1 Мультипольное разложение

Рассмотрим случай, когда заряды сосредоточены в небольшой области G, а электрическое поле (или потенциал) нужно определить на больших по сравнению с размерами области G расстоянии. Выберем начало координат внутри области G. Тогда в общих формулах

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

будет $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ и можно разложить $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'_a\frac{\partial}{\partial x_a}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}x_a x_b \frac{\partial^2}{\partial x'_a \partial x'_b}\frac{1}{r} + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{3(\mathbf{r}'\mathbf{r})^2 - r'^2r^2}{r^5} + \ldots$$

Подставляя разложение в выражение для скалярного потенциала

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{3(\mathbf{r}'\mathbf{r})^2 - r'^2r^2}{r^5} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{6}D_{ab}\frac{3x_a x_b - r^2\delta_{ab}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} + \ldots,$$

где $q = \int_G \rho(\mathbf{r}')\, d^3r'$ — полный заряд в области G, $\mathbf{d} = \int_G \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'$ — *электрический дипольный момент*, $D_{ab} = \int_G (3x'_a x'_b - r'^2\delta_{ab})\rho(\mathbf{r}')\, d^3r'$ — *электрический квадрупольный момент*. Отметим, что квадрупольный момент симметричен по перестановке индексов, $D_{ab} = D_{ba}$, а сумма $D_{aa} = 0$. Таким образом, он имеет 5 независимых компонент. Дипольный момент имеет 3 независимые компоненты, заряд представляется одним числом.

Домашнее задание. Догадайтесь, сколько независимых компонент будет в следующем члене разложения (он называется октупольным).

Обратим внимание, что каждый следующий член разложения содержит большую степень r в знаменателе, а потому быстрее убывает при $r \to \infty$. Если полный заряд отличен от нуля, то главным является первый член разложения, а остальные — поправками. Если полный заряд равен нулю, главным становится второй, дипольный член. Поскольку дипольный и квадрупольный моменты содержат под интегралом r' и r'^2 соответственно, то дипольный и квадрупольный члены меньше первого члена разложения в r'/r и $(r'/r)^2$ раз. Таким образом, мультипольное разложение представляет собой разложение по степеням отношения размера системы к расстоянию до точки наблюдения.

Разложение для электрического поля можно получить, дифференцируя потенциал

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} + \ldots$$

Аналогично можно построить разложение векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_G \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}}{r^3} + \ldots\right).$$

Здесь, однако, ситуация немного отличается, поскольку есть условие (сохранения заряда) $\nabla \mathbf{j} = 0$, а также условие обращения нормальной компоненты тока в нулю на границе области G, $j_n|_{\partial G} = 0$. В частности, благодаря этом условиям первый член разложения всегда равен нулю. Действительно, для произвольного постоянного вектора $\mathbf{a}$ (штрихом для краткости обозначена зависимость величин от $\mathbf{r}'$)

$$\nabla'[(\mathbf{r}'\mathbf{a})\mathbf{j}'] = \mathbf{a}\mathbf{j}',$$

а потому

$$\int_G \mathbf{a}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int_{\partial G} (\mathbf{r}'\mathbf{a}) j'_n \, dS' = 0.$$

Аналогично можно преобразовать и другие интегралы. Так

$$\begin{aligned}\nabla'[(\mathbf{r}'\mathbf{a})(\mathbf{r}'\mathbf{r})\mathbf{j}'] &= (\mathbf{a}\mathbf{j}')(\mathbf{r}'\mathbf{r}) + (\mathbf{r}'\mathbf{a})(\mathbf{r}\mathbf{j}') = \\ &= 2(\mathbf{a}\mathbf{j}')(\mathbf{r}'\mathbf{r}) + (\mathbf{r}'\mathbf{a})(\mathbf{r}\mathbf{j}') - (\mathbf{a}\mathbf{j}')(\mathbf{r}'\mathbf{r}) = 2(\mathbf{a}\mathbf{j}')(\mathbf{r}'\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')),\end{aligned}$$

а потому

$$\int_G \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r})(\mathbf{a}\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\, d^3r'}{r^3} = -\mathbf{a}\left[\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \left(\frac{1}{2}\int_G \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r'\right)\right].$$

Стоящий тут интеграл называется *магнитным дипольным моментом*

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\int_G \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, d^3r',$$

а разложение векторного потенциала приобретает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3} + \ldots$$

и начинается всегда с дипольного члена. Магнитное поле можно вычислить дифференцированием потенциала

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5} + \ldots$$

2 Сила и момент, действующие на тело в статическом поле

Мультипольные моменты системы определяют не только поле на больших расстояниях, но и силу, которая действует на небольшое тело в слабо неоднородном поле, то есть в поле, которое мало меняется на расстояниях порядка размера тела. Начнем с энергии заряженного тела во внешнем электростатическом поле. Считая, что начало координат находится где-то внутри тела, пишем

$$U = \int_G \phi(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\, d^3r' =$$
$$= \int_G \left(\phi(0) + x'_a \frac{\partial \phi}{\partial x_a}(0) + \frac{1}{2} x'_a x'_b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a\, \partial x_b}(0) + \ldots\right) \rho(\mathbf{r}')\, d^3r' =$$
$$= q\phi(0) - \mathbf{d}\mathbf{E}(0) + \frac{1}{6} D_{ab} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a\, \partial x_b}(0) + \ldots$$

(второй член записан с учетом $\nabla\phi = -\mathbf{E}$). Аналогично раскладываем силу

$$\mathbf{F} = \int_G \mathbf{E}(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int_G \left(\mathbf{E}(0) + x'_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_a}(0) + \ldots\right) \rho(\mathbf{r}')\, d^3r' =$$
$$= q\mathbf{E}(0) + (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}(0) + \ldots$$

и момент сил

$$\mathbf{M} = \int_G \mathbf{r}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\, d^3r' = \mathbf{d} \times \mathbf{E}(0) + \ldots$$

Дипольные члены для силы и момента описывают очень простой эффект: внешнее поле стремится развернуть диполь вдоль поля и втянуть его в область более сильного поля.

В разложении силы, действующей на тело в магнитном поле

$$\mathbf{F} = \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \left(\mathbf{B}(0) + x'_a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_a}(0) + \ldots\right) d^3r'$$

первый член обращается в нуль, как и ранее при разложении векторного потенциала. Иными словами, в однородном магнитном поле на тело с текущими в нем токами не действует никакая сила. Второй член удобнее преобразовать в тензорных обозначениях

$$\varepsilon_{abc} j'_b x'_d \frac{\partial B_c}{\partial x_d} = \varepsilon_{abc} \left[\frac{1}{2}\left(j'_b x'_d - j'_d x'_b\right) + \frac{1}{2}\left(j'_b x'_d + j'_d x'_b\right)\right] \frac{\partial B_c}{\partial x_d} =$$
$$= \varepsilon_{abc} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{dbe} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')_e + \frac{1}{2} \frac{\partial (x'_b x'_d j'_k)}{\partial x'_k}\right] \frac{\partial B_c}{\partial x_d} =$$
$$= \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')_d \frac{\partial B_a}{\partial x_d} + \varepsilon_{abc} \frac{1}{2} \frac{\partial (x'_b x'_d j'_k)}{\partial x'_k} \frac{\partial B_c}{\partial x_d}$$

При интегрировании по области G первое слагаемое даст магнитный момент, а второе может быть преобразовано к интегралу по границе области и обращается в нуль в силу $j_n|_{\partial G} = 0$. Окончательно

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{B}(0) + \ldots$$

Момент силы

$$\mathbf{M} = \int_G \mathbf{r}' \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}'))\, d^3 r' = \int_G \mathbf{r}' \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{B}(0) + \ldots))\, d^3 r'$$

также проще обработать в тензорных обозначениях

$$\varepsilon_{abc} x'_b \varepsilon_{cde} j'_d B_e = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde} \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{bdk}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')_k + \frac{1}{2}\frac{\partial(x'_b x'_d j'_k)}{\partial x'_k}\right] B_e =$$

$$= \varepsilon_{abc}\frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')_b B_c + \varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde}\frac{1}{2}\frac{\partial(x'_b x'_d j'_k)}{\partial x'_k} B_e$$

При интегрировании по области G первое слагаемое даст магнитный момент, а второе может быть преобразовано к интегралу по границе области и обращается в нуль в силу $j_n|_{\partial G} = 0$. Окончательно

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{B}(0) + \ldots$$

Формулы для дипольных силы и момента полностью аналогичны таковым для электрического поля и описывают тот же эффект: магнитный диполь стремится ориентироваться по полю и втягивается в область более сильного поля.

3 Разложение поля в малой области

Еще одна задача, в которой естественно возникает мультипольное разложение — это разложение самого поля в малой области. Например, раскладывая потенциал электрического поля с точностью до квадратичных членов

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(0) + d_a x_a + \frac{1}{2} D_{ab} x_a x_b + \ldots,$$

мы видим, что в таком разложении возникает один коэффициент $\phi(0)$ (который без ограничения общности можно принять равным нулю), три коэффициента d_a, представляющих аналог дипольного момента, и пять коэффициентов D_{ab}. Действительно, можно без ограничения общности считать $D_{ab} = D_{ba}$, а для того чтобы потенциал (вне создавших его зарядов) удовлетворял уравнению Лапласа $\Delta\phi = 0$ должно выполняться $D_{aa} = 0$. Разложение электрического поля можно получить, дифференцируя разложение потенциала

$$E_a = -\frac{\partial \phi}{\partial x_a} = -d_a - D_{ab} x_b + \ldots$$

Аналогичным образом можно разложить магнитное поле

$$B_c(\mathbf{r}) = p_c + D_{cd} x_d + \ldots$$

Магнитное поле (вне создавших его токов) должно иметь нулевую дивергенцию и ротор, $\partial B_c/\partial x_c = 0$, $\partial B_c/\partial x_d = \partial B_d/\partial x_c$, откуда следует, что D_{cd} должен быть симметричен, а сумма $D_{cc} = 0$.

Домашнее задание. Найдите соответствующий векторный потенциал Ответ: $A_b = \frac{1}{2}\varepsilon_{bcd}p_c x_d + \frac{1}{3}\varepsilon_{bcd}D_{ce}x_e x_d$. Если ввести вектор $D_a = D_{ab}x_b$, то можно записать $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\times\mathbf{r} + \frac{1}{3}\mathbf{D}\times\mathbf{r}$.

4 Поля заряда, равномерно движущегося по окружности, на ее оси

Пусть точечный заряд q равномерно движется по окружности радиусом R со скоростью v

$$X(t) = R\cos\frac{v}{R}t, \quad Y(t) = R\sin\frac{v}{R}t, \quad Z(t) = 0.$$

Найдем электромагнитное поле, создаваемое зарядом на оси z. Электрическое и магнитное поля вычисляются по общим формулам

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-v^2/c^2)(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c)}{4\pi\varepsilon_0(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{q\tilde{\mathbf{r}}\times((\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c)\times\dot{\mathbf{v}})}{4\pi\varepsilon_0 c^2(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3},$$
$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{r}}\times\mathbf{E}/\tilde{r}c.$$

Отметим сразу некоторые особенности задачи. Расстояние от запаздывающего положения заряда до точки наблюдения всегда одно и то же и равно $\tilde{r} = \sqrt{R^2+z^2}$. Поэтому запаздывание всегда одно и то же, $t' = t - \tilde{r}/c$. Кроме того, скорость $\mathbf{v}$ и вектор $\tilde{\mathbf{r}}$ всегда перпендикулярны, $\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v} = 0$, а скалярное произведение $\tilde{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{v}} = v^2$. Записывая покомпонентно векторы $\tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}}$, имеем

$$\tilde{\mathbf{r}} = \left(-R\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), -R\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), z\right),$$
$$\mathbf{v} = \left(-v\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), v\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), 0\right),$$
$$\dot{\mathbf{v}} = \left(-\frac{v^2}{R}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), -\frac{v^2}{R}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right), 0\right).$$

Теперь уже нетрудно выписать упрощенное выражение для поля $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\tilde{r}^3}\left(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c - \tilde{r}^2\dot{\mathbf{v}}/c^2\right)$$

и компоненты

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\left(-\frac{R}{\tilde{r}}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) + \frac{v}{c}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) + \frac{\tilde{r}}{R}\frac{v^2}{c^2}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right)\right),$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\left(-\frac{R}{\tilde{r}}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) - \frac{v}{c}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) + \frac{\tilde{r}}{R}\frac{v^2}{c^2}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right)\right),$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\tilde{r}^3},$$

$$cB_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\left(\frac{z}{\tilde{r}}\frac{v}{c}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) + \frac{z}{R}\frac{v^2}{c^2}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right)\right),$$

$$cB_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\left(\frac{z}{\tilde{r}}\frac{v}{c}\sin\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right) + \frac{z}{R}\frac{v^2}{c^2}\cos\left(\frac{v}{R}t - \frac{v}{c}\frac{\tilde{r}}{R}\right)\right),$$

$$cB_z = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^3}\frac{v}{c}.$$