивание). Далее, так как далекодействующие силы в основном притягивают, а короткодействующие — отталкивают, то будет существовать минимум потенциальной энергии. Подчеркиваем, что здесь рассматриваем силы, ускоряющие одно ядро в поле другого, а не силы, действующие на отдельные электроны атомов.

Из-за значительных трудностей, возникающих при определении потенциальных функций и при развитии теории рассеяния, часто используют сильно упрощенные потенциальные функции, полученные на основе моделей: а) непроницаемых сфер; б) прямоугольной ямы; в) сферической ямы; г) экспоненциальной ямы.

Потенциальные функции для короткодействующих сил можно записать в двух видах:

а) в виде формулы Бора для экранированного кулоновского взаимодействия между ядрами с зарядами Z_1 и Z_2 , окруженными взаимно проникающими электронными оболочками:

$$U_B(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \exp\left[-\frac{r}{\beta}\right],$$

где $\beta = \frac{a_0}{Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3}}$ — экранирующий фактор.

б) в виде формулы, предложенной Фирсовым (она лучше соответствует экспериментальным данным по упругому рассеянию):

$$U_F(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \varphi(x), \quad x = \frac{\left(Z_1^{1/2} + Z_2^{1/2}\right)^2}{0,885 a_0} r,$$

функция $\varphi(x)$ табулирована.

Потенциальная энергия далекодействующих сил между нейтральными атомами и молекулами описывается формулой Ван-дер-Ваальса

$$U_w(r) = -\frac{c}{r^6}.$$

Эти силы возникают вследствие «динамической поляризации» атомов. Электроны обоих атомов «вращаются» на орбитах с такой разностью фаз, при которой среднее расстояние между ними за период обращения оказывается наибольшим. При этом между атомами возникают силы притяжения. Величины их точно известны только для небольшого числа простых атомных систем.

Если одна из частиц или обе частицы являются полярными молекулами, то вклад, пропорциональный r^{-6} могут вносить силы притяжения, вызванные взаимодействием постоянного поля диполя одной частицы с диполем, индуцированным им во второй. При двух полярных молекулах появляется дополнительный вклад в результате диполь-дипольного взаимодействия и квадрупольной поляризации.

Есть еще целый ряд эффектов, оказывающих некоторое влияние на характер взаимодействия между атомными системами. Например, адиабатическая связь между движением ядра и электрона, спин-спиновое взаимодействие и т.д.

В случае взаимодействия двух ионов при достаточно больших расстояниях между ними потенциальную энергию можно считать просто кулоновской

$$U_c(r) = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Потенциальную энергию взаимодействия между ионом с зарядом e и атомом с поляризуемостью α определяем по формуле

$$U_p(r) = -\frac{\alpha e^2}{2r^4}.$$

Взаимодействие между ионом и молекулой содержит также члены, зависящие от пространственной ориентации молекулы.

В настоящее время делаются попытки представить полное центральное силовое поле в виде комбинации аналитических функций. Например:

$$U(r) = \frac{a}{r^m} - b \exp[-nr] \quad (\text{Линнетт}),$$

или

$$U(r) = a \exp[-br] - \frac{c}{r^6} - \frac{d}{r^8} \quad (\text{Бухингем—Корнер}),$$

или

$$U(r) = \frac{a}{r^m} - \frac{b}{r^n} \quad (\text{Леннард—Джонс}).$$

Типичная потенциальная функция для двухатомной молекулы имеет вид

$$U(r - \sigma) = D [1 - \exp\{-\beta(r - \sigma)\}]^2 \quad (\text{Морзе}),$$

где D — энергия диссоциации.

Здесь не будем рассматривать поля нецентральных сил, т.е. поля, зависящие от взаимной угловой ориентации атомов.

Для любой пары атомов при некотором расстоянии между ними будет существовать состояние, при котором имеет место минимум потенциальной энергии. Но «глубина» этого минимума часто оказывается недостаточной для образования стабильной молекулы при тепловых скоростях и для существования возбужденных колебательных уровней.

2.5. Переходы в двухатомных молекулах. Принцип Франка—Кондона

Согласно принципу Франка—Кондона за время электронного перехода в двухатомной молекуле междуядерное расстояние r не изменяется. Поэтому на диаграмме потенциальной энергии этот переход может быть изображен прямой линией (рис. 2.1). С классической точки зрения переход из основного состояния двухатомной молекулы должен начинаться в точках поворота (при колебании), где ядра проводят большую часть времени. При переходе на более высокий электронный уровень молекулы или в основное состояние молекулярного иона вертикальная линия пересекает верхнюю потенциальную кривую в некоторой точке. Если точка не соответствует какому-либо колебательному уровню, то будет иметь место такой переход в ближайшее колебательное состояние, при котором нарушение принципа Франка—Кондона минимально.

Переход на более высокий электронный уровень, который приводит к образованию молекулярного иона в различных возбужденных колебательных состояниях, изображен на рис. 2.2.

При переходе, изображенном на рис. 2.3, могут образоваться также атомный ион и атом.

В случае, изображенном на рис. 2.4, переход в антисвязанное состояние приводит к образованию атомного иона и атома, кинетическая энергия которых распределена следующим образом:

$$E_{A^*} = \frac{M_B}{M_{A^*} + M_B} E_0.$$

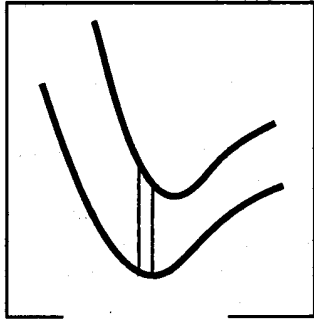


Рис. 2.1

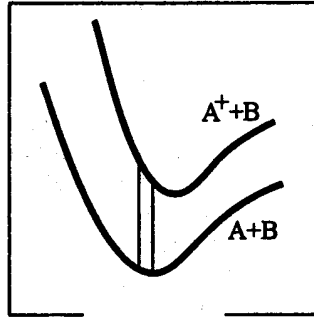


Рис. 2.2

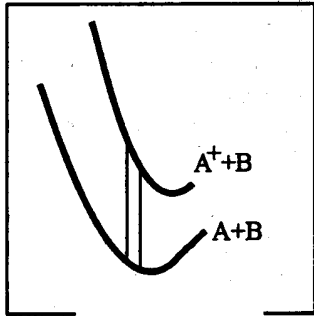


Рис. 2.3

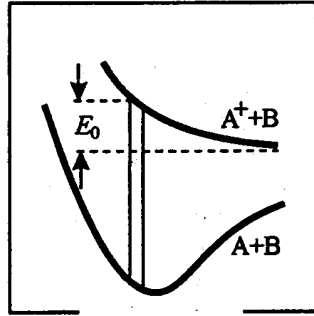


Рис. 2.4

2.6. Системы координат и энергетические соотношения

Обычно при описании движения частиц пользуются двумя системами координат: лабораторной и системой центра масс.

1. Лабораторная система

Скорости налетающей частицы и рассеивателя при упругом рассеянии в лабораторной системе (рис. 2.5) определяются выражениями:

$$v_{1p}^2 = v_{1a}^2 \left(1 - \frac{4\mu^2}{m_1 m_2} \cos^2 \theta_2 \right).$$

$$v_2 = \frac{2v_{1a}}{m_2} \mu \cos \theta_2,$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — приведенная масса.}$$

2. Система центра масс

Если \bar{v}_c — скорость движения центра масс, то закон сохранения импульса имеет вид: $(m_1 + m_2) \bar{v}_c = m_1 \bar{v}_{1a}$, откуда

$$\bar{v}_c = \frac{\bar{v}_{1a}}{m_2} \mu.$$

В системе центра масс величины скоростей в результате столкновения не меняются: обе частицы рассеиваются на один и тот же угол θ_c (рис. 2.6). Кинетическая энергия E_c и полный момент количества движения в системе центра масс равны:

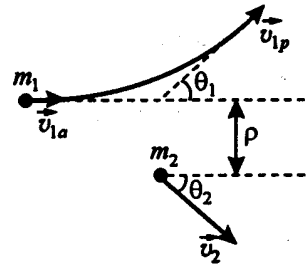


Рис. 2.5

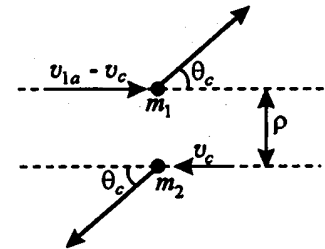


Рис. 2.6

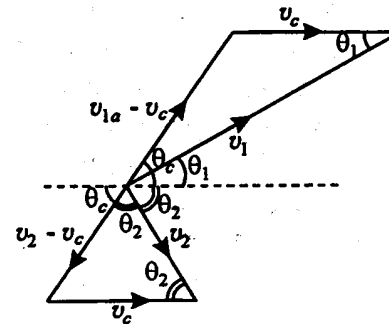


Рис. 2.7

$$E_c = \frac{1}{2} \mu v_{1a}^2, \quad L_c = \mu v_{1a} \rho.$$

Соотношения между углами рассеяния при упругом столкновении в этих двух системах координат можно получить из векторной диаграммы (рис. 2.7):

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \theta_c),$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_c}{m_1/m_2 + \cos \theta_c}; \quad v_{1p} \sin \theta_1 = \frac{v_{1a}}{m_1} \mu \sin \theta_c.$$

В случае столкновения электрона с атомом $m_1 \ll m_2$, $\theta_1 \approx \theta_c$, а при столкновении одинаковых атомов $m_1 = m_2$, $\theta_1 = \theta_c/2$.

Ясно, что полное эффективное сечение столкновения должно быть определено таким образом, чтобы оно не зависело от выбора системы координат.

2.7. Потери энергии при столкновениях упругих непроницаемых сфер

Относительная потеря энергии ударяющей частицей (упругие шары) определяется зависимостью

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{v_{1a}^2 - v_{1p}^2}{v_{1a}^2},$$

где E — начальная кинетическая энергия соударения. Отсюда следует (рис. 2.8):

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_{1a}^2}, \quad \text{где } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1a} \cos \theta_2.$$

Вероятность рассеяния на угол $\theta_2 < \theta < \theta_2 + d\theta_2$ определяется выражением

$$P(\theta_2) = \sin 2\theta_2 d\theta_2.$$

Проинтегрировав по всем возможным значениям угла, имеем:

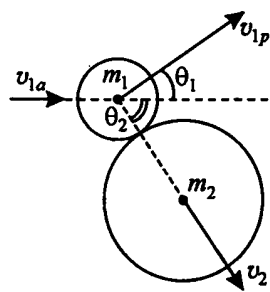


Рис. 2.8

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &= \int \frac{\Delta E}{E} dP(\theta_2) = \int \frac{m_2}{m_1 v_{1a}^2} \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1a}^2 \cos^2 \theta_2 \sin 2\theta_2 d\theta_2 = \\ &= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (-2) \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta_2 d(\cos \theta_2) = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \end{aligned}$$

При столкновении одинаковых атомов ($m_1 = m_2$) $\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{1}{2}$. Это

очень важный результат. Далее, так как $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, то разлет происходит по взаимно перпендикулярным направлениям. В этом случае рассеяние ударяемой частицы в системе центра масс изотропно

$$I_s(\theta_c) = \frac{\pi(r_1 + r_2)^2}{4\pi}.$$

При рассеянии электронов атомами $\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \approx \frac{2m_e}{m_2}$, т.е. потеря энергии

очень мала.

$$\text{Кроме того, } \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}; \quad v_2 = \frac{2m_e}{m_2} v_{1a} \cos \theta_2.$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2m_e}{m_2} (1 - \cos \theta_1).$$

Выражение для I_s получается таким же, как и в случае столкновения одинаковых атомов, и, так как $\theta_1 \approx \theta_c$, то для столкновений электрона с атомом лабораторная система и система центра масс практически идентичны. Поэтому можно ожидать, что классическое рассеяние электронов атомами в лабораторной системе координат будет изотропным.

Для смеси двух газов с максвелловским распределением молекул по скоростям (температуры газов равны соответственно T_1 и T_2) справедливо соотношение

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle_M = \frac{8}{3} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right),$$

где средние потери энергии выражаются в долях средней кинетической энергии молекулы.

Использование модели непроницаемых сфер может быть в некоторой степени оправдано тем, что взаимодействие между двумя

атомами, складывающееся из сильного короткодействующего отталкивания и слабого дальнедействующего притяжения, можно в грубом приближении считать подобным взаимодействию непроницаемых сфер.

Согласно квантовой теории, рассеяние непроницаемых сфер неизотропно: эффективное сечение резко падает при изменении угла рассеяния от нуля до критического значения $\theta_{кр} = \frac{\pi}{ka}$, где $k = \frac{\mu v_r}{\hbar}$, a — радиус сферы. При $\theta_c > \theta_{кр}$ рассеяние изотропно, но его сечение составляет половину классического.

Реально эффективное сечение рассеяния атомов описывается квантовой моделью. Классическая модель непроницаемых сфер хорошо работает при изучении подвижности ионов.

2.8. Классическое приближение парных столкновений для некоторых неупругих процессов

Простейший классический подход к изучению неупругих столкновений электрона с атомом основан на учете лишь парных взаимодействий налетающего электрона с электроном, находящимся на орбите атома. Электроны рассматриваются как непроницаемые сферы. Из расчетов Томсона по ионизации атома с потенциалом ионизации E_i электроном с кинетической энергией E_p следует, что если пренебречь движением связанного электрона, то переданная при столкновении энергия запишется в виде

$$E_T = \frac{E_p}{1 + \left(\frac{\rho E_p}{e^2}\right)^2}.$$

Полагая, что все столкновения, при которых передается энергия $E_T \geq E_i$, приводят к ионизации, получаем выражение для эффективного сечения: $\sigma_{кл}^2 = \pi \rho_c^2$, где

$$\rho_c^2 = \left(\frac{e^2}{E_p}\right)^2 \left(\frac{E_p}{E_i} - 1\right),$$

n — число электронов на внешней оболочке атома.

При энергиях, близких к пороговым, эта теория дает величины эффективных сечений, завышенные примерно в 5 раз, а при больших энергиях сечения получаются заниженными. Тем не менее эту теорию можно использовать для оценки, если нет экспериментальных данных.

Приближение парных столкновений можно применить к расчетам сечений возбуждения разрешенных уровней, если при этом предположить, что для возбуждения уровня E_j величина переданной энергии должна быть заключена в пределах $E_j < E_T < E_k$ ($k > j$). Попытка учесть орбитальное движение электрона сильно усложняет модель, но иногда дает хорошие результаты.

Ионизация атома протонами также может быть рассмотрена с использованием модели непроницаемых сфер.

2.9. Классическая теория упругого рассеяния в центральном поле

Используем систему координат центра масс. Считаем, что силовое поле складывается из дальнедействующего притяжения и короткодействующего отталкивания (это, однако, не нарушает общности рассуждений и результатов).

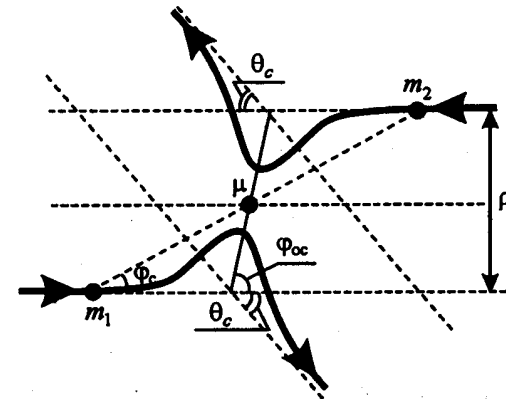


Рис. 2.9

Угол ϕ_c определяет пространственную ориентацию вектора межъядерного расстояния \vec{r} . Его значение при наибольшем сближении равно ϕ_{0c} . Если одна из частиц до столкновения покоилась в лабораторной системе, то относительная скорость равна v_{1a} .

Столкновение может рассматриваться как одномерное движение одной частицы с массой μ в направлении вектора \vec{r} в поле $U_{эфф}(\vec{r})$, равном

$$U_{\text{эфф}}(\bar{r}) = U(\bar{r}) + \frac{1}{2} \frac{\mu v_{1a}^2 \rho^2}{r^2} = U(\bar{r}) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = U(\bar{r}) + U_c.$$

Второй член в правой части равенства представляет собой вращательную кинетическую энергию системы и имеет положительный знак, поэтому его можно рассматривать как некоторое фиктивное «центробежное отталкивание» $U_c(\bar{r})$. В каждой точке траектории имеет место соотношение

$$\frac{1}{2} \mu v_{1a}^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}_c^2) + U(\bar{r}),$$

где $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \equiv \frac{1}{2} \mu v^2$ — кинетическая энергия поступательного движения;

$\frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}_c^2 \equiv \frac{1}{2} \mu r^2 \omega^2$ — кинетическая энергия вращения. Используя формулу $L = \mu r^2 \dot{\phi}_c$, получаем:

$$\frac{dr}{d\phi_c} = \frac{dr/dt}{d\phi_c/dt} = -\frac{r^2}{\rho} \left[1 - \frac{U(\bar{r})}{\frac{1}{2} \mu v_{1a}^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда из условия $\frac{\partial r}{\partial \phi_c} = 0$ определится соотношение, из которого можно получить расстояние наибольшего сближения

$$\frac{U(\bar{r})}{\frac{1}{2} \mu v_{1a}^2} + \frac{\rho^2}{r_m^2} = 1.$$

Угол рассеяния $\theta_c = \pi - 2\phi_{0c}$; окончательное выражение для него

$$\theta_c(v_{1a}, \rho) = \pi - 2\rho \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{U(r)}{\frac{1}{2} \mu v_{1a}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Имея связь между θ_c и ρ , можно, с учетом того, что при рассеянии на силовом центре

$$N_p = \frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|,$$

подсчитать интенсивность потока частиц, рассеиваемых в соответствующий телесный угол, а также определить дифференциальное и полное сечения рассеяния.

Это выражение используется также при вычислениях коэффициентов переноса газа. Возможно его употребление для решения обратной задачи — восстановления вида потенциальной функции $U(r)$ из экспериментальных данных по рассеянию.

2.10. Квантовый подход к теории столкновений

При описании столкновений с позиций квантовой теории принимается обычно следующая модель: пучок частиц, налетающий на рассеивающий центр вдоль оси z , представляется в виде плоской волны Ce^{ikz} , где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2mE_p}}{\hbar} = \frac{2\pi m v}{h} = \frac{p}{\hbar};$$

λ — длина волны; C — характеризует амплитуду волны и связана с плотностью потока частиц соотношением

$$C = \sqrt{\frac{A}{v}}.$$

Плотность потока связана с волновой функцией соотношением

$$A = \frac{\hbar}{2m_i} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

Предполагается, что поток рассеянных частиц имеет вид сферической волны, расходящейся из рассеивающего центра,

$$\frac{C}{r} f(\theta) e^{ikr},$$

где амплитуда рассеяния $f(\theta)$ связана с вероятностью $I(\theta)$ соотношением

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2.$$

В качестве простейшей задачи рассмотрим рассеяние в поле центральных сил $V(r)$. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \{k^2 - U(r)\} \psi = 0,$$

где

$$U(r) = \frac{8\pi^2 m V(r)}{h^2}.$$

Чтобы решить это уравнение, можно разложить волновую функцию в ряд по полиномам Лежандра

$$\psi = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l P_l(\cos \theta).$$

В ряде задач существенную роль играет только s волна ($l = 0$), но для большей точности необходимо также учитывать более высокие значения l . Решение уравнения Шредингера должно быть таким, чтобы его асимптотическая форма имела вид

$$e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta),$$

где первый член описывает падающую, а второй — рассеянную волну.

В случае упругого рассеяния конечный результат представляется следующими соотношениями:

$$I(\theta) = \left| \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (e^{2i\eta_l} - 1)(2l+1) P_l(\cos \theta) \right|^2,$$

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \eta_l.$$

где η_l — сдвиг фаз при рассеянии.

Видно, что решение задачи о рассеянии в основном сводится к определению фазовых сдвигов. Когда сдвиги фаз малы, полные эффективные сечения рассеяния тоже малы, так как обычно существенен вклад лишь небольшого числа гармоник.

Фазовые сдвиги вычисляются, имея в виду условие $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_l = 0$.

Орбитальный момент l связан с классическим моментом количества движения L соотношением

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar.$$

Момент L может быть выражен через параметр удара

$$L = \mu v \rho.$$

В классической механике (и в квантовой — в рамках принципа неопределенностей) величины θ_c и ρ связаны взаимно однозначно. Момент количества движения L может принимать лишь некоторые определенные значения, при этом каждому значению L будут соответ-

ствовать не единственные значения θ_c и ρ , а их распределения. Однако наиболее вероятное значение ρ близко к классическому $L/\mu v$.

2.11. Борновское приближение

Борновское приближение справедливо в случае, когда фазовые сдвиги малы. Фактически это приближение слабого рассеяния. Оно дает точные результаты при достаточно высоких энергиях соударения когда,

$$e^2/\hbar v \leq 1,$$

но иногда его можно использовать и при меньших энергиях для качественных оценок.

Уравнение Шредингера, записанное ранее, можно переписать в виде

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = F(x, y, z),$$

где F — известная функция.

$$F = U(\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} F(\vec{r}') d\vec{r}',$$

где $\psi_0(\vec{r})$ — общее решение однородного уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Это решение до столкновения можно представить в виде

$$\psi_0 = e^{ikz}.$$

Метод Борна состоит в том, что решение ищется в виде $\psi = e^{ikz} + \psi_1$, ψ_1 — малая поправка, произведением которой на U пренебрегают, полагая:

$$F(\vec{r}) = U(\vec{r}) e^{ikz} + U(\vec{r}) \psi_1(\vec{r}) = U(\vec{r}) e^{ikz},$$

при этом легко подсчитывается ψ_1

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U(\vec{r}') e^{ikz} d\vec{r}'.$$

Легко видеть, что асимптотический вид решения на бесконечности есть

$$\psi_1 \approx \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ik(\vec{n}\vec{r}) + ikz} U(\vec{r}) d\vec{r}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},$$

т.е. оно ведет себя как расходящаяся волна.

2.12. ВКБ-приближение

Это приближение применимо при больших сдвигах фаз η_l . Таким образом, его условия применимости противоположны условиям применимости борновского приближения.

Метод предложен Джеффрисом, но по имени развивших его Венцеля, Крамерса и Бриллюэна его часто называют методом ВКБ. Вычисление эффективных сечений производится следующим образом. Так как число частиц, падающих в 1 с и имеющих параметры удара от ρ до $\rho + d\rho$, равно $2\pi J \rho d\rho$, то число частиц, рассеянных в 1 с на угол от θ до $\theta + d\theta$, равно соответственно $2\pi J \rho \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) d\theta$. Следовательно,

$$2\pi J \rho \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right) d\theta = 2\pi J I(\theta) \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$I(\theta) = \rho \frac{d\rho}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta}.$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$I(\theta) = L \frac{dL}{d\theta} \frac{1}{m^2 v^2 \sin \theta}.$$

Тогда, зная потенциальную энергию взаимодействия $U(r)$ и решив уравнение

$$\frac{\pi - \theta}{2} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial L} \left\{ 2m \left[E_p - U(r) \right] - \frac{L^2}{r^2} \right\}^{1/2} dr,$$

можно вычислить $I(\theta)$.

2.13. Экспериментальные методы физики атомных столкновений

При изучении столкновения двух частиц следует, по возможности, приблизиться к схеме (идеальной), в которой для каждой частицы известны кинетическая энергия и траектория.

Даже эксперимент типа «однократного столкновения», осуществляемый по методу пересекающихся пучков, при котором частицы анализируются по скорости, только приближается к осуществлению этой идеальной схемы. Из-за трудностей получения достаточно интенсивных пучков частиц с точно определенными траекториями и значениями скоростей из экспериментов извлекается лишь неполная информация.

Большинство экспериментальных схем можно отнести к одной из пяти групп. Перечисление ведем в порядке удаления от наиболее идеальной схемы:

- монокинетические пересекающиеся пучки с регистрацией (в случае необходимости) отдельных частиц;
- анализ и регистрация частиц, образованных при прохождении пучка через газ в условиях «однократных столкновений»;
- измерение поглощения и скорости частиц, диффундирующих через газ;
- изучение временной зависимости выхода частиц, вытягиваемых из невозмущенной реагирующей системы (например, распадающейся плазмы);
- анализ свойств, приобретаемых газом в случае сообщения ему непрерывной (или в виде импульсов) электрической энергии или энергии в другой форме.

Отметим некоторые возможности перечисленных экспериментальных методов.

1. Эксперименты первой группы проводятся только в наиболее благоприятных случаях. Селекция по скоростям — единственный метод, позволяющий монохроматизировать пучки в определенных пределах. Если энергия частиц первого пучка намного больше энергии частиц второго пучка, то нет необходимости анализировать по скоростям частицы с меньшей энергией, так как разность скоростей, от которой зависит эффективное сечение, почти полностью определяется скоростями частиц пучка, обладающего большей энергией.

В большинстве экспериментов с пересекающимися пучками измерялись полные сечения неупругих столкновений и лишь иногда — дифференциальные.

Счет отдельных частиц необходим лишь тогда, когда малы интенсивности или когда в результате неупругого столкновения образу-

ются одновременно две частицы и, чтобы отличить их, приходится пользоваться методом совпадений.

2. При прохождении пучка частиц через газ низкого давления могут быть измерены не только полные эффективные сечения рассеяния, но и дифференциальные сечения, эффективные сечения потери импульса для ударяющей частицы, а также энергия, угловое распределение и интенсивности образующихся в газе «медленных» частиц. Более грубые эксперименты могут быть проведены при многократных столкновениях ударяющихся частиц с атомами или молекулами газа. Можно измерять равновесные фракции при наличии конкурирующих процессов.

3. Исследование диффузии электронного или ионного роя в газах под действием электрических полей позволяет получить данные об эффективных сечениях упругого рассеяния, потери импульса и об отдельных неупругих процессах.

Некоторые данные дают исследования процессов передачи тепла, релаксации, диффузии резонансного излучения.

4. Возвращение газа, возбуждаемого с помощью любого внешнего воздействия, к первоначальному равновесию происходит обычно в результате целого ряда процессов. Один из этих процессов может играть при этом основную роль или может быть специально выделен условиями эксперимента. Регистрация электронов, фотонов, ионов и атомов в распадающейся плазме в зависимости от времени позволяет определить значения коэффициентов скорости реакции для различных процессов.

5. Скорости некоторых неупругих столкновений можно получить путем исследования нарастания ионизации при электрическом пробое, исследования тлеющего и других разрядов, по возбуждению газов ударными волнами, по астрофизическим и геофизическим явлениям.

2.14. Некоторые возможные элементарные процессы в плазме

Для сжатого описания неупругих столкновений приняты следующие обозначения:

ϕ — фотон любой энергии;

e — электрон;

0 — нейтральный атом или молекула, (00) — двухатомная молекула;

$0'$ — атом или молекула в возбужденном электронном состоянии;

$0''$ — атом с двумя возбужденными электронами;

0^v — молекула в возбужденном колебательном состоянии;

0^r — молекула в возбужденном вращательном состоянии;

0^m — возбужденный атом в метастабильном состоянии;

1 — однократно ионизованный атом или молекула;

$2; 3; \dots$ — многократно ионизованные атом или молекула;

$\bar{1}$ — отрицательный ион.

Столкновения типа $A + B \rightarrow P + Q$ записываются в виде AB/PQ :

$\phi 0/0'$ — фотовозбуждение;

$\phi 0/0^v$ — фотовозбуждение колебательных уровней;

$\phi 0/e1$ — фотоионизация;

$\phi(00)^v/00$ — фотодиссоциация;

$e0/eel$ — ионизация электронным ударом;

$e0/e0'$ — возбуждение электронным ударом;

$e(00)/e00$ — диссоциация электронным ударом;

$e(00)/eel0$ — диссоциативная ионизация электронным ударом;

$0'1/10$ — перезарядка;

$1\bar{1}/10e$ — отрыв электрона при столкновении положительного иона с отрицательным;

$e0/\phi\bar{1}$ — радиационный захват электрона;

$10/10'$ — возбуждение при столкновении иона с атомом;

$10/01$ — перезарядка при взаимодействии иона с атомом.

Этот далеко не полный список возможных элементарных процессов, происходящих в плазме, можно использовать для расшифровки сокращенных обозначений, применяющихся в специальной литературе.

2.15. Столкновения в полностью ионизованной плазме

Если рассматривать термоядерную, т.е. полностью ионизованную, водородную, свободную от примесей плазму, то главными столкновительными процессами в ней будут процессы упругого рассеяния заряженных частиц друг на друге. Конечно, в этой плазме будут идти и ядерные реакции и рассеяние с излучением фотонов, однако соответствующие сечения значительно уступают по величине сечению так называемого «кулоновского рассеяния». Так, при температуре плазмы на уровне 10^8 K, оценки дают:

$$\sigma_{\text{изл}} / \sigma_{\text{кул}} = 10^{-5},$$

$$\sigma_{\text{яд}} / \sigma_{\text{кул}} = 0,4 \cdot 10^{-8} \quad \text{для } (D, D),$$

$$\sigma_{\text{яд}} / \sigma_{\text{кул}} = 1,5 \cdot 10^{-6} \quad \text{для } (D, T).$$

Отсюда вытекает фундаментальная роль кулоновского рассеяния в полностью ионизованной водородной плазме. Рассмотрим основные характерные черты этого процесса.

Используем полученную ранее формулу для рассеяния в центральном поле. Положив $U(r) = e^2/r$ и произведя элементарное интегрирование, получим:

$$\frac{\pi - \theta}{2} = \arccos \frac{\frac{e^2}{\mu v_{1a}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{e^2}{\mu v_{1a}^2 \rho}\right)^2}},$$

откуда

$$\rho^2 = \frac{e^4}{\mu^2 v_{1a}^4} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right).$$

Эту формулу удобно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\rho_{\perp}}{\rho},$$

где величина $\rho_{\perp} = \frac{e^2}{(\mu v_{1a}^2)}$ представляет собой значение прицельного

параметра, при котором налетающая частица рассеивается на угол 90° .

Рассмотрим движение пробной частицы — электрона — в водородной плазме с плотностью n и температурой $T_i = T_e = T$. Пусть этот электрон движется со скоростью v в некотором направлении. Обсудим вопрос о длине свободного пробега в предложенной ситуации. Поскольку кулоновское взаимодействие — процесс, обладающий дальностью действия, трудно априори установить, где пробная частица летит «свободно», а где уже началось само «столкновение». Поэтому условимся считать столкновением такое взаимодействие, при котором скорость частицы изменяется на величину порядка самой скорости. Тогда за длину свободного пробега логично будет принять расстояние, на протяжении которого такое изменение происходит

$$\frac{dx}{\lambda} = -\frac{dv}{v} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dx};$$

$$\lambda = -\frac{v}{\frac{dv}{dx}}. \quad (2.7)$$

При прохождении электроном слоя плазмы толщиной dx изменение его скорости обусловлено взаимодействием с кулоновскими центрами, расположенными на различных прицельных расстояниях. Число рассеивающих центров, находящихся в цилиндрическом кольцевом слое $(\rho, \rho + d\rho)$, равно $dx n 2\pi \rho d\rho$. Рассеяние на каждом таком центре сопровождается изменением составляющей скорости электрона вдоль исходного направления x от v до $v \cos \theta$. Умножая изменение скорости при каждом взаимодействии на число рассеивающих центров и интегрируя по всем значениям прицельного расстояния, найдем полное изменение скорости при прохождении слоя dx

$$dv = -dx n v 2\pi \int_0^{\rho_{\max}} (1 - \cos \theta) \rho d\rho.$$

Имея в виду, что $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, и сравнивая с формулой (2.7), получаем:

$$\frac{1}{\lambda} = 4\pi n \int_0^{\rho_{\max}} \sin^2 \frac{\theta}{2} \rho d\rho.$$

Переходя от угла рассеяния к прицельному параметру, переписываем последнее равенство в виде

$$\frac{1}{\lambda} = 4\pi n \int_0^{\rho_{\max}} \frac{\rho d\rho}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}} = 4\pi n \rho_{\perp}^2 \int_0^{\rho_{\max}} \frac{(\rho/\rho_{\perp}) d(\rho/\rho_{\perp})}{1 + (\rho/\rho_{\perp})^2},$$

после интегрирования имеем

$$\lambda = \frac{\left(\frac{mv^2}{e^2}\right)^2}{4\pi n \ln \left[1 + \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\perp}}\right)^2\right]}. \quad (2.8)$$

Видно, что, если интегрирование ведется по всей области, занятой плазмой (если $\rho_{\max} \rightarrow \infty$), получается бесконечное значение инте-

грала и соответственно нулевое значение длины свободного пробега. Однако реально в плазме существует явление экранирования индивидуального заряда окружающими его зарядами противоположного знака, что приводит к экспоненциальному убыванию поля данного рассеивающего центра на расстояниях, больших некоторого характерного размера, называемого радиусом Дебая. Другими словами, действие кулоновского поля от данного рассеивающего центра простирается на расстояние порядка дебаевского радиуса и практически заэкранировано на больших расстояниях. Таким образом, в качестве верхнего предела интегрирования при наших вычислениях мы можем принять размер порядка дебаевского радиуса

$$\rho_{\max} \approx \lambda_D.$$

Легко убедиться, что во всех практически интересных случаях соблюдается неравенство

$$\lambda_D \gg \rho_{\perp}.$$

Действительно, рассматриваемая пробная частица — это один из электронов плазмы. Следовательно, отождествляя величину v со средней тепловой скоростью электрона v_e и заменяя ее через

$$\left[\frac{(3kT_e)}{m} \right]^{1/2},$$

получаем:

$$\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} = \left(\frac{kT_e}{4\pi n e^2} \right)^{1/2} \frac{mv_e^2}{e^2} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k^{3/2}}{e^3} \left(\frac{T_e^3}{n} \right)^{1/2},$$

или

$$\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} = 1,2 \cdot 10^4 \frac{T_e^{3/2}}{n^{1/2}}.$$

Даже в самом крайнем случае «холодной» и плотной плазмы, скажем, при $T_e = 10^4$ К и $n = 10^{18}$ см⁻³, величина $\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} \approx 10$. Для типичного случая горячей плазмы, когда $T_e = 10^8$ К и $n = 10^{15}$ см⁻³ величина $\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}}$ достигает значения $\sim 4 \cdot 10^8$. Таким образом, в формуле (2.8) можно сделать замену

$$\ln \left[1 + \left(\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} \right)^2 \right] \approx 2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} \right).$$

Величину Λ называют кулоновским логарифмом

$$\Lambda = \ln \left(\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} \right).$$

Теперь можно переписать формулу для длины свободного пробега в виде

$$\lambda = \frac{(mv_e^2)^2}{4\pi n e^4 \Lambda}. \quad (2.9)$$

Кулоновский логарифм, будучи логарифмом большого числа, медленно меняется при изменении аргумента. Это приводит к тому, что при вариации температуры и плотности плазмы в самых широких пределах величина Λ остается практически неизменной. Так, если температура меняется от 10^5 до 10^8 К, а плотность от 10^{10} до 10^{18} см⁻³ так, что общее изменение величины $\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}}$ достигает восьми порядков, значения Λ остаются заключенными в пределах от 10 до 20. В силу этого обстоятельства в физике горячей плазмы часто принимают $\Lambda = 15$.

Проделанный анализ позволяет отчетливо выделить роль близких и далеких столкновений. Разделим далекие и близкие столкновения значением параметра $\rho_{\parallel} = 2\rho_{\perp}$. Выбор величины ρ_{\parallel} , конечно, достаточно произволен, но представляется вполне разумным. Тогда вклад близких столкновений в процессе рассеяния будет определяться значением логарифма

$$\ln \left[1 + \left(\frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} \right)^2 \right] = \ln [1 + 4] \approx 1,6,$$

а полный эффект рассеяния для плазмы с типичными параметрами — прежним выражением

$$\ln \left[1 + \left(\frac{\lambda_D}{\rho_{\perp}} \right)^2 \right] = 2\Lambda = 30.$$

Таким образом, доминирующая роль далеких столкновений несомненна. Напомним, что сделанное при выводе допущение о неподвижности рассеивающих центров означает, что формула (2.9) описывает случай электрон-ионного взаимодействия. Отмечать это обстоятельство будем, приписывая индекс ei у символа длины пробега.

В предположении распределения электронов по энергиям в формуле (2.9) следует перейти от тепловой скорости к электронной температуре T_e . Выполнив усреднение по энергетическому спектру электронов и подставив численные значения констант, получим длину свободного пробега для свободного электрона в плазме

$$\lambda_{ei} = 4,5 \cdot 10^5 \frac{T_e^2}{n \Lambda},$$

где T_e измерено в эВ, n — в см^{-3} , λ — в см.

Для характеристики процессов столкновения между электронами и ионами помимо средней длины свободного пробега можно ввести еще несколько величин:

сечение

$$\sigma_{ei} = \frac{1}{n\lambda_{ei}},$$

среднее время между столкновениями

$$\tau_{ei} = \lambda_{ei} / v_e.$$

Полагая $\Lambda = 15$, получаем:

$$\lambda_{ei} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{T_e^2}{n};$$

$$\sigma_{ei} \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{T_e^2};$$

$$\tau_{ei} \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{n};$$

$$v_{ei} \approx 20 \frac{n}{T_e^{3/2}}.$$

Столкновения между электронами и ионами играют основную роль среди различных видов взаимодействия частиц в плазме, определяя, в частности, механизм таких процессов, как протекание электрического тока и диффузию. Для полной характеристики кулоновского взаимодействия частиц в плазме следует ввести также параметры, определяющие эффект столкновений между идентичными частицами ($e-e, i-i$). В этом случае расчет усложняется тем, что при анализе элементарных актов столкновения нужно учитывать движение рассеивающих центров. Впрочем, учет этого обстоятельства может отразиться только на величине численного коэффициента в формулах для

средней длины свободного пробега, тогда как температурная зависимость должна иметь одинаковый характер

$$\frac{\tau_{ii}}{\tau_{ee}} = \left(\frac{m_i T_i^3}{m_e T_e^3} \right)^{1/2}.$$

При равенстве электронной и ионной температур ион-ионные столкновения происходят гораздо реже, чем электрон-электронные или электрон-ионные.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10-ти т. Т.1. Механика. — М.: Физматлит, 2001. — 224 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10-ти т. Т.2. Теория поля. — М.: Физматлит, 2001. — 536 с.
3. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. — М.: Наука, 1969. — 910 с.
4. Хастед Дж. Физика атомных столкновений: Пер. с англ./ Ред. Н.В. Федоренко. М.: — Мир, 1965. — 710с.
5. Мак-Даниель И. Процессы столкновений в ионизованных газах: Пер. с англ./ Ред. Л.А. Арцимович. — М.: Мир, 1967. — 832с.
6. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1972. — 316 с.
7. Смирнов Б.М. Введение в физику плазмы. — М.: Наука, 1975. — 174 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Система уравнений Максвелла-Лоренца. Потенциалы электромагнитного поля. Калибровочная инвариантность потенциалов.
2. Энергия и импульс электромагнитного поля. Законы сохранения энергии и импульса.
3. Электростатическое поле. Потенциал поля системы точечных зарядов. Дипольное и квадрупольное приближения. Дипольный и квадрупольный моменты системы.
4. Квазистационарное магнитное поле. Магнитный момент системы зарядов.
5. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов. Решение уравнения Даламбера. Запоздавающие и опережающие потенциалы.
6. Излучение электромагнитных волн. Дипольное излучение. Ширина излучаемых линий, реакция излучения. Волновая и квазистатическая зона.
7. Распространение электромагнитных волн в вакууме. Поляризация плоской волны. Рассеяние электромагнитных волн зарядами. Дисперсионная формула. Релеевское рассеяние. Формула Томсона. Поглощение излучения.
8. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Фокусировка частиц. Дрейф. Магнитное зеркало.
9. Взаимодействие двух заряженных частиц. Запрещенные и допустимые области движения. Возможные траектории движения.
10. Рассеяние частиц. Сечение рассеяния. Прицельный параметр. Формула Резерфорда. Тормозное излучение.
11. Классический подход в теории столкновений. Потенциальная энергия взаимодействия между электроном и атомом и между атомными системами.
12. Описание движения сталкивающихся частиц. Системы координат.
13. Взаимодействие непроницаемых сфер.
14. Квантовый подход к теории столкновений. Борновское и ВКБ-приближения.
15. Особенности и характеристики основных экспериментальных методов изучения столкновения частиц.
16. Кулоновское рассеяние в полностью ионизованной плазме. Далекие и близкие столкновения. Кулоновский логарифм. ii , ei , ee — столкновения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ | 3 |
| 1.1. Система уравнений Максвелла..... | 3 |
| 1.2. Потенциалы электромагнитного поля..... | 5 |
| 1.3. Энергия электромагнитного поля..... | 8 |
| 1.4. Импульс электромагнитного поля..... | 10 |
| 1.5. Электростатическое поле..... | 12 |
| 1.6. Поле системы точечных зарядов..... | 13 |
| 1.7. Работа и энергия в электростатическом поле..... | 15 |
| 1.8. Магнитное поле постоянного тока..... | 17 |
| 1.9. Поле одиночного заряда, движущегося равномерно..... | 18 |
| 1.10. Магнитный момент..... | 19 |
| 1.11. Поле системы произвольно движущихся зарядов..... | 21 |
| 1.12. Дипольное приближение..... | 26 |
| 1.13. Излучение диполя..... | 29 |
| 1.14. Дипольное излучение одиночного заряда..... | 30 |
| 1.15. Плоская электромагнитная волна..... | 31 |
| 1.16. Поляризация плоской волны..... | 32 |
| 1.17. Интерференция волн. Волновой пакет..... | 33 |
| 1.18. Рассеяние электромагнитных волн..... | 35 |
| 1.19. Поглощение излучения..... | 37 |
| 1.20. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях..... | 39 |
| 1.21. Движение заряженных частиц в медленно изменяющихся магнитных полях..... | 42 |
| 1.22. Взаимодействие двух заряженных частиц..... | 45 |
| 1.23. Рассеяние частиц..... | 47 |
| 1.24. Излучение при рассеянии..... | 51 |
| 2. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ..... | 53 |
| 2.1. Эффективные сечения столкновений и коэффициенты скоростей реакций..... | 53 |
| 2.2. Теоретические подходы в теории столкновений..... | 56 |
| 2.3. Потенциальная энергия взаимодействия между электроном и атомом..... | 57 |
| 2.4. Потенциальная энергия взаимодействия между атомными системами..... | 59 |
| 2.5. Переходы в двухатомных молекулах. Принцип Франка—Кондона..... | 61 |
| 2.6. Системы координат и энергетические соотношения..... | 62 |
| 2.7. Потери энергии при столкновениях упругих непроницаемых сфер..... | 64 |
| 2.8. Классическое приближение парных столкновений для некоторых неупругих процессов..... | 66 |
| 2.9. Классическая теория упругого рассеяния в центральном поле..... | 67 |
| 2.10. Квантовый подход к теории столкновений..... | 69 |
| 2.11. Борновское приближение..... | 71 |
| 2.12. ВКБ-приближение..... | 72 |
| 2.13. Экспериментальные методы физики атомных столкновений..... | 73 |
| 2.14. Некоторые возможные элементарные процессы в плазме..... | 74 |
| 2.15. Столкновения в полностью ионизованной плазме..... | 75 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... | 81 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ..... | 82 |

Учебное издание

**Белокопытов Владимир Матвеевич
Кулыгин Владимир Михайлович**

Элементы теории термоядерной плазмы

Учебное пособие

по курсам

«Электродинамика систем заряженных частиц»,

«Физика плазмы»

для студентов, обучающихся по направлению

«Техническая физика»

Редактор издательства **О.М. Горина**

Темплан издания МЭИ 2005(П), учебн. Подписано в печать 18.10.05

Печать офсетная Формат 60×84/16 Физ. печ. л. 5,25

Тираж 200 Изд. № 40 Заказ 461г Цена 16 руб.

Издательство МЭИ, 11250, Москва, Красноказарменная ул. Д. 14

Отпечатано в ООО «Типография-Н» 141292, Московская обл., г. Красноармейск, просп. Испытателей, д. 25/2