Электродинамика

1 Вводные замечания

1.1 Системы координат

Для описания положения точки в пространстве нужно ввести какую-либо систему координат. Ниже мы рассмотрим наиболее употребительные системы.

Декартова система координат. Положение точки описывается координатами x, y, z.

Элемент объема $dV = dx\,dy\,dz$. Элементы площади на плоскостях xy, xz, yz равны $dS = dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dz$ соответственно. Элемент длины $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Декартова система координат бывает "левая" и "правая", они отличаются именованием осей. В "правой" системе координат оси x, y, z образуют *правую тройку*, то есть если вращать винт с правой резьбой от оси x в сторону оси y по кратчайшей дуге, то винт будет ввинчиваться по направлению оси z. Мы будем использовать только "правые" системы координат.

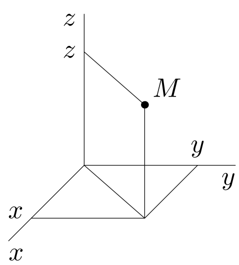

Рис. 1: "Правая" декартова система координат

Полярная система координат (на плоскости). Положение точки описывается координатами r, ϕ.

Связь с декартовыми координатами

$$x = r\cos\phi,$$
$$y = r\sin\phi.$$

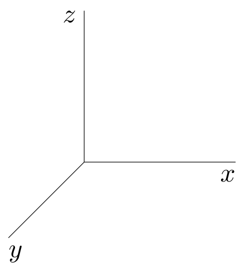

Рис. 2: “Левая” (не будем пользоваться)

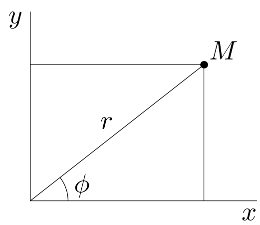

Рис. 3: Полярная система координат

Элемент площади $dS = r\,dr\,d\phi$. Элемент длины $dl^2 = dr^2 + r^2\,d\phi^2$.

Цилиндрическая система координат (в пространстве). Положение точки описывается координатами r, ϕ, z.

Связь с декартовыми координатами такая же, как для полярной системы координат.

Элемент объема $dV = r\,dr\,d\phi\,dz$. Элементы площади на координатных плоскостях $r\phi$, rz и цилиндрической поверхности ϕz равны $dS = r\,dr\,d\phi$, $dr\,dz$, $r\,d\phi\,dz$. Элемент длины $dl^2 = dr^2 + r^2\,d\phi^2 + dz^2$.

Сферическая система координат. Положение точки описывается координатами r, θ, ϕ. Связь с декартовыми координатами

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Элемент объема $dV = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$. Элементы площади на сфере $\theta\phi$, плоскости $r\theta$, конусе $r\phi$ равны $dS = r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$, $r\,dr\,d\theta$, $r\sin\theta\,dr\,d\phi$. Элемент длины $dl^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2$.

Выбор той или иной системы координат диктуется соображениями удобства.

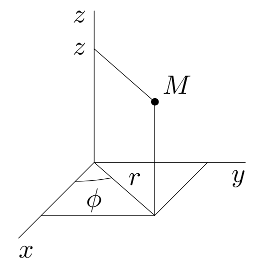

Рис. 4: Цилиндрическая система координат

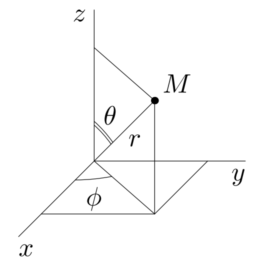

Рис. 5: Сферическая система координат

Немного математики. Операции над векторами. Вектор $\mathbf{b}$ характеризуется своими проекциями на оси некоторой декартовой системы координат, в нашем случае тройкой (b_x, b_y, b_z). При замене системы координат проекции изменяются по определенным правилам, которые следуют из геометрической интерпретации вектора.

Домашнее задание. Написать формулы преобразования проекций вектора $\mathbf{b}$ при повороте системы координат на угол ϕ вокруг оси z. Ответ:

$$\begin{cases} b_{x'} = b_x \cos\phi + b_y \sin\phi, \\ b_{y'} = -b_x \sin\phi + b_y \cos\phi. \end{cases}$$

Для векторов определены умножение на число, сложение, скалярное и векторное произведения.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *произведением вектора* $\mathbf{b}$ *на число* a, если

$$c_x = ab_x, \quad c_y = ab_y, \quad c_z = ab_z$$

(записывается $\mathbf{c} = a\mathbf{b}$).

Вектор $\mathbf{c}$ называется *суммой векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z$$

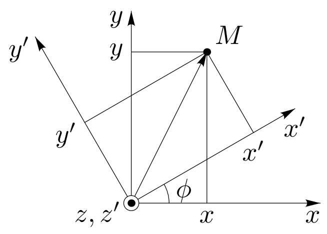

Рис. 6: Поворот системы координат

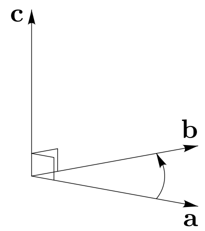

Рис. 7: Векторное произведение

(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$).

Число c называется *скалярным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(записывается $c = \mathbf{ab}$, иногда применяются обозначения $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ или $c = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$). Как вас учили в школе, величина скалярного произведения равна произведению модулей векторов на косинус угла между ними. В частности, скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *векторным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, если

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, иногда встречается обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или даже $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$). Правила расстановки индексов в этих на первый взгляд сложных формулах на самом деле просты. Первые три индекса (индекс в левой части и индексы в первом произведении в правой части) всегда идут в порядке $x \to y \to z \to x$. Индексы во втором произведении в правой части получаются перестановкой индексов в первом произведении. Отметим, что эти формулы справедливы только для "правой" системы координат ("левые" мы уже договорились не использовать). Геометрически вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а его направление определяется правилом правого винта: если крутить винт от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$, то он будет ввинчиваться по направлению вектора $\mathbf{c}$. Абсолютная же величина вектора $\mathbf{c}$ равна произведению модулей векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на синус угла между ними. В частности, векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю.

Перечисленные нами операции над векторами являются инвариантными, то есть выполняются по одним и тем же правилам в любой декартовой системе координат.

Домашнее задание. Это очевидно для умножения на число и сложения в силу линейности преобразования от одной декартовой системы координат к другой. Докажите это для скалярного и векторного произведений.

Немного математики. Дифференциальные уравнения. Уравнения, связывающие функцию и ее производные, называются *дифференциальными уравнениями*. Так, содержание второго закона Ньютона в том, что движение тел можно описывать такими уравнениями. В данном случае это уравнения *второго порядка*, потому что в них входит вторая производная (а третья уже не входит). Математики объяснят вам, что решение дифференциального уравнения неединственно: оно содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. В нашем случае их две. Чтобы определить эти постоянные и однозначно зафиксировать решение, мы должны задать *начальные условия*

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

— начальные координаты и скорости в момент времени $t = 0$. Совокупность уравнения и начальных условий

$$\begin{aligned} &m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ &\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

называется *задачей Коши*. Решение задачи Коши уже единственно и описывает движение материальной точки под действием заданной силы при заданных начальных условиях.

2 Понятие электромагнитного поля

Вы уже изучали механические системы. Состояние механической системы описывается *конечным* числом координат и скоростей, зависящих от одного параметра — времени t. В этом семестре мы будем изучать принципиально новый физический объект — *электромагнитное поле* (ЭМ поле). Его состояние описывается двумя векторами $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (векторами *напряженности электорического поля* и *индукции магнитного поля*), которые зависят не только от времени t, но и от пространственных координат x, y, z, то есть от четырех переменных. Зависимость от координат можно наглядно представить следующим образом. Введем в рассматриваемой области пространства сетку с каким-либо шагом (скажем, 1 см). Тогда значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в узлах сетки (если рассматриваемая область пространства конечна, то их конечное число) дают некое огрубленное представление об ЭМ поле. Уменьшая шаг сетки (одновременно увеличивается число узлов), можно получать все более и более точное описание ЭМ поля. С этой точки зрения поле является системой *с бесконечным числом степеней свободы*, аналогично жидкости или твердому телу, когда их рассматривают как сплошную среду.

В механике основной закон движения — второй закон Ньютона — представлял из себя дифференциальное уравнение. Поскольку в механике независимая переменная всего одна (время t), то это было *обыкновенное* дифференциальное уравнение. Поскольку величины, описывающие ЭМ поле, зависят от четырех независимых переменных, то уравнения движения ЭМ поля (уравнения Максвелла) — это уравнения в *частных производных*, наряду с производными по времени в них входят и производные по координатам x, y, z.

С физической точки зрения ЭМ поле реализует концепцию *близкодействия*. В механике сила, действующая на частицу в данный момент времени, зависит от ее положения и скорости, а также от положений и скоростей остальных частиц системы в данный момент времени. Если какая-то из частиц системы сместилась, остальные “чувствуют” это мгновенно, как бы далеко они не находились. О таком положении вещей говорят как о *дальнодействии.*

Ниже мы увидим, что ЭМ поле создается электрическими зарядами и действует на электрические заряды, то есть в уравнения Максвелла входят координаты и скорости заряженных частиц, а в уравнения движения заряженных частиц — поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Уравнения в частных производных, которыми описывается ЭМ поле, обладают следующим важным свойством. Изменение состояния поля в какой-либо области пространства, вызванное движением зарядов, приводит к появлению возмущения (*ЭМ волны*), которое распространяется в другие области с конечной скоростью и действует на находящиеся в тех областях заряды. С этой точки зрения ЭМ поле является посредником при взаимодействии заряженных частиц.

2.1 Векторный анализ

Как мы уже сказали, уравнения ЭМ поля — это уравнения в частных производных, то есть в них входят конструкции типа $\partial E_x/\partial y$. Как и в векторной алгебре, особое значение имеют инвариантные дифференциальные операции, то есть такие операции, вид которых не зависит от системы координат.

Градиент. С этой операцией мы уже встречались в механике. Пусть дано скалярное поле $\phi(x, y, z)$. (Это означает, что при замене координат $(x, y, z) \to (x', y', z')$ само поле не меняется $\phi(x, y, z) = \phi(x', y', z')$.) Тогда производные $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ образуют вектор

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \operatorname{grad}\phi = \nabla\phi,$$

который называют еще *градиентом* скалярного поля ϕ (справа написаны два наиболее употребительных обозначения градиента).

Домашнее задание. Проверить, что частные производные $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ при повороте системы координат действительно преобразуются как компоненты вектора.

Обратная операция — восстановление поля по градиенту — выглядит так

$$\int_{AB} (\nabla\phi)_\tau \, dl = \phi(B) - \phi(A).$$

Интегрирование идет по любой кривой, соединяющей точки A и B, величина интеграла от этого не зависит. τ — вектор касательной к кривой, направленный от A к B.

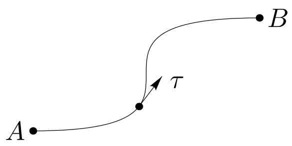

Рис. 8: Восстановление функции по градиенту

Дивергенция. Пусть задано векторное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. [Это означает, что при замене координат E_x, E_y, E_z преобразуются как компоненты вектора. Например, при преобразовании (вращение на угол ϕ вокруг оси z)

$$\begin{cases} x' = x\cos\phi + y\sin\phi, \\ y' = -x\sin\phi + y\cos\phi, \\ z' = z \end{cases}$$

компоненты $\mathbf{E}$ преобразуются по закону

$$\begin{cases} E_{x'}(x', y', z') = E_x(x, y, z)\cos\phi + E_y(x, y, z)\sin\phi, \\ E_{y'}(x', y', z') = -E_x(x, y, z)\sin\phi + E_y(x, y, z)\cos\phi, \\ E_{z'}(x', y', z') = E_z(x, y, z). \end{cases}$$

Обратите внимание, что преобразуются и компоненты вектора, и координаты, от которых они зависят.]

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ называется скалярная величина

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Домашнее задание. Проверить, что дивергенция действительно является скаляром, то есть при повороте системы координат

$$\left(\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}\right)(x', y', z') = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)(x, y, z).$$

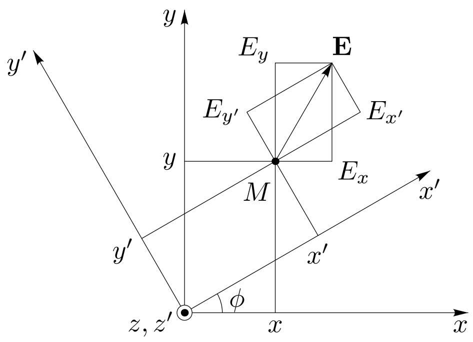

Рис. 9: Преобразование векторного поля при повороте

Восстановить поле по дивергенции, очевидно, нельзя, однако справедлива *теорема Гаусса*

$$\int_G \nabla \mathbf{E}\, d^3 r = \int_{\partial G} E_n\, dS.$$

Здесь G — произвольная область, ∂G — граница этой области. Нормаль $\mathbf{n}$ должна быть внешней. Доказательство теоремы Гаусса стребуете у математиков.

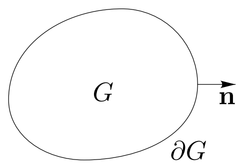

Рис. 10: К теореме Гаусса

Оператор Лапласа (лапласиан). Если есть скалярное поле $\phi(\mathbf{r})$, то можно вычислить сперва градиент, а затем дивергенцию. Результирующую операцию называют *оператором Лапласа* или *лапласианом*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2 \phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Чаще всего для лапласиана используют обозначение Δ.

Домашнее задание. Проверить, что при последовательном вычислении градиента и дивергенции действительно получается выражение $\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + \partial^2\phi/\partial z^2$. Показать, что это выражения является скаляром.

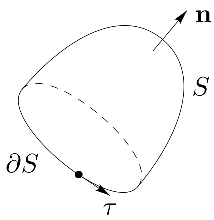

Рис. 11: К теореме Стокса

Оператор Лапласа можно применять и к вектору. Запись $\Delta\mathbf{E}$ означает вектор с компонентами

$$\Delta\mathbf{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z).$$

Домашнее задание. Проверить, что это действительно вектор. Вообще, оператор Лапласа представляет собой "скаляр": к какому объекту его ни примени, трансформационные свойства объекта не меняются.

Уравнение $\Delta\phi = 0$ называют *уравнением Лапласа*, а уравнение $\Delta\phi = \rho$ — *уравнением Пуассона.* При разумных дополнительных условиях (все-таки уравнение дифференциальное) уравнение Пуассона разрешимо, так что оператор Лапласа обратим.

Ротор. Для векторного поля существует еще одна инвариантная дифференциальная операция. *Ротором* векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

(Вы несомненно увидели аналогию с векторным произведением).

Домашнее задание. Показать, что это действительно вектор.

Восстановить поле по ротору нельзя, но справедлива *теорема Стокса*

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{E})_n\, dS = \int_{\partial S} E_\tau\, dl.$$

Здесь S — произвольная поверхность, ∂S — граница этой поверхности, а нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности связана с касательным вектором τ к границе правилом правого винта.

Оказывается, что по заданным дивергенции и ротору можно восстановить и само поле (с точностью до постоянной, конечно).

Четыре теоремы. Справедливы утверждения

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0,\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,\\
&\text{Если } \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \text{ то } \mathbf{E} = -\nabla\phi,\\
&\text{Если } \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \text{ то } \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Первые два утверждения можно, используя теоремы Стокса и Гаусса, переписать в интегральной форме

$$\int_{\partial S} (\nabla\phi)_\tau \, dl = 0, \quad \int_{\partial G} (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_n \, dS = 0.$$

Домашнее задание. Докажите первые два утверждения (это просто), а доказательства третьего и четвертого стребуйте с математиков.

2.2 Уравнения Максвелла. Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Уравнения движения ЭМ поля (*уравнения Максвелла*) имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \nabla\times\mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t, \\ \nabla\mathbf{B} &= 0, & c^2\nabla\times\mathbf{B} &= \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность зарядов, находящихся в поле (так что $\int_G \rho \, d^3r = Q$ представляет собой заряд в области G), а $\mathbf{j}$ — плотность тока этих зарядов (так что $\int_S j_n \, dS = I$ представляет собой ток через поверхность S). Постоянные ε_0 и c называются диэлектрической постоянной и скоростью света. (В конце курса мы покажем, что c является скоростью распространения ЭМ волн, а пока это просто название.)

Интегральная форма уравнений Максвелла получится, если проинтегрировать уравнения первого столбца по некоторой области и воспользоваться теоремой Гаусса, а уравнения второго столбца проинтегрировать по некоторой поверхности и воспользоваться теоремой Стокса

$$\int_{\partial G} E_n \, dS = Q/\varepsilon_0, \qquad \int_{\partial S} E_\tau \, dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n \, dS,$$

$$\int_{\partial G} B_n \, dS = 0, \qquad c^2\int_{\partial S} B_\tau \, dl = I/\varepsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t}\int_S E_n \, dS.$$

Стоящие здесь интегралы называются *потоками* векторных полей $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ *через поверхность* (в том числе и замкнутую)

$$\Phi_E = \int_S E_n \, dS, \qquad \Phi_B = \int_S B_n \, dS$$

и *циркуляциями* векторных полей *по замкнутому контуру*

$$\Gamma_E = \int_{\partial S} E_\tau \, dl, \qquad \Gamma_B = \int_{\partial S} B_\tau \, dl.$$

По отношению ко времени уравнения Максвелла являются дифференциальными уравнениями первого порядка, поэтому мы должны задать еще начальные условия $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Кроме того, должны быть заданы плотность заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Собственно уравнениями движения являются уравнения второго столбца (только они содержат производные по времени). Уравнения же первого столбца являются *уравнениями связей.* Во-первых, они накладывают ограничения на начальные условия

$$\nabla \mathbf{E}_0 = \rho(\mathbf{r}, 0)/\varepsilon_0, \qquad \nabla \mathbf{B}_0 = 0.$$

Во-вторых, они накладывают некоторое условие на функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Вычисляя дивергенцию от уравнения $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial \mathbf{E}/\partial t$, пользуясь одной из "четырех теорем" и уравнением $\nabla \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, получим

$$(*) \qquad \partial \rho / \partial t + \nabla \mathbf{j} = 0.$$

В интегральной форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int_{\partial G} j_n \, dS = 0,$$

и мы видим, что это *закон сохранения электрического заряда*: электрический заряд в области может измениться только за счет втекания (вытекания) заряда через границу.

Замечание. Для теории поля, в отличие от механики, вообще характерны законы сохранения в форме (*). Поле — это распределенная система, и просто закон сохранения (сохраняется полная сумма зарядов во всем пространстве) мало о чем говорит. *Локальное* сохранение заряда говорит нам еще и о том, что заряд не может мгновенно переместиться из одной точки в другую, он должен непрерывно "перетечь".

Если же начальные распределения полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{B}_0$ удовлетворяют условиям связи и функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют закону сохранения заряда (*), то во все последующие моменты времени уравнения первого столбца удовлетворяются автоматически.

Домашнее задание. Проверьте это утверждение.

Отметим еще одно важное свойство уравнений Максвелла: они линейные. Обычно это свойство формулируют как *принцип суперпозиции.* Именно, если поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t)$, а поля $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\rho_2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)$, то поля $\alpha \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \beta \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) + \beta \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$ являются решением уравнений Максвелла с плотностями зарядов и токов $\alpha \rho_1(\mathbf{r}, t) + \beta \rho_2(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha \mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) + \beta \mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t)$ при любых значениях постоянных α и β.

Выше мы сказали, что функции ρ и $\mathbf{j}$ должны быть заданы. На самом деле электрический заряд не существует самостоятельно, его несут на себе некоторые частицы. Когда эти частицы попадают в ЭМ поле, на них действует некоторая сила. Таким образом, для получения замкнутой картины мы должны добавить к уравнениям Максвелла еще и уравнения движения заряженных частиц в ЭМ поле. Эти уравнения имеют вид

$$m\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

Здесь m — масса частицы, q — ее *электрический заряд*. Выражение

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

называют *силой Лоренца*. Если $v/c \ll 1$, то приближенно

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

В последнем уравнений трудно не узнать второй закон Ньютона. В конце курса мы разберемся, почему он справедлив только при малых (по сравнению со скоростью света!) скоростях, а при больших требует уточнения.

Уравнение движения частицы нужно, как и в механике, дополнить двумя начальными условиями $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

3 Электростатика

В течение нашего курса мы будем в основном решать уравнения Максвелла в различных ситуациях, начиная с простых и переходя к более сложным. Самая простая ситуация: функции ρ и $\mathbf{j}$ не зависят от времени (конечно, нам придется "держать заряды руками"), и мы ищем решение в виде полей, также не зависящих от времени. Тогда уравнения Максвелла распадаются на две группы: отдельно для электрического и магнитного поля

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, \qquad & \nabla\times\mathbf{E} &= 0,\\ \nabla\mathbf{B} &= 0, \qquad & c^2\nabla\times\mathbf{B} &= \mathbf{j}/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Уравнения первой строки называются *уравнениями электростатики*, их-то мы и будем сейчас решать.

Отметим сразу, что в силу одной из "четырех теорем" из уравнения $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ следует $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Величину ϕ называют *потенциалом* электростатического поля (а само поле является потенциальным в полном согласии с соответствующим понятием в механике). Разумеется, потенциал определен с точностью до постоянной. Уравнение $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ становится уравнением для потенциала

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0.$$

Как мы уже отмечали, оно называется уравнением Пуассона.

3.1 Электростатика вакуума и “внешних” зарядов

Рассмотрим ситуацию, когда все безграничное пространство пусто, и лишь кое-где располагаются известные нам заряды. Они могут быть точечными или размазанными по линиям, поверхностям или областям (в этих случаях говорят о линейной, поверхностной и объемной плотностях заряда). Перепишем еще раз уравнения для поля $\mathbf{E}$

$$\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = 0,$$

и эквивалентное уравнение для потенциала ϕ

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$$

(зная который, можно вычислить поле $\mathbf{E} = -\nabla\phi$).

Использование симметрии. Поля точечного заряда, нити, плоскости. Рассмотрим три частных случая, когда решение можно получить малой кровью.

Пусть во всем пространстве имеется единственный точечный заряд q. Без ограничения общности поместим его в начало координат. Что можно сказать о поле в точке на оси x? Применим соображения симметрии. Распределение заряда не меняется при отражении в плоскости xz. Точка на оси x при этом отражении не смещается. Следовательно, поле в этой точке не должно меняться. Но при отражении в плоскости xz компонента E_y меняет знак. Единственная возможность удовлетворить требованию симметрии — положить $E_y = 0$. Аналогично (рассматривая отражение в плоскости xy) получаем $E_z = 0$. Итак, поле на оси x направлено вдоль оси x.

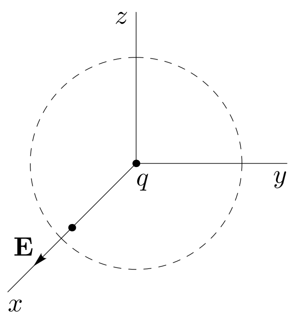

Рис. 12: К расчету поля точечного заряда

Распределение заряда не меняется при любых поворотах вокруг начала координат. При таких преобразованиях точка на оси x на расстоянии r от начала координат переходит в точку на сфере радиуса r. Следовательно,

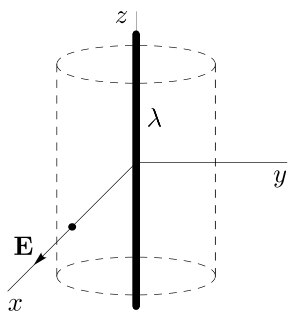

Рис. 13: К расчету поля заряженной нити

модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от r (и один и тот же для всех точек сферы), а направлен $\mathbf{E}$ во всех точках сферы вдоль радиуса $\mathbf{E} = (\mathbf{r}/r)E(r)$.

Домашнее задание. Покажите, что поле вида $\mathbf{E} = (\mathbf{r}/r)E(r)$ (центральное поле) всегда удовлетворяет уравнению $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, то есть является потенциальным.

Неизвестную функцию $E(r)$ найдем, переписав уравнение $\nabla\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ в интегральной форме

$$\int_{\partial G} E_n\, dS = Q/\varepsilon_0.$$

В качестве области G возьмем шар радиуса r с центром в начале координат. Тогда граница ∂G — сфера радиуса r. E_n постоянна на сфере и равна $E(r)$, а потому

$$\int_{\partial G} E_n\, dS = 4\pi r^2 E.$$

Заряд внутри G есть наш точечный заряд q, окончательно

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Эти формулы называют *полем точечного заряда.*

Замечание. Приведенные рассуждения основаны только на сферической симметрии. Они, стало быть, применимы не только к точечному заряду, но и к любому сферически симметричному распределению заряда. Например, точно так же можно найти поле равномерно заряженного шара.

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля точечного заряда равен $\phi = q/4\pi\varepsilon_0 r$.

Обратимся теперь к случаю, когда заряд равномерно распределено по прямой бесконечной нити с линейной плотностью λ. Без ограничения общности будем считать, что нить совпадает с осью z. Применяя отражения в плоскостях xz и xy, убеждаемся, что поле на оси x направлено вдоль оси x.

Распределение заряда не меняется при вращениях вокруг оси z и сдвигах вдоль оси z. При этом точка на оси x на расстоянии r от начала координат переходит в точку на поверхности цилиндра радиуса r, ось которого совпадает с осью z. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от расстояния r до оси z, вектор лежит в плоскости xy и направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_r$ цилиндрической системы координат $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r)$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле вида $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r)$ является потенциальным. Указание: воспользуйтесь тем, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{e}_r = (x/r, y/r, 0)$.

Неизвестную функцию $E(r)$ найдем, выбрав в уравнении $\int_{\partial G} E_n \, dS = Q/\varepsilon_0$ область G в виде цилиндра радиуса r и длины L, ось которого совпадает с осью z. Интергалы по торцам дадут нуль, а интеграл по боковой поверхности даст $2\pi r L E$. Заряд внутри цилиндра равен λL. Окончательно

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}_r \lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Эти формулы называют *полем заряженной нити.*

Замечание. Как и в предыдущем случае, мы пользовались только цилиндрической симметрией. Следовательно, указанные рассуждения применимы и к другим задачам с цилиндрически симметричным распределением заряда.

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля заряженной нити равен $\phi = -(\lambda/2\pi\varepsilon_0) \ln r$.

Наконец, рассмотрим равномерно заряженную с поверхностной плотностью σ плоскость. Без ограничения общности будем считать, что она совпадает с плоскостью xy. Применяя отражения в плоскостях xz и yz, убеждаемся, что поле на оси z направлено вдоль оси z.

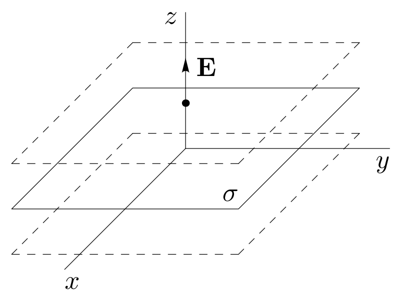

Рис. 14: К расчету поля заряженной плоскости

Распределение заряда не меняется при смещении параллельно плоскости xy и отражении в плоскости xy. При этом точка на оси z на расстоянии r от начала координат переходит в точку на одной из двух плоскостей, отстоящих на растояние r от плоскости xy. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от $|z|$, а направления по обе стороны от заряженной плоскости противоположны $\mathbf{E} = (0, 0, (z/|z|)E(|z|))$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$ потенциально.

В качестве области G в уравнении $\int_{\partial G} E_n \, dS = Q/\varepsilon_0$ берем цилиндр радиуса r и длины L, ось которого совпадает с осью z, а торцы отстоят от плоскости xy на равные расстояния. Интеграл по боковой поверхности дает нуль, а интегралы по торцам дают $2\pi r^2 E$. Заряд в области равен $\pi r^2 \sigma$. Окончательно

$$E = \sigma/2\varepsilon_0.$$

Эту формулу называют *полем заряженной плоскости.*

Домашнее задание. Покажите, что потенциал поля заряженной плоскости равен $\phi = -(\sigma/2\varepsilon_0)|z|$.

Замечания. При решении других задач с аналогичной симметрией (например, при расчете поля толстой пластины) может оказаться, что симметрии по отношению к отражению в плоскости xy нет. В таком случае можно лишь утверждать, что $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$, саму же $E(z)$ удается определить только с точностью до постоянной. Однако на больших расстояниях (например, на расстояниях, много больших толщины пластины) мы должны получить тот же ответ, что для заряженной плоскости. Этот принцип дает возможность довести решение до победного конца.

Принцип суперпозиции позволяет расширить класс задач, которые можно решить указанным выше способом. Именно, можно, очевидно, рассчитать поле произвольного количества точечных зарядов, нитей и плоскостей.

Соображения симметрии полезны и в других задачах. Хотя они не позволят решить задачу до конца, но могут существенно облегчить решение.

Общее решение. Оказывается, что существует общее решение уравнений электростатики вакуума и "внешних" зарядов. А именно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad \phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Формулы эти не должны казаться страшными. Фактически они следуют из формул для поля точечного заряда и принципа суперпозиции.

Замечание. Мы хотим подчеркнуть, что *все* задачи электростатики вакуума решаются этими формулами *раз и навсегда.* Вам не нужно решать никаких уравнений. Просто подставьте заданное распределение заряда и вычислите интеграл.

Строго говоря, эти формулы справедливы для зарядов, распределенных в конечной области пространства. Поскольку уравнения включают только производные от $\mathbf{E}$, то $\mathbf{E}$ определено с точностью до произвольного постоянного вектора. В приведенных решениях эта "произвольная постоянная" выбрана так, чтобы $\mathbf{E} \to 0$ и $\phi \to 0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$.

В качестве примера получим выражения для полей нити и плоскости. Интегралы в этих случаях нужно слегка модифицировать, поскольку интегрирование идет не по объему, а по линии или поверхности.

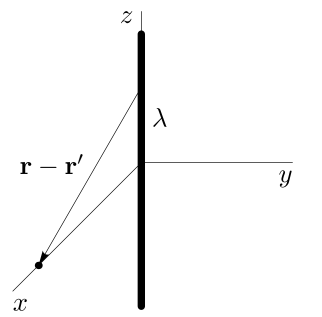

Рис. 15: Расчет поля нити с помощью страшной формулы для $\mathbf{E}$

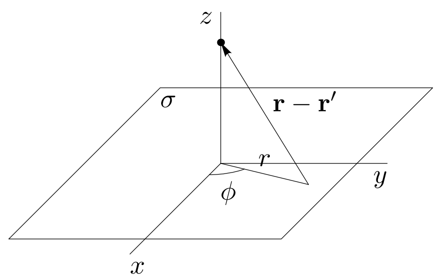

Рис. 16: Расчет поля плоскости с помощью страшной формулы для $\mathbf{E}$

Поле нити достаточно вычислить на оси x, причем только E_x@-компоненту. Имеем

$$E_x(x,0,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\lambda\,dz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}} = \left.\frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}.$$

Замечание. Первообразную для $(x^2+a^2)^{-3/2}$ стоит запомнить, она нам еще встретится.

Для вычисления поля плоскости введем полярные координаты (r,ϕ) на плоскости. Достаточно вычислить E_z@-компоненту на оси z.

$$E_z(0,0,z) = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr = -\left.\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}\right|_0^\infty = (z/|z|)\sigma/2\varepsilon_0.$$

Наглядное изображение электростатического поля. Линии поля и эквипотенциальные поверхности. *Линией поля* или *силовой линией* называется кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля, то есть линия $\mathbf{r}(s)$, где $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. *Эквипотенциальной поверхностью* называется множество точек пространства, имеющих один и тот же потенциал, то есть поверхность $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, то линии поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. На рисунке показаны линии поля и эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда.

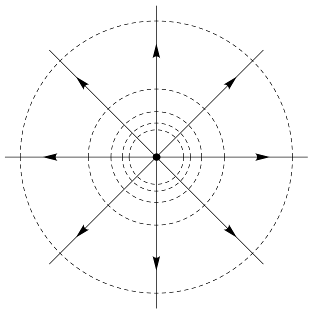

Рис. 17: Сиовые линии (сплошные) и эквипотенциальные поверхности (пунктирные) поля точечного заряда

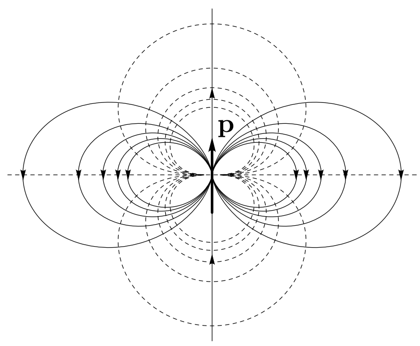

Рис. 18: Поле диполя

Домашнее задание. Нарисуйте линии поля и эквипотенциальные поверхности поля двух точечных зарядов q и $-q$ (эту картинку вы найдете в книжках).

Проделайте то же самое с зарядами q и q (а вот такую картинку эквипотенциальных поверхностей вы в книжках не найдете).

Замечание. Электростатическое поле является постоянным и потенциальным. Конечно, линиями поля можно изображать любые поля, в том числе переменные и непотенциальные. Эквипотенциальными же поверхностями можно изображать, очевидно, только потенциальные поля.

Электрический диполь. Рассмотрим два точечных заряда q и $-q$, которые располагаются в точках $(0, 0, a/2)$ и $(0, 0, -a/2)$. Потенциал поля равен

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

Перейдем к пределу $a \to 0$, одновременно увеличивая q, так что $qa = p = \text{const}$. Мы получим

$$\phi(x, y, z) = \frac{zp}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Вводя вектор $\mathbf{p} = (0, 0, p)$, можно написать

$$\phi = \frac{\mathbf{rp}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Рассмотренную нами систему двух зарядов называют *электрическим диполем*, вектор $\mathbf{p}$ называется *дипольным моментом*, а выписанная выше формула для ϕ — потенциалом поля диполя.

Домашнее задание. Вычислите электрическое поле диполя. Ответ: $\mathbf{E} = \dfrac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$.