Постоянное магнитное поле

Мы переходим к изучению второй пары уравнений Максвелла

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0$$

в случае постоянных полей. Как и в электростатике, мы начнем со случая, когда токи известны. Затем рассмотрим магнетики, в которых, помимо "внешних", могут существовать и "внутренние" молекулярные токи.

Отметим важное отличие от электростатики. Вычисляя дивергенцию второго уравнения, получим

$$\nabla \mathbf{j} = 0.$$

Это условие на ток должно выполняться, иначе задача неразрешима. В электростатике же никаких ограничений на распределение ρ не было. Принцип аддитивности тоже имеет ограниченный смысл: нельзя "делить" ток так, чтобы отдельные части не удовлетворяли условию $\nabla \mathbf{j} = 0$. Поэтому никакого "точечного тока" (в отличие от точечного заряда) в природе не существует.

Замечания. Конечно, движущийся точечный заряд создает магнитное поле, но оно не является постоянным.

Коэффициент $1/\varepsilon_0 c^2 = \mu_0$ обычно называют магнитной постоянной.

Постоянное магнитное поле в вакууме

Векторный потенциал. Уравнение $\nabla \mathbf{B} = 0$ в силу одной из "четырех теорем" означает, что $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Величину $\mathbf{A}$ называют *векторным потенциалом.* В некотором смысле это аналог потенциала φ в электростатике. Неопределенность потенциала $\mathbf{A}$, однако, несколько больше, чем неопределенность φ. В силу еще одной из "четырех теорем" потенциалы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ приводят к одному и тому же полю $\mathbf{B}$ при любой функции f. Выбор конкретной функции f называют *калибровкой*, а переход от потенциала $\mathbf{A}$ к потенциалу $\mathbf{A}'$ — *калибровочным преобразованием.* Функцию f можно выбрать так, чтобы $\nabla \mathbf{A}' = 0$. Действительно, пусть f удовлетворяет уравнению (Пуассона) $\Delta f = -\nabla \mathbf{A}$. Мы видели, что это уравнение при разумных дополнительных условиях разрешимо. Тогда, как легко проверить, $\nabla \mathbf{A}' = 0$. Эту калибровку называют *кулоновской.*

Домашнее задание. Проверить, что $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$.

Подставляя $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ в уравнение $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ при условии $\nabla \mathbf{A} = 0$ получим

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Мы видим, что это уравнение аналогично уравнению $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ в электростатике.

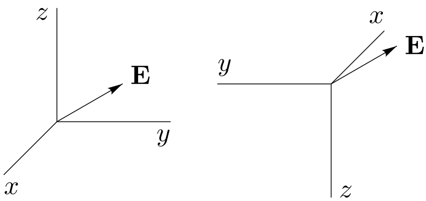
Немного математики. Полярные и аксиальные векторы. При применении соображений симметрии к полю $\mathbf{B}$ нужно иметь в виду, что это не совсем такой же вектор, как $\mathbf{E}$. Выше мы говорили, что вектор — это трехкомпонентная величина, компоненты которой при вращении системы координат преобразуются как сами декартовы координаты (x, y, z). Однако помимо вращений существуют еще отражения в плоскостях, а также *инверсия* — изменение знака всех трех координат. Нетрудно сообразить, что любое преобразование декартовой системы координат (при котором она остается декартовой) есть либо вращение, либо вращение и инверсия. Проще всего считать, что при инверсии вектор меняет знак (как это происходит с радиус-вектором (x, y, z))

$$\mathbf{E} \to -\mathbf{E}.$$

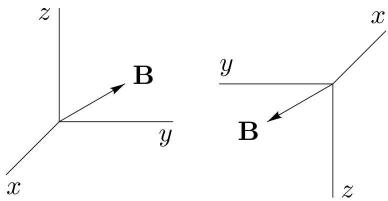
Однако не приводит к противоречию и такой закон преобразования

$$\mathbf{B} \to \mathbf{B}.$$

Иначе говоря, на самом деле существует два типа векторов. При вращениях они преобразуются одинаково (как координаты), а при инверсии — по-разному. Векторы типа $\mathbf{E}$ называют *полярными*, а векторы типа $\mathbf{B}$ — *аксиальными*. Иногда аксиальные векторы называют *псевдовекторами*.



Преобразование электрического поля
при инверсии

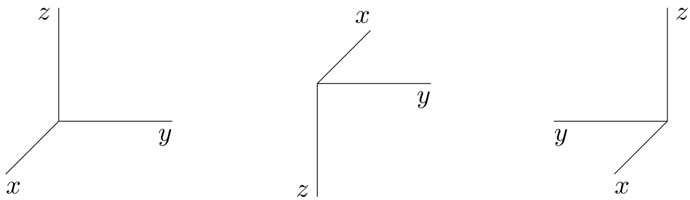


Преобразование магнитного поля
при инверсии

На самом деле с аксиальными векторами мы работаем уже давно. Когда в прошлом семестре мы имели дело с моментом импульса или угловой скоростью, то это были аксиальные векторы. Действительно, момент импульса материальной точки равен $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. В компонентах это означает, например, $l_x = m(yv_z - zv_y)$. Очевидно, что при инверсии, то есть при изменении знака векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ одновременно, знаки компонент момента импульса не меняются. Аналогично для угловой скорости $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$. Нетрудно догадаться, что именно операция векторного произведения и порождает аксиальные векторы. Векторное произведение двух полярных векторов — это аксиальный вектор, и наоборот, векторное произведение полярного и аксиального векторов — это полярный вектор.

Выше мы отмечали, что операция вычисления ротора аналогична векторному произведению. Поскольку $\mathbf{j}$ — полярный вектор (по сути скорость зарядов), то, глядя на уравнения Максвелла, мы видим, что $\mathbf{E}$ — полярный, а $\mathbf{B}$ — аксиальный векторы.

Вернемся к преобразованиям координат. При инверсии $\mathbf{B}$ не меняется. Что можно сказать об отражении в плоскости, скажем xz? Это преобразование можно получить последовательными вращением вокруг оси y на 180 градусов и инверсией. При вращении x- и z-компоненты изменяют знаки, при инверсии компоненты не меняются. Итак,

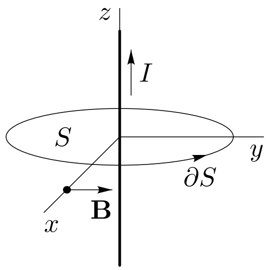


Отражение в плоскости xz можно получить из вращения
на 180 градусов вокруг оси y и инверсии

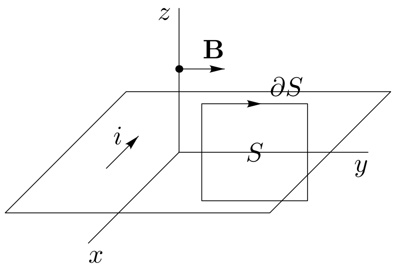
при отражении в плоскости xz компоненты B_x и B_z меняют знак, а B_y не меняется. Заметьте, что это противоположно тому, как ведут себя компоненты вектора $\mathbf{E}$.

Замечание. Векторный потенциал $\mathbf{A}$ — полярный вектор, поскольку $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Использование симметрии. Поля нити, плоскости, трубы. Рассмотрим тонкую бесконечную нить, по которой течет ток I. Без ограничения общности будем считать, что нить лежит на оси z. Рассмотрим точку на оси x. Что можно сказать о поле $\mathbf{B}$ в этой точке? При отражении в плоскости xz распределение тока не меняется, не должно меняться и поле. Однако компоненты $B_{x,z}$ меняют знак. Следовательно, они равны нулю, а поле на оси x направлено по оси y.



К расчету поля прямого тока



К расчету поля тока, текущего по плоскости

Распределение тока не меняется при вращениях вокруг оси z и сдвигах вдоль оси z. При этом точка на оси x на расстоянии r от начала координат переходит в точку на поверхности цилиндра радиуса r, ось которого совпадает с осью z. Следовательно, модуль вектора $\mathbf{B}$ зависит только от расстояния r до оси z, вектор лежит в плоскости xy и направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_\varphi$ цилиндрической системы координат $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B(r)$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле вида $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B(r)$ удовлетворяет уравнению $\nabla\mathbf{B} = 0$. Указание: воспользуйтесь тем, что $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{e}_\varphi = (-y/r, x/r, 0)$.

Неизвестную функцию $B(r)$ найдем, переписав уравнение $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$ в интегральной форме

$$\int_{\partial S} B_\tau \, dl = \mu_0 I.$$

Это соотношение называют *теоремой о циркуляции* вектора магнитного поля. Направление обхода границы ∂S согласовано с нормалью к поверхности S по правилу правого винта. Выберем в качестве поверхности S круг радиуса r в плоскости xy с центром в начале координат. Тогда граница ∂S — окружность, на которой касательная компонента $\mathbf{B}$ постоянна и равна $B(r)$

$$\int_{\partial S} B_\tau \, dl = 2\pi r B.$$

Ток через поверхность равен I, окончательно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Это *поле прямолинейного тока.*

Рассмотрим ток, текущий по плоскости. Будем считать, что плоскость совпадает с плоскостью xy, а ток течет в направлении x. Рассмотрим поле в точке на оси z. Распределение тока не меняется при отражении в плоскости xz. Следовательно, на оси z поле направлено вдоль оси y.

Распределение тока не меняется при сдвигах вдоль плоскости xy. При этом точка на оси z на расстоянии r от плоскости переходит в точку на плоскости, отстоящей на r от плоскости xy. Следовательно, поле имеет только y-компоненту, которая зависит только от z: $\mathbf{B} = (0, B(z), 0)$.

Домашнее задание. Проверьте, что поле $\mathbf{B} = (0, B(z), 0)$ удовлетворяет уравнению $\nabla\mathbf{B} = 0$.

Распределение тока не меняется при отражении в плоскости xy. При этом точка $(0, 0, r)$ переходит в $(0, 0, -r)$, а компонента B_y меняет знак. Мы можем немного уточнить поле: $\mathbf{B} = (0, (z/|z|)B(|z|), 0)$.

Неизвестную функцию $B(|z|)$ найдем, выбирая в теореме о циркуляции поверхность S в виде прямоугольника, лежащего в плоскости yz. Две стороны прямоугольника параллельны оси y и отстоят от нее на равные расстояния, их длина равна L. Только эти стороны дают вклад в интеграл

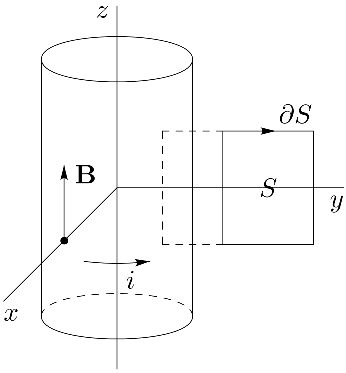
$$\int_{\partial S} B_\tau \, dl = 2LB.$$

Ток, текущий через поверхность S, равен iL, где i — плотность тока, текущего по плоскости xy. Окончательно

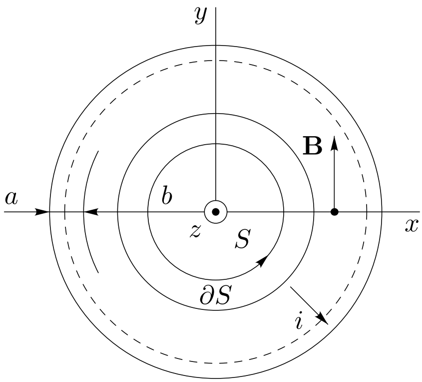
$$B = \mu_0 i/2.$$

Наконец, рассмотрим трубу радиуса R. Здесь возможны два распределения тока с цилиндрической симметрией: ток может течь вдоль трубы или поперек трубы.

Случай тока, текущего вдоль трубы, аналогичен случаю тонкой нити с током. Поле внутри трубы равно нулю, а поле вне трубы — такое же, как поле нити с током.



К расчету поля тока,
текущего поперек трубы



К расчету поля тока,
текущего поперек тороида

Рассмотрим подробнее случай тока, текущего поперек трубы. Пусть ось трубы совпадает с осью z. Отражение в плоскости xy не меняет распределения тока. Следовательно, во всех точках в плоскости xy поле направлено вдоль оси z.

Распределение тока не меняется при вращении вокруг оси z и смещении вдоль z. Таким образом, поле во всем пространстве направлено по z, а его величина зависит только от расстояния до оси z: $\mathbf{B} = (0, 0, B(r))$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Домашнее задание. Покажите, что поле $\mathbf{B} = (0, 0, B(x, y))$ удовлетворяет уравнению $\nabla \mathbf{B} = 0$.

Для определения функции $B(r)$ рассмотрим поверхность S в виде прямоугольника, лежащего в плоскости yz, две стороны которого (длиной L)

параллельны оси z. Только эти стороны дают вклад в интеграл в теореме о циркуляции

$$\int_{\partial S} B_\tau \, dl = L(B(r_1) - B(r_2)).$$

Переходя к пределу $r_2 \to \infty$ и считая, что поле далеко от трубы равно нулю, находим, что поле вне трубы всюду равно нулю, а поле внутри трубы равно

$$B = \mu_0 i,$$

где i — плотность тока, текущего по трубе.

Замечания. Как и в электростатике, указанными выше методами можно решать и другие задачи с цилиндрической или "плоской" симметрией.

Суперпозиция двух решений для трубы соответствует "винтовому току", текущему по трубе.

Еще одна задача, допускающая решение на основании соображений симметрии — поле тока, текущего поперек тороида. Пусть ось тороида совпадает с осью z, а сам тороид расположен симметрично относительно плоскости xy. Пусть радиус "бублика" равен b, а радиус его сечения равен a (он нам не понадобится). Поверхностная плотность тока, в отличие от прямой трубы, не постоянна. Будем характеризовать ее значением на "средней линии" тороида, пусть плотность тока на ней равна i. Из симметрии относительно отражения в плоскости xz следует, что поле в этой плоскости направлено по оси y. Из симметрии относительно вращений вокруг оси z тогда следует, что величина поля зависит только от r и z, а направлено оно вдоль вектора $\mathbf{e}_\varphi$ цилиндрической системы координат $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B(r, z)$.

Домашнее задание. Покажите, что поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B(r, z)$ удовлетворяет уравнению $\nabla \mathbf{B} = 0$.

В качестве поверхности S в теореме о циркуляции выберем круг радиуса r, лежащий в плоскости, параллельной плоскости xy, с центром на оси z. Тогда граница ∂S — окружность, а циркуляция $\mathbf{B}$ равна

$$\int_{\partial S} B_\tau \, dl = 2\pi r B.$$

Ток, текущий через поверхность S, равен нулю, если окружность лежит вне тороида (так что поле вне тороида равно нулю), и равен $2\pi b i$, если окружность лежит внутри тороида. Итак, поле внутри тороида равно

$$B = \mu_0 i b / r.$$

Оно в действительности не зависит от z, но зависит от r.

Поскольку метод расчета использует только симметрию, то этим методом можно рассчитать поле для любого тела вращения, а не только для тороида.

Общее решение. Как и в электростатике, существует общее решение уравнений для постоянного магнитного поля в вакууме

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Эту формулу называют *законом Био—Савара—Лапласа.*

Замечания. Мы хотим подчеркнуть, что *все* задачи магнитного поля в вакууме решаются этими формулами *раз и навсегда.* Вам не нужно решать никаких уравнений. Просто подставьте заданное распределение тока и вычислите интеграл.

Для векторного потенциала тоже есть общая формула

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Строго говоря, формулы справедливы для случая, когда $\mathbf{j}$ отлично от нуля в конечной области пространства. Однако нетрудно убедиться, что они остаются верны и для проводников, уходящих в бесконечность.

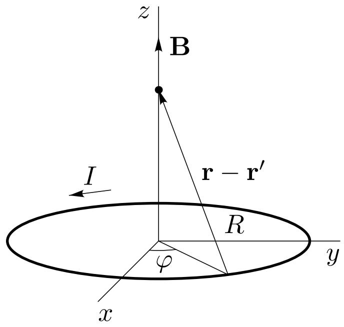
Домашнее задание. Переполучите поле прямолинейного тока с помощью закона Био—Савара—Лапласа.

Хотя внешне формулы для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ выглядят как следствие принципа аддитивности, мы хотим еще раз подчеркнуть, что принцип аддитивности для магнитных задач является весьма ограниченным. Вычисляя интегралы "кусками", никогда не нужно забывать, что полное распределение тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ должно удовлетворять закону сохранения заряда $\nabla\mathbf{j} = 0$.

Проверить, что выписанные формулы действительно дают решение задачи, не такто просто. Сложность, конечно, в том, что, в отличие от электростатики, у нас нет "точечного тока". Если вы все же захотите проверить эти формулы, то лучше действовать так. Не пытайтесь подставлять формулу для $\mathbf{B}$ в уравнения. Убедитесь, что потенциал $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\nabla\mathbf{A} = 0$ и что формула для $\mathbf{B}$ получается из формулы для $\mathbf{A}$, если вычислить ротор (это просто). Заметьте, что формула для $\mathbf{A}$ полностью аналогична страшной формуле для φ в электростатике, а потому $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$.

Вычислим поле на оси кругового тока. Пусть ток I течет по окружности радиуса R лежащей в плоскости xy с центром в начале координат. Из соображений симметрии (вращение вокруг оси z) на оси z отлична от нуля только z-компонента магнитного поля. Вводя полярный угол в плоскости xy, имеем

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{[(-I\sin\varphi)(-R\sin\varphi) - (I\cos\varphi)(-R\cos\varphi)]R\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$



Поле на оси кругового тока

Мы использовали тот факт, что

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-R\cos\varphi, -R\sin\varphi, z), \quad \mathbf{j} \sim (-I\sin\varphi, I\cos\varphi, 0).$$

В частности, поле в центре кругового тока равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Магнитный диполь. Как видно из полученной выше формулы, поле кругового тока на его оси остается конечным, если устремить $R \to 0$, сохраняя произведение тока на площадь витка постоянным $\pi R^2 I = p_m = \mathrm{const}$. Возникающий при таком предельном переходе источник магнитного поля называют *магнитным диполем* (сравни с электрическим), а величину p_m — *магнитным моментом* магнитного диполя. Вычислим поле магнитного диполя. Учитывая симметрию относительно вращений вокруг оси z, для этого достаточно вычислить поле кругового тока в плоскости xz и перейти к пределу $R \to 0$. Из соображений симметрии (отражение в плоскости xz, при этом ток меняет направление) поле в плоскости xz имеет только x- и z-компоненты

$$B_x = \int_0^{2\pi} \frac{(I\cos\varphi) zR\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2[(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2]^{3/2}},$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{[(-I\sin\varphi)(-R\sin\varphi) - (I\cos\varphi)(x - R\cos\varphi)]R\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2[(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2]^{3/2}}$$

Чтобы перейти к пределу $R \to 0$, разложим знаменатель в ряд Тейлора

$$\frac{1}{[(x - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2]^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3xR\cos\varphi}{(x^2 + z^2)^{5/2}} + O(R^2).$$

Отличные от нуля члены

$$B_x = \int_0^{2\pi} \frac{(I\cos\varphi)z(3xR\cos\varphi)R\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{5/2}},$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{[(-I\sin\varphi)(-R\sin\varphi)-(I\cos\varphi)(-R\cos\varphi)]R\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{3/2}} + \\ + \int_0^{2\pi} \frac{-(I\cos\varphi)x(3xR\cos\varphi)R\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{5/2}}.$$

Вычисляя интегралы, находим

$$B_x = \frac{3xzp_m}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{5/2}},$$

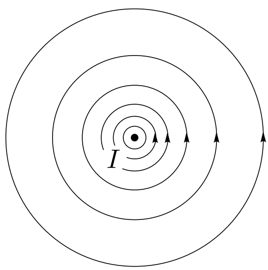
$$B_z = \frac{2p_m}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2p_m}{4\pi\varepsilon_0 c^2(x^2+z^2)^{5/2}}.$$

Вводя вектор $\mathbf{p}_m = (0, 0, p_m)$, можно записать эти формулы в компактном виде

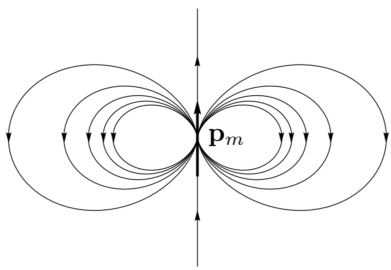
$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p}_m) - r^2\mathbf{p}_m}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}.$$

Это и есть поле магнитного диполя.

Домашнее задание. Покажите, что векторный потенциал поля магнитного диполя равен $\mathbf{A} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3$.

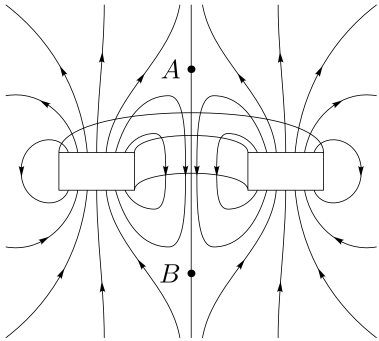


Поле прямого тока



Поле магнитного диполя

Наглядное изображение магнитного поля. Линии поля. Магнитное поле, так же как электрическое, можно наглядно изображать линиями



Поле кольцевого магнита

поля, то есть кривыми $\mathbf{r}(s)$, где $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Никаких эквипотенциальных поверхностей для магнитного поля нет, поскольку оно, вообще говоря, непотенциально. Для примера на рисунке изображены линии поля для прямолинейного тока и магнитного диполя.

Домашнее задание. В журнале "Техника — молодежи" номер 6 за 1991 г. (стр. 2) было сообщено о некоем "научном открытии" кандидата технических наук М. Ф. Острикова. Заключалось оно в том, что кольцевой магнит имеет магнитное поле, схематически изображенное на рисунке (в точках A и B поле равно нулю). Предложите разумную модель кольцевого магнита, вычислите поле на его оси и дайте теоретическое объяснение этому "открытию".

И запомните: я учу вас для того, чтобы вы подобных "открытий" не делали.

Постоянное магнитное поле в веществе. Магнетики

Как уже отмечалось при рассмотрении проводников и диэлектриков, учение о поле в веществе выходит за рамки собственно ЭМ теории. При наличии вещества помимо "внешних" токов есть еще токи за счет движения зарядов, из которых состоит вещество. Чтобы не вдаваться в сложные вопросы строения вещества, в электростатике мы предложили две простые модели проводника и диэлектрика. Точно так же мы поступим и сейчас.

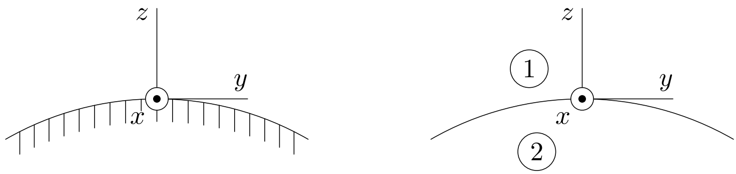
Сверхпроводники. Модель сверхпроводника формулируется так: *магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю.* Глядя на уравнения

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

мы видим, что на поверхности сверхпроводника должны выполняться следующие граничные условия

$$B_z = 0, \quad -B_y = \mu_0 i_x, \quad B_x = \mu_0 i_y,$$

где i_x, i_y — компоненты поверхностной плотности тока. Первое равенство представляет собой собственно граничное условие, а два остальных служат для определения поверхностной плотности тока. Мы видим, что сверхпроводник в магнитном поле представляет собой некоторый аналог проводника в электростатике.



К граничным условиям для сверхпроводника и магнетика

Вектор намагниченности. Вектор напряженности магнитного поля. Переходя к рассмотрению магнетиков, мы должны прежде всего написать выражение для молекулярных токов. Мы несколько обобщим задачу: получим выражение для молекулярного тока не только в случае постоянных, но и в случае произвольных переменных полей. Для этого обратимся к полным уравнениям Максвелла

$$\nabla \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где $\rho = \rho_{\text{внешн}} + \rho_{\text{пол}}$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \mathbf{j}_{\text{мол}}$. Результат $\rho_{\text{пол}} = -\nabla \mathbf{P}$ сохраняет свою силу и в случае переменных полей. Вычисляя дивергенцию от второго уравнения, находим

$$0 = \nabla \left(\mathbf{j}_{\text{мол}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right).$$

В силу одной из “четырех теорем”

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}.$$

Вектор $\mathbf{M}$ называют *вектором намагниченности.* Первое слагаемое в формуле представляет собой вклад за счет изменения поляризации и прямо следует из нашего определения вектора $\mathbf{P}$. Второе слагаемое можно наглядно представить следующим образом. Выше мы рассматривали круговой ток и его предельный случай — магнитный диполь. На плотность заряда наличие магнитных диполей не влияет, поскольку заряд в диполе вращается по окружности исчезающе малого радиуса, однако магнитное поле диполи создают, и этому магнитному полю можно формально сопоставить ток $\nabla \times \mathbf{M}$.

Уравнение Максвелла для магнитного поля можно теперь записать следующим образом

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{внешн}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где вектор $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ называется *напряженностью магнитного поля.* Возвращаясь к постоянным полям, запишем уравнения для магнетиков в виде

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{внешн}}.$$

Плотность молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}} = \nabla \times \mathbf{M}$ (сравните с уравнениями для диэлектриков).

Граничные условия. Материальные уравнения. Из выписанных уравнений находим граничные условия на границе раздела двух магнетиков

$$B_{z1} = B_{z2}, \quad H_{y1} - H_{y2} = -(i_{\text{внешн}})_x, \quad H_{x1} - H_{x2} = (i_{\text{внешн}})_y,$$

где $(i_{\text{внешн}})_x$, $(i_{\text{внешн}})_y$ — компоненты поверхностной плотности “внешних” токов. Поверхностную плотность молекулярных токов можно найти из соотношений

$$M_{y1} - M_{y2} = -(i_{\text{мол}})_x, \quad M_{x1} - M_{x2} = (i_{\text{мол}})_y.$$

Как и в случае диэлектриков, нужно как-то связать векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Простейшая модель магнетика, которой мы будем пользоваться, такова

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}.$$

Постоянную μ называют *магнитной проницаемостью* магнетика, а связь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ — материальным уравнением.

Насколько известно науке, в природе существуют только диэлектрики с $\varepsilon > 1$ (хотя термодинамические условия устойчивости требуют лишь

$\varepsilon > 0$, $\mu > 0$). Магнетики же могут иметь как $\mu < 1$, так и $\mu > 1$. Первые называют *диамагнетиками*, а вторые — *парамагнетиками*.

Замечания. Различие между диамагнетиками и парамагнетиками связано с двумя возможными механизмами появления намагниченности $\mathbf{M}$. Намагниченность за счет орбитального движения электронов приводит к диамагнетизму, а спиновая намагниченность — к парамагнетизму.

Помимо диа- и парамагнетиков выделяют еще *ферромагнетики* (а также антиферромагнетики, ферримагнетики и прочую нечисть). Все эти вещества характеризуются (при достаточно низких температурах) сильно нелинейной связью $\mathbf{B}$ с $\mathbf{H}$. Изучение свойств этих веществ — задача молекулярной физики и к электромагнетизму не имеет отношения. Мы их рассматривать не будем. При высоких температурах связь $\mathbf{B}$ с $\mathbf{H}$ всегда линейна, так что все вещества — либо диамагнетики, либо парамагнетики.

Домашнее задание. Решите аналог задачи о диэлектрической пластине в однородном внешнем электрическом поле. Пусть теперь диамагнитная или парамагнитная пластина помещена в однородное внешнее магнитное поле. Нарисуйте линии поля внутри пластины и поверхностные молекулярные токи.

Понятие самоиндукции и взаимной индукции. Соленоид

Пусть даны два контура ∂S_1 и ∂S_2. Если по первому контуру течет ток I, то он создает магнитное поле $\mathbf{B}$, потоки которого через первый и второй контуры

$$\Phi_{1,2} = \int_{S_{1,2}} B_n \, dS$$

пропорциональны току I

$$\Phi_1 = L_1 I, \quad \Phi_2 = MI.$$

Коэффициент пропорциональности L_1 называется *коэффициентом самоиндукции* первого контура (или просто *индуктивностью*), а коэффициент M — *коэффициентом взаимной индукции*. Если ток I течет по второму контуру, то аналогично определяются индуктивность второго контура и взаимная индукция

$$\Phi_1 = MI, \quad \Phi_2 = L_2 I,$$

причем коэффициент взаимной индукции оказывается в обоих случаях одинаковым.

Замечания. Векторный потенциал поля тока I, текущего по первому контуру, равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = I \int_{\partial S_1} \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \, dl_1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

Поток этого поля через второй контур

$$\Phi_2 = \int_{S_2} B_n \, dS = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A})_n \, dS = \int_{\partial S_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2)\boldsymbol{\tau}_2 \, dl_2 = I \int_{\partial S_1} \int_{\partial S_2} \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2 \, dl_1 \, dl_2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Из последней формулы видна симметрия коэффициента взаимной индукции по перестановке индексов 1 и 2.

Индуктивность *бесконечно тонкого* провода обращается, очевидно, в бесконечность. Ее корректное вычисление требует дополнительных предположений о толщине провода и распределении тока в нем. Как мы увидим ниже, для соленоида этой трудности не возникает.

Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции можно ввести для произвольного числа контуров.

Мы рассмотрим два типа *соленоидов* — бесконечный прямой соленоид и тороидальный соленоид.

Прямой соленоид представляет собой провод, навитый на бесконечный цилиндр радиуса R. По проводу течет ток I. Пусть на единицу длины приходится n витков. Если провод тонкий и намотан виток к витку, то хорошим приближением к распределению тока будет труба с текущим поперек током. Поле внутри соленоида однородно, направлено по оси и равно

$$B = \mu_0 n I.$$

Вне соленоида поле равно нулю. При вычислении индуктивности соленоида (на единицу длины) нужно иметь в виду, что магнитный поток пронзает все витки, так что

$$\Phi = N\pi R^2 B = \mu_0 \pi R^2 l n^2 I,$$

где N — число витков на длине l. Индуктивность равна

$$L = \mu_0 \pi R^2 l n^2 = \mu_0 V n^2,$$

где V — объем соленоида.

В тороидальном соленоиде (радиус “бублика” b, радиус сечения a) поле зависит от расстояния до оси

$$B = \mu_0 N I / 2\pi r,$$

где N — полное число витков. Поле вне тороида равно нулю. Поток равен

$$\Phi = N \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi(b+x)} \, 2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \mu_0 N^2 I \big(b - \sqrt{b^2 - a^2}\,\big).$$

Замечания. Интеграл проще всего вычислить по теореме о вычетах.

Аналогично можно вычислить индуктивность любого соленоида, представляющего собой тело вращения.

Индуктивность тороидального соленоида

$$L = \mu_0 N^2 \big(b - \sqrt{b^2 - a^2}\,\big).$$

Если соленоид заполнен магнетиком, то теорема о циркуляции формулируется для вектора $\mathbf{H}$. Это означает, что поле $\mathbf{B}$ возрастает в μ раз, во столько же раз возрастает индуктивностью.

Сила, действующая на тело в магнитном поле. Энергия магнитного поля

Сила, действующая на тело. На заряд в ЭМ поле действует сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Нас сейчас интересует второе слагаемое. Если заряды создают ток с плотностью $\mathbf{j}$, то полная сила

$$\mathbf{F} = \int_G \mathbf{j} \times \mathbf{B}\, d^3 r.$$

Интегрирование ведется по объему тела. Как и в случае электрического поля можно понимать под $\mathbf{B}$ поле, создаваемое всеми токами, кроме токов в данном теле, а можно учитывать и "самодействие" токов. Удобно выразить силу только через магнитное поле (это особенно удобно при наличии магнетиков, когда токи заранее неизвестны и должны сами определяться по решению задачи).

Вычисления удобно вести в тензорных обозначениях. Уравнения поля имеют вид

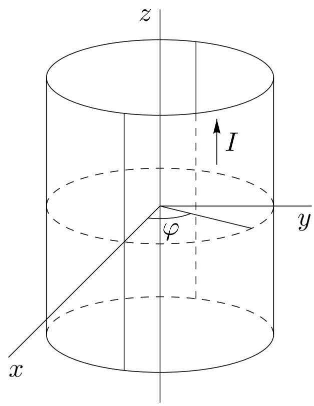
$$\partial_i B_i = 0, \quad \varepsilon_{klm} \partial_l B_m = \mu_0 j_k,$$

где eps_{klm} — антисимметричный тензор, $\varepsilon_{xyz} = 1$. Полная сила равна

$$\begin{aligned} F_i = \int_G \varepsilon_{ikn} j_k B_n\, d^3 r = \frac{1}{\mu_0} \int_G \varepsilon_{ikn} \varepsilon_{klm} (\partial_l B_m) B_n\, d^3 r = \\ = \frac{1}{\mu_0} \int_G (B_l \partial_l B_i - B_n \partial_i B_n)\, d^3 r = \frac{1}{\mu_0} \int_G [\partial_l (B_l B_i) - \partial_i (B^2/2)]\, d^3 r = \\ = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial G} [n_l B_l B_i - n_i (B^2/2)]\, dS. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial G} [\mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{n}) - \mathbf{n}(B^2/2)]\, dS.$$



Сплющивание трубы текущим по ней током

В качестве примера вычислим с какой силой (на единицу длины L) притягиваются две половинки трубы радиуса R, по которой течет ток I. Поле внутри трубы равно нулю, а поле вне на ее поверхности равно $B = \mu_0 I/2\pi R$ и направлено по касательной к поверхности. Вводя цилиндрические координаты и интегрируя по правой половинке трубы, находим

$$F_y = -\frac{L}{2\mu_0}\int_0^\pi \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)^2 \sin\varphi\, R\, d\varphi = -\frac{\mu_0 L I^2}{4\pi^2 R}.$$

Сила, действующая на контур с током. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле. В задачах чаще приходится вычислять силу, действующую на тонкий провод с током. Чтобы выполнялся закон сохранения электрического заряда, нужно, чтобы концы провода уходили в бесконечность, либо чтобы провод был замкнутым. В последнем случае говорят о *контуре с током.* Сила, действующая на контур с током, равна

$$\mathbf{F} = I\int_{\partial S} \boldsymbol{\tau}\times\mathbf{B}\, dl$$

(интегрирование ведется по замкнутому контуру, а такой контур является границей некоторой поверхности, отсюда и обозначение). Аналогично записывается момент сил, действующих на контур

$$\mathbf{M} = I\int_{\partial S} \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{B})\, dl.$$

Как мы знаем еще из механики, момент определен однозначно, независимо от выбора начала координат, только если полная сила равна нулю.

В однородном поле

$$\mathbf{F} = \left(I \int_{\partial S} \boldsymbol{\tau}\, dl \right) \times \mathbf{B} = 0.$$

Для момента тоже можно получить более простую формулу.

Запишем

$$\mathbf{M} = I \int_{\partial S} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{Br})\, dl - I\mathbf{B} \int_{\partial S} (\mathbf{r}\, d\mathbf{r}).$$

Второй интеграл равен нулю. Умножая момент на произвольный вектор $\mathbf{a}$, можно преобразовать первый интеграл по теореме Стокса

$$\mathbf{Ma} = I \int_{\partial S} [\mathbf{a}(\mathbf{Br})]_\tau\, dl = I \int_S (\nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{Br})])\mathbf{n}\, dS$$

($\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, согласованная с направлением обхода границы ∂S). Вычисляя ротор, получим

$$\mathbf{Ma} = I \int_S (\mathbf{B} \times \mathbf{a})\mathbf{n}\, dS = \left(I \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\, dS \right) \mathbf{a}.$$

Поскольку это равенство выполняется для любого $\mathbf{a}$, то

$$\mathbf{M} = I \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\, dS.$$

Остается отметить, что интеграл не зависит от выбора поверхности, натянутой на контур.

Итак, момент сил, действующих на контур в однородном поле, равен

$$\mathbf{M} = I \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\, dS.$$

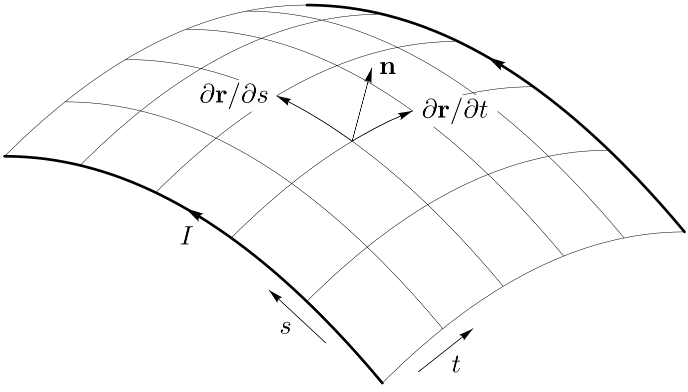
Интегрирование ведется по любой поверхности, натянутой на контур. Если контур плоский, то

$$\mathbf{M} = IS\mathbf{n} \times \mathbf{B},$$

где S — площадь контура, а $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости контура. Этот момент стремится сориентировать контур “по полю”.

Вычислим работу по перемещению контура с током в магнитном поле. Решим сначала задачу для нефизического случая незамкнутого контура конечной длины, а затем посмотрим, что даст замыкание концов.

Провод будем описывать параметрически. Это означает, что положение провода определяется функцией $\mathbf{r}(s)$, $s \in [0, 1]$. При перемещении провода



Работа по перемещению контура

его положение меняется, так что $\mathbf{r}$ зависит еще и от t: $\mathbf{r}(s,t)$. Работа за промежуток времени от t_1 до t_2 равна

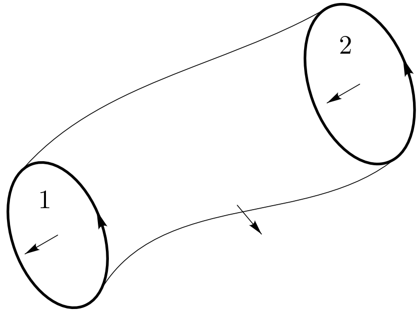
$$A = I\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 ds \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\mathbf{B}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \\ = I\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 ds \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\right)\mathbf{B} = I\int_S B_n\,dS,$$

где S — поверхность, которую заметает провод в процессе движения. Нормаль выбирается по правилу: вектор скорости $(\partial\mathbf{r}/\partial t)$, касательный к проводу вектор $(\partial\mathbf{r}/\partial s)$ и нормаль должны составлять правую тройку. Сам же интеграл — просто поток поля $\mathbf{B}$ через поверхность. На самом деле можно интегрировать по любой поверхности, которая имеет ту же границу (а граница — это начальное положение провода $\mathbf{r}(s,t_1)$, траектория его начальной точки $\mathbf{r}(0,t)$, конечное положение провода $\mathbf{r}(s,t_2)$ и траектория конечной точки провода $\mathbf{r}(1,t)$), поскольку для магнитного поля выполняется уравнение $\nabla\mathbf{B}=0$, что в интегральной форме означает $\int_{\partial G} B_n\,dS = 0$.

Для замкнутого контура поверхность S представляет собой "трубу". Торцы этой "трубы" — начальное и конечное положения контура. В силу уравнения $\int_{\partial G} B_n\,dS = 0$ интеграл по боковой поверхности "трубы" можно преобразовать в интегралы по торцам. Учитывая направление нормалей, указанное на рисунке,

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где $\Phi_{1,2}$ потоки поля через контур в начальном и конечном положении, при



Преобразование интеграла для замкнутого контура

этом нормаль к поверхности, натянутой на контур, согласована с направлением обхода контура.

Замечания. Если контур — твердое тело, то подобная независимость работы от пути дает возможность ввести потенциальную энергию. Однако эта энергия не та, что, например, в однородном поле тяжести. В однородном магнитном поле энергия не зависит от положения вообще, а только от ориентации контура. И конечно же, выражение для энергии согласовано в этом случае с выражениями для силы и момента сил, полученными ранее.

Случай незамкнутого контура тоже имеет физический смысл, если концы контура уходят в бесконечность.

В учебниках по общей физике часто муссируется вопрос о работе силы Лоренца. Мы начали раздел с силы $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, действующей на заряд. Эта сила перпендикулярна скорости заряда, так что работы не совершает. Как же может магнитное поле совершать работу над контуром? Ответ таков: работу в действительности совершают силы, которые поддерживают ток в контуре постоянным. Если бы этих сил не было, то составляющая силы Лоренца вдоль контура, которая всегда возникает при перемещении контура, меняла бы ток в нем. Мы еще вернемся к этому вопросу при обсуждении электромагнитной индукции.

Энергия магнитного поля. Поскольку магнитное поле само по себе работы над зарядами не совершает (магнитная составляющая силы Лоренца $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ перпендикулярна скорости заряда), то столь наглядной механической интерпретации как в электростатике энергия магнитного поля не имеет.

Физическая картина такова. При изменении магнитного поля в соответствие с полными уравнениями Максвелла возникает электрическое поле, которое и совершает работу над зарядами. Оказывается, что эта работа не зависит от того, насколько медленно (“квазистатически”) мы меняем магнитное поле. В результате для того чтобы создать магнитное поле заданной величины в некоторой области, нужно произвести над зарядами определенную работу. Эта работа и есть энергия созданного магнитного поля.

Мы не станем приводить здесь этот вывод, поскольку он фактически повторяет вывод закона сохранения энергии в случае полных уравнений Максвелла. Мы еще поговорим об этом в конце курса.

Для энергии магнитного поля в вакууме справедливо выражение

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_G B^2 \, d^3r.$$

В магнетиках нужно добавить к этому энергию за счет "закручивания" молекулярных токов. Для линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$

$$W = \frac{1}{2} \int_G \mathbf{B}\mathbf{H} \, d^3r.$$

Соответствующие плотности энергии равны $w = B^2/2\mu_0$ и $w = \mathbf{B}\mathbf{H}/2$.

Вычислим энергию бесконечного прямого соленоида (на единицу длины). Магнитное поле внутри соленоида равно $B = \mu_0 n I$. Энергия

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 V) I^2 = \frac{LI^2}{2}$$

(V — объем соленоида). Последняя формула остается справедливой и для соленоида, заполненного магнетиком, и для тороидального соленоида.