Пусть поле $\mathbf{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ имеет нулевой ротор $\partial E_x/\partial y - \partial E_y/\partial x = 0$. Доказать, что такое поле является градиентом, то есть существует $\phi(x, y)$, такое что $E_x = -\partial\phi/\partial x$, $E_y = -\partial\phi/\partial y$. Hint: попробовать $\phi(x, y) = -\int_0^x E_x(x', y)\,dx' + f(y)$.

Доказать, что поле $\mathbf{B} = (1 - v^2/c^2)q\mathbf{v} \times \mathbf{r}/r'^3$, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $r'^2 = x^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)$ (магнитное поле равномерно движущегося вдоль оси x заряда) имеет нулевую дивергенцию $\nabla\mathbf{B} = 0$. Нарисуйте линии этого поля.

Вычислите $\nabla \times (\mathbf{p}/r)$ при $r \neq 0$, $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$.

Вычислите $\nabla(\mathbf{p} \times \mathbf{r}/r^3)$ при $r \neq 0$, $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$.

Вычислите $\nabla \times (\mathbf{p} \times \mathbf{r}/r^3)$ при $r \neq 0$, $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$.

Вычислите $\nabla\dfrac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}$ при $r \neq 0$, $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$.

Вычислите $\nabla \times \dfrac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}$ при $r \neq 0$, $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}|$.

Вычислите $\nabla(xy)$. Нарисуйте линии полученного векторного поля в плоскости xy.

Вычислите $\nabla(x^2+y^2-2z^2)$. Нарисуйте линии полученного векторного поля в плоскости xz.

Вычислите $\nabla \times (xy\mathbf{e}_z)$. Нарисуйте линии полученного векторного поля в плоскости xy.

Вычислите $\nabla(x(x^2 + y^2 - 4z^2))$. Нарисуйте линии полученного векторного поля в плоскости xz.

Пусть поле $\mathbf{B} = (B_x(x, y), B_y(x, y))$ имеет нулевую дивергенцию $\partial B_x/\partial x + \partial B_y \partial y = 0$. Доказать, что такое поле является ротором, то есть существует $A_z(x, y)$, такое что $B_x = \partial A_z/\partial y$, $B_y = -\partial A_z/\partial x$. Hint: попробовать $A_z(x, y) = \int_0^y B_x(x, y')\, dy' + f(x)$.

С помощью уравнений Максвелла для постоянных полей $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ преобразуйте силу, действующую на заряженное тело, из интеграла по объему $\int_G \rho\mathbf{E}\, d^3r$ к интегралу по поверхности $\int_S \mathbf{N}\, dS$. Получите выражение для $\mathbf{N}$.

С помощью уравнений Максвелла для постоянных полей $\nabla\mathbf{B} = 0$, $c^2\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0$ преобразуйте силу, действующую на тело с текущими по нему токами, из интеграла по объему $\int_G \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, d^3r$ к интегралу по поверхности $\int_S \mathbf{N}\, dS$. Получите выражение для $\mathbf{N}$.

Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — два векторных поля. Преобразуйте $\nabla(\mathbf{EB})$ к сумме слагаемых, в каждом из которых дифференцируется только одно из полей.

Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — два векторных поля. Преобразуйте $\nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ к сумме слагаемых, в каждом из которых дифференцируется только одно из полей.

Преобразуйте интеграл по замкнутой поверхности $\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$ в интеграл по ограниченному этой поверхностью объему. Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, $\mathbf{B}$ — произвольное векторное поле.

Доказать, что поле вида $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r)$, где $\mathbf{e}_r$ и r — единичный радиальный вектор и радиальная координата в цилиндрической системе координат, имеет нулевой ротор $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Hint: используйте связь с декартовыми координатами $\mathbf{e}_r = (x/r, y/r, 0)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Нарисуйте линии этого поля.

Доказать, что поле вида $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$ имеет нулевой ротор $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Нарисуйте линии этого поля.

Доказать, что поле вида $\mathbf{B} = (0, B(z), 0)$ имеет нулевую дивергенцию $\nabla \mathbf{B} = 0$. Нарисуйте линии этого поля.

Доказать, что поле вида $\mathbf{B} = (0, 0, B(x, y))$ имеет нулевую дивергенцию $\nabla \mathbf{B} = 0$. Нарисуйте линии этого поля.

Доказать, что поле вида $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\phi B(r, z)$, где $\mathbf{e}_\phi$, r, z — единичный азимутальный вектор, радиальная и вертикальная координаты в цилиндрической системе координат, имеет нулевую дивергенцию $\nabla \mathbf{B} = 0$. Hint: используйте связь с декартовыми координатами $\mathbf{e}_\phi = (-y/r, x/r, 0)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Нарисуйте линии этого поля.

Доказать, что поле $\mathbf{E} = (1 - v^2/c^2)q\mathbf{r}/r'^3$, $r'^2 = x^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)$ (электрическое поле равномерно движущегося вдоль оси x заряда) имеет нулевую дивергенцию $\nabla \mathbf{E} = 0$ везде, кроме начала координат. Нарисуйте линии этого поля.

Стержень длины l заряжен с линейной плостность λ. Найти электрическое поле на серединном перпендикуляре к стержню на расстоянии a от стержня. Получить приближенное выражение для $a \gg l$.

Два полубесконечных коаксиальных цилиндра с радиусами R_1 и R_2 замкнуты с торца кольцом (с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2). По внутреннему цилиндру течет ток I, растекается по кольцу и течет в обратном направлении по внешнему цилиндру. Найти поле во всем пространстве.

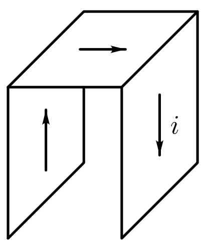
По двум лежащим в одной плоскости концентрическим кольцам радиусами R_1 и R_2 текут одинаковые токи I в противоположные стороны. Найти магнитное поле на оси z колец, построить график. Нарисовать качественно картину силовых линий поля в плоскости, проходящей через ось z.

Найти магнитное поле в фокусе эллипса, по которому течет ток I. Hint: запишите закон Био—Савара через интеграл по полярному углу и воспользуйтесь уравнением эллипса в полярных координатах $p/r = 1 + e\cos\phi$, p — параметр, $0 < e < 1$ — эксцентриситет эллипса.

Найти магнитное поле в фокусе параболы, по которой течет ток I. Hint: запишите закон Био—Савара через интеграл по полярному углу и воспользуйтесь уравнением параболы в полярных координатах $p/r = 1 + \cos\phi$, p — параметр.

Найти магнитное поле в фокусе ветви гиперболы, по которой течет ток I. Hint: запишите закон Био—Савара через интеграл по полярному углу и воспользуйтесь уравнением гиперболы в полярных координатах $p/r = 1 + e\cos\phi$, p — параметр, $e > 1$ — эксцентриситет гиперболы, $e\cos\phi > -1$.

По бесконечной плоскости течет ток с линейной плотностью i. Плоскость согнули в форме буквы "П", сгибы перпендикулярны току. Найдите магнитное поле во всем пространстве. Hint: воспользуйтесь соображениями симметрии.



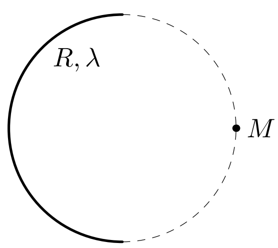
Ток I течет по полубесконечному прямому проводу и растекается во все стороны по припаянной к его концу, перпендикулярно проводу, бесконечной плоскости. Найти магнитное поле во всем пространстве. Hint: воспользуйтесь соображениями симметрии.

В квадрате ABCD ток I течет по сторонам AB, BC и диагонали CA. Длина стороны квадрата a. Найдите магнитное поле в вершине D.

Ток I равномерно распределен по тороидальному соленоиду произвольного сечения. Найти магнитное поле во всем пространстве. Hint: воспользуйтесь соображениями симметрии.

Система состоит из двух витков радиуса R на одной оси на расстоянии R друг от друга (катушки Гельмгольца). По виткам текут равные по величине и одинаково направленные токи I. Найти магнитное поле на оси системы. Нарисовать график. Получить разложение поля на оси системы вблизи центра системы.

Половина кольца радиуса R заряжена с линейной плотностью λ. Найдите электрическое поле в середине незаряженной половины кольца (точка M).



Система состоит из двух витков радиуса R на одной оси на расстоянии $R\sqrt{3}$ друг от друга (градиентные катушки Гельмгольца). По виткам текут равные по величине и противоположно направленные токи I. Найти магнитное поле на оси системы. Нарисовать график. Получить разложение поля на оси системы вблизи центра системы.

Доказать, что эквипотенциальная поверхность $\phi = 0$ системы двух разных по величине точечных зарядов противоположных знаков является сферой. Найти ее радиус и положение центра, если расстояние между зарядами d, а величины зарядов q_1 и $-q_2$.

Найти уравнение эквипотенциальных поверхностей системы двух параллельных нитей, заряженных линейными плотностями λ и $-\lambda$, определить форму поверхностей. Расстояние между нитями равно d.

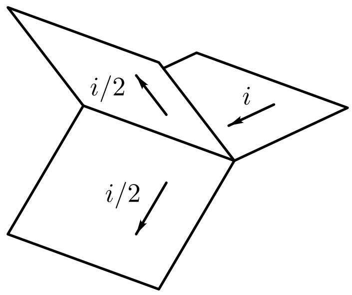
В квадрате ABCD стороны AB, BC и CD заряжены с линейной плотностью λ. Найти электрическое поле и потенциал в середине стороны AD. Длина стороны квадрата a.

В равномерно заряженном с объемной плотностью ρ шаре радиуса R сделана шаровая полость радиуса r, центр ее отстоит от центра шара на $a < R - r$. Найдите электрическое поле в полости. Hint: воспользуйтесь принципом суперпозиции.

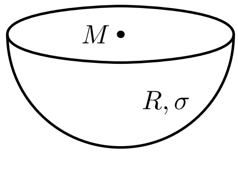
В равномерно заряженном с объемной плотностью ρ бесконечно длинном цилиндре радиуса R сделана бесконечно длинная цилиндрическая полость радиуса r. Ось полости параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на $a < R - r$. Найдите электрическое поле в полости. Hint: воспользуйтесь принципом суперпозиции.

Бесконечная пластина $0 < z < d$, z — ось координат, перпендикулярная к пластине, заряжена с объемной плотностью $\rho(z) = \rho_0 z/d$. Найти электрическое поле в пластине и вне нее.

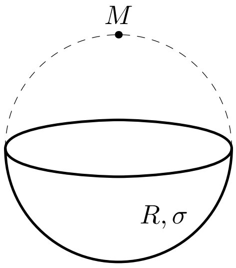
Три полуплоскости состыкованы своими краями и составляют углы 120 градусов друг с другом. Ток с плотностью i течет по одной из полуплоскостей (перпендикулярно линии стыка) и разделяется пополам между двумя другими полуплоскостями. Найти поле во всем пространстве.



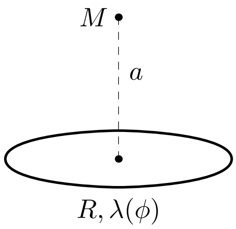
Найти электрическое поле в центре полусферы радиуса R (точка M), заряженной с поверхностной плотностью σ.



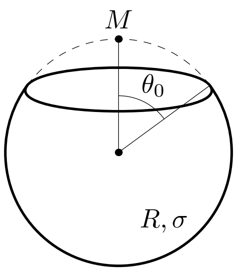
Половина сферы радиуса R заряжена с поверхностной плотностью σ. Найти электрическое поле в середине незаряженной половины сферы (точка M).



Кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$, ϕ — полярный угол. Найти электрическое поле на оси кольца на расстоянии a от центра (точка M). Вычислите дипольный момент кольца.



Сферический сегмент $\theta_0 < \theta < \pi$ (θ — сферический угол) сферы радиуса R заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти электрическое поле в центре незаряженного сегмента (точка M). Найти предел поля при $\theta_0 \to 0$.



Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, где θ — сферический угол. Найти электрическое поле в центре сферы.

Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \sin\theta \cos\phi$, где θ, ϕ — сферические углы. Найти электрическое поле в центре сферы.

Пусть A, B, C, D — вершины куба на верхней грани, а A', B', C', D' — соответствующие вершины на нижней грани. Ток I течет по ребрам AB, BC, CC', C'D', D'A', A'A. Найдите магнитное поле в центре куба. Длина ребра куба a.

Точечный заряд e движется по окружности радиуса a со скоростью $v \ll c$. Определить поляризацию и угловое распределение излучения.

Оценить скорость потерь энергии на излучение для электрона в атоме водорода, движущегося по орбите радиусом 0.053 нм (боровский радиус).

Тело с магнитным моментом p_m вращается вокруг оси, составляющей с направлением магнитного момента угол ψ, с угловой скоростью ω. Определить тип создаваемого излучения и найти поляризацию излучения и угловое распределение интенсивности.

Два одинаковых точечных заряда e совершают гармонические колебания с частотой ω и амплитудой a ($\omega a \ll c$) вдоль оси z со сдвигом по фазе, равным π. Определить тип создаваемого излучения и найти угловое распределение интенсивности. Warning: учтите, что изменяющаяся плотность заряда невозможна без тока.

Электрический заряд в некоторой малой области распределен сферически-симметрично и совершает радиальные колебания. Чему равны электрическое и магнитное поля вне заряда?

Магнитный момент некоторого тела осциллирует с частотой ω и амплитудой p_m, оставаясь все время направленным по оси z. Определить тип создаваемого излучения и найти поляризацию излучения и угловое распределение интенсивности.

Электрический заряд распределен по отрезку $[-a, a]$ оси z, а линейная плотность его меняется по закону $\lambda(z,t) = \lambda_0 \cos\omega t \sin \pi z/a$, $\omega a \ll c$. Определить тип создаваемого излучения и найти поляризацию излучения и угловое распределение интенсивности.

Электрический заряд распределен по кольцу радиуса a, а линейная плотность его меняется по закону $\lambda(\phi,t) = \lambda_0 \cos(\omega t - \phi)$, $\omega a \ll c$, ϕ — полярный угол. Определить тип создаваемого излучения и найти поляризацию излучения и угловое распределение интенсивности.

Электрический заряд распределен по кольцу радиуса a, а линейная плотность его меняется по закону $\lambda(\phi,t) = \lambda_0 \cos\omega t \sin\phi$, $\omega a \ll c$, ϕ — полярный угол. Определить тип создаваемого излучения и найти поляризацию излучения и угловое распределение интенсивности.

Пучок протонов движется по окружности в цилиндрическом конденсаторе. Во сколько раз нужно изменить разность потенциалов на конденсаторе, чтобы по той же окружности с той же скоростью мог двигаться пучок альфа-частиц?

Какая сила тока должна создаваться в столбе газового разряда радиусом $R = 3$ см, чтобы электроны не могли удалиться с поверхности столба более чем на $a = 30$ мкм? Температура в разряде $T = 10^8$ K. Hint: по температуре можно оценить тепловую скорость электронов.

Магнитное поле всюду направлено по оси z, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, в области $x < 0$ $B_z = B_1$, в области $x > 0$ $B_z = B_2$. Электрон влетает в область $x > 0$ со скоростью v, направленной по оси x. Нарисовать качественно траекторию электрона, если $B_1 B_2 < 0$, $|B_1| > |B_2|$.

Магнитное поле всюду направлено по оси z, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, в области $x < 0$ $B_z = B_1$, в области $x > 0$ $B_z = B_2$. Электрон влетает в область $x > 0$ со скоростью v, направленной по оси x. Нарисовать качественно траекторию электрона, если $B_1 B_2 > 0$, $|B_1| > |B_2|$.

Магнитное поле всюду направлено по оси z, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, в области $x < 0$ $B_z = B_1$, в области $x > 0$ $B_z = B_2$. Электрон влетает в область $x > 0$ со скоростью v, направленной по оси x. Нарисовать качественно траекторию электрона, если $B_1 B_2 > 0$, $|B_1| < |B_2|$.

Рассчитать дифференциальное сечение рассеяния на твердой сфере радиуса a.

Вывести формулу для сечения рассеяния в слабом центральном поле. Рассчитать с ее помощью дифференциальное сечение на малые углы в поле

$$U(r) = \begin{cases} U_0(1 - r/a), & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Hint: вычислить следующее приближение к $x = vt$, $y = \rho$ для рассеяния быстрых частиц.

Рассчитать дифференциальное сечение рассеяния в поле $U(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

По прямому цилиндрическому проводнику радиусом a точет ток I. С поверхности проводника начинает двигаться электрон с начальной скоростью v вдоль оси проводника. На какое максимальное расстояние от оси проводника он сможет удалиться?

Электрон влетел в плоский конденсатор со скоростью $v = 10^7$ м/с, направленной параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора скорость составляла угол $\alpha = 35°$ с первоначальным направлением. Определить разность потенциалов между пластинами, если длина пластин $l = 10$ см и расстояние между ними $d = 2$ см.

Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость $v = 10^7$ м/с, направленную параллельно пластинам. Расстояние между пластинами $d = 2$ см, длина $l = 10$ см. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

На какое минимальное расстояние может сблизиться протон с альфа-частицей, если начальная скорость протона равна $v = 300$ км/с и направлена прямо на альфа-частицу, альфа-частица покоится, а начальное расстояние между протоном и альфа-частицей велико?

На какое минимальное расстояние может приблизиться позитрон к ядру атома лития, если он прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 60$ кВ, а прицельное расстояние $\rho = 10^{-10}$ м?

Два электрона сближаются с относительной скоростью $v = 10^7$ м/с и прицельным расстоянием $\rho = 1$ нм. На какое минимальное расстояние они сближаются?

В верхней части проводящей сферы радиуса R проделано небольшое отверстие, в которое с высоты h падают капли массой m и зарядом q. До какого потенциала может в итоге зарядиться сфера?

Электрон движется в цилиндрическом конденсаторе по окружности со скоростью v. С какой скоростью должен двигаться протон по той же траектории?