1 Пример. Излучение заряда, движущегося по окружности

Пусть точечный заряд q равномерно движется по окружности радиусом R со скоростью $v \ll c$

$$X(t) = R\cos\frac{v}{R}t, \quad Y(t) = R\sin\frac{v}{R}t, \quad Z(t) = 0.$$

Рассмотрим поляризацию и угловое распределение излучения. Для этого во второй член в выражении для электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-v^2/c^2)(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c)}{4\pi\varepsilon_0(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{q\tilde{\mathbf{r}} \times ((\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}})}{4\pi\varepsilon_0 c^2(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c)^3}$$

нужно подставить

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \dots, \quad \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{r}\mathbf{v}/c) = \mathbf{r} + \dots, \quad \tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}/c = r + \dots,$$

а в качестве ускорения — вектор $\dot{\mathbf{v}} = -\frac{v^2}{R}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. где $\alpha = \frac{v}{R}(t - r/c)$. Для выяснения поляризации разложим ускорение по ортам сферической системы координат $\mathbf{e}_r = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$, $\mathbf{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$. Имеем

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{v^2}{R}[\mathbf{n}\sin\theta\cos(\phi-\alpha) + \mathbf{e}_\theta\cos\theta\cos(\phi-\alpha) - \mathbf{e}_\phi\sin(\phi-\alpha)],$$

а потому

$$\mathbf{E} = \frac{qv^2}{4\pi\varepsilon_0 Rrc^2}[\mathbf{e}_\theta\cos\theta\cos(\phi-\alpha) - \mathbf{e}_\phi\sin(\phi-\alpha)].$$

Поляризация в общем случае эллиптическая: в плоскости $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ вектор $\mathbf{E}$ описывает эллипс с полуосями $(\cos\theta, 1)$. В частности, при $\theta = 0$ (на оси окружности, по которой движется заряд) поляризация круговая, а при $\theta = \pi/2$ (в плоскости окружности, по которой движется заряд) — линейная.

Угловое распределение средней за период интенсивности излучения (учитывая $\overline{\cos^2(\phi-\alpha)} = \overline{\sin^2(\phi-\alpha)} = 1/2$)

$$dI = \varepsilon_0 c\overline{\mathbf{E}^2}(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \frac{q^2v^4}{32\pi^2\varepsilon_0 R^2c^3}(\cos^2\theta + 1)\sin\theta\, d\theta\, d\phi.$$

Полная мощность излучения

$$I = \frac{q^2v^4}{32\pi^2\varepsilon_0 R^2c^3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta + 1)\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{q^2v^4}{6\pi\varepsilon_0 R^2c^3}$$

2 Поле излучения системы зарядов. Разложение по мультиполям

Выше мы получили точное выражение для полей произвольно движущегося заряда и рассмотрели примеры поля излучения (убывающего как $1/r$

на больших расстояниях). Рассмотрим теперь излучение произвольной системы зарядов, движущихся в ограниченной области G. Можно получить его как суперпозицию полей отдельных зарядов, однако удобнее исходить из запаздывающих потенциалов.

Скалярный запаздывающий потенциал имеет вид

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_G \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Произведем разложение на больших расстояниях $r \gg r'$, интересуясь только излучением, то есть пренебрегая членами, убывающими быстрее $1/r$. Тогда знаменатель сводится просто к r

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \ldots = \frac{1}{r} + O(1/r^2),$$

а в разложении запаздывающего времени достаточно удержать первую поправку ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$)

$$t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c = t - r/c + \mathbf{n}\mathbf{r}'/c - \frac{r'^2 - (\mathbf{n}\mathbf{r}')^2}{2rc} + \ldots = t - r/c + \mathbf{n}\mathbf{r}'/c + O(1/r)$$

Величина r'/c представляет собой время распространения электромагнитного возмущения по области G, будем считать его малым по сравнению с характерным периодом движения зарядов, $\omega r'/c \ll 1$, или, другими словами, считать что длина волны излучения (пропорциональная c/ω) много больше размеров области G. Тогда можно разложить плотность заряда в ряд (точками обозначены производные по времени)

$$\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c) = \rho(\mathbf{r}', t - r/c) + \dot\rho(\mathbf{r}', t-r/c)\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} + \frac{1}{2}\ddot\rho(\mathbf{r}', t-r/c)\left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right)^2 + \ldots$$

Скалярные потенциал выражается в итоге следующим образом

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc} + \frac{1}{6}\frac{n_a n_b \ddot D_a b(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} + \frac{1}{6}\frac{\ddot Q_2(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} + \ldots,$$

где $q = \int_G \rho(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3r'$ — полный заряд, не зависит от t в силу закона сохранения заряда, $\mathbf{d}(t) = \int_G \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}', t)\, d^3r'$ — (зависящий от времени) электрический дипольный момент системы, $D_{ab}(t) = \int_G (3x'_a x'_b - \delta_{ab} r'^2)\rho(\mathbf{r}', t)\, d^3r'$ — электрический квадрупольный момент системы, $Q_2(t) = \int_G r'^2 \rho(\mathbf{r}', t)\, d^3r'$ — вспомогательный интеграл, как мы увидим далее, не войдет в окончательный ответ.

Векторный запаздывающий потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int_G \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Применяя то же самое разложение, находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int_G \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{\partial}{\partial t}\int_G \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)(\mathbf{n}\mathbf{r}')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \ldots$$

В отличие от статического случая первый член разложения не равен нулю. Это происходит потому, что закон сохранения заряда теперь не $\nabla\mathbf{j} = 0$, а $\dot{\rho} + \nabla\mathbf{j} = 0$. Используя тот же прием, что в статическом случае, имеем

$$\nabla'[(\mathbf{ar}')\mathbf{j}'] = \mathbf{aj}' + (\mathbf{ar}')(\nabla'\mathbf{j}') = \mathbf{aj}' - (\mathbf{ar}')\dot{\rho}',$$

а потому (полная дивергенция преобразуется в интеграл по поверхности и исчезает в силу $j_n|_{\partial G} = 0$)

$$\int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)\, d^3r' = \int_G \mathbf{r}'\dot{\rho}(\mathbf{r}', t)\, d^3r' = \dot{\mathbf{d}}(t).$$

Таким образом, первый член разложения равен $\dot{\mathbf{d}}(t)/4\pi\varepsilon_0 c^2 r$. Для перобразования второго члена пишем

$$\begin{aligned}\nabla'[(\mathbf{ar}')(\mathbf{nr}')\mathbf{j}'] &= (\mathbf{aj}')(\mathbf{nr}') + (\mathbf{ar}')(\mathbf{nj}') - (\mathbf{ar}')(\mathbf{nr}')\dot{\rho}' = \\ &= 2(\mathbf{aj}')(\mathbf{nr}') + (\mathbf{ar}')(\mathbf{nj}') - (\mathbf{aj}')(\mathbf{nr}') - (\mathbf{ar}')(\mathbf{nr}')\dot{\rho}' = \\ &= 2(\mathbf{aj}')(\mathbf{nr}') + \mathbf{a}(\mathbf{n} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}')) - (\mathbf{ar}')(\mathbf{nr}')\dot{\rho}',\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)(\mathbf{nr}')\, d^3r' &= \frac{1}{2}\int_G \mathbf{r}'(\mathbf{nr}')\dot{\rho}(\mathbf{r}', t)\, d^3r' - \\ &- \frac{1}{2}\int_G \mathbf{n} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t))\, d^3r' = \frac{1}{6}\mathbf{e}_a \dot{D}_{ab}(t) n_b + \frac{1}{6}\dot{Q}_2(t)\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{p}(t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}\int_G \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)\, d^3r'$ — магнитный дипольный момент системы, $\mathbf{e}_a = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Таким образом, окончательно векторный потенциал представляется в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{1}{6}\frac{\mathbf{e}_a \ddot{D}_{ab}(t - r/c) n_b}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \\ + \frac{1}{6}\frac{\mathbf{n}\ddot{Q}_2(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \times \mathbf{n}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \ldots\end{aligned}$$

Удобно ввести вектор $\mathbf{D}(t)$, проекции которого равны $D_a(t) = D_{ab}(t) n_b$, тогда

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc} + \frac{1}{6}\frac{\mathbf{n}\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} + \frac{1}{6}\frac{\ddot{Q}_2(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} + \ldots, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{1}{6}\frac{\ddot{\mathbf{D}}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \frac{1}{6}\frac{\mathbf{n}\ddot{Q}_2(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \times \mathbf{n}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} + \ldots\end{aligned}$$

При вычислении полей из потенциалов по формулам

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

пространственые производные (градиент и ротор) фактически следует применять только к запаздывающему времени, поскольку дифференцирование остальных зависимостей даст поля, убывающие быстрее $1/r$. Иначе говоря $\nabla \to -(\mathbf{n}/c)\partial/\partial t$. Теперь очевидно, что члены с Q_2 не дают вклада, так как представляют собой "чистую калибровку", ∇f для вектроного и $-\partial f/\partial t$ для скалярного с $f = -\dot{Q}_2(t-r/c)/4\pi\varepsilon_0 c^2 r$. Не дает вклада и первый член в ϕ, так как полный заряд не зависит от времени. Для полей получаем выражения

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}\bigg(&\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)) + \\
&+\frac{1}{6c}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dddot{\mathbf{D}}(t-r/c)) + \frac{1}{c}\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)\bigg) + \ldots, \\
\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r c^3}\bigg(&\ddot{\mathbf{d}}(t-r/c)\times\mathbf{n} + \\
&+\frac{1}{6c}\dddot{\mathbf{D}}(t-r/c)\times\mathbf{n} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c))\bigg) + \ldots
\end{aligned}
$$

Первые члены этих выражений представляют собой *электрическое дипольное излучение*. Вторые и третьи члены — *электрическое квадрупольное* и *магнито-дипольное* излучение. Если размер области G порядка a, а частота колебаний зарядов в ней порядка ω, то скорость зарядов порядка ωa, $d \sim a$, $D \sim a^2$, $p \sim a(\omega a)$, а каждая производная по времени дает еще один множитель ω. Таким образом, электрическое поле электрического дипольного излучения порядка $\omega^2 a/rc^2$, а квадрупольного и магнито-дипольного излучений — $\omega^3 a^2/rc^3$, то есть одного порядка и слабее электрического дипольного в $\omega a/c \ll 1$ раз.

3 Пример. Излучение двух зарядов, совершающих гармонические колебания

Пусть заряды e и $-e$ совершают гармонические колебания вдоль оси z

$$
\begin{gathered}
Z_e(t) = a\cos\omega t, \quad Z_{-e}(t) = -a\cos\omega t, \\
X_e(t) = 0, \quad Y_e(t) = 0, \quad X_{-e}(t) = 0, \quad Y_{-e}(t) = 0.
\end{gathered}
$$

Тогда вторая производная электрического дипольного момента системы $\mathbf{d}(t) = (0, 0, 2ea\cos\omega t)$ отлична от нуля, так что имеем дело с дипольным излучением. Произведение $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_\theta \sin\theta$ (θ и $\mathbf{e}_\theta$ — стандартные сферический угол и орт сферической системы координат), поэтому поляризация излучения линейная

$$
\mathbf{E} = -\frac{2ea\omega^2\mathbf{e}_\theta\sin\theta\cos\omega(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}.
$$

Угловое распределение средней за период интенсивности излучения (учитывая $\overline{\cos^2\omega(t-r/c)} = 1/2$)

$$dI = \varepsilon_0 c\overline{E^2}(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \frac{e^2a^2\omega^4\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\, d\phi.$$

Полная усредненная за период мощность излучения

$$I = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi^2\varepsilon_0}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{e^2a^2\omega^4}{3\pi\varepsilon_0}.$$

4 Движение заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле

Уравнение движения заряда в поле имеет вид

$$m\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

Мы далее будем всегда полагать, что $v \ll c$, а потому $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$.

4.1 Движение в однородном электрическом поле

Без ограничения общности возьмем $\mathbf{E} = (0,0,E)$, $\mathbf{B} = 0$. Тогда уравнения движения

$$m\dot{v}_x = 0, \quad m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = eE$$

немедленно интегрируются

$$v_x = v_{x0}, \quad v_y = v_{y0}, \quad v_z = v_{z0} + eEt/m,$$
$$x = x_0 + v_{x0}t, \quad y = y_0 + v_{y0}t, \quad z = z_0 + v_{z0}t + eEt^2/2m.$$

Движение равноускоренное, траектория представляет из себя параболу, в частном слчае $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 0$ — прямую.

4.2 Движение в однородном магнитном поле

Без ограничения общности возьмем $\mathbf{B} = (0,0,B)$, $\mathbf{E} = 0$. Тогда уравнения движения

$$m\dot{v}_x = ev_yB, \quad m\dot{v}_y = -eV_xB, \quad m\dot{v}_z = 0$$

немедленно интегрируются

$$v_x = v_{x0}\cos\omega t + v_{y0}\sin\omega t, \quad v_y = -v_{x0}\sin\omega t + v_{y0}\cos\omega t, \quad v_z = v_{z0},$$
$$x = \frac{v_{x0}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{y0}}{\omega}(\cos\omega t - 1) + x_0,$$
$$y = \frac{v_{x0}}{\omega}(\cos\omega t - 1) + \frac{v_{y0}}{\omega}\sin\omega t + y_0, \quad z = v_{z0}t + z_0,$$

где $\omega = eB/m$ — *циклотронная частота*. Траектория представляет из себя спираль с осью в направлении магнитного поля, радиусом $R = v/\omega$ и шагом $h = v_{z0}\frac{2\pi}{\omega}$ (в частном случае $v_{z0} = 0$ — окружность). Отметим, что период обращения по спирали не зависит от скорости частицы. Сама же скорость в процессе движения остается постоянной по модулю.

4.3 Движение в однородных электрическом и магнитном полях

Без ограничения общности возьмем $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Тогда уравнения движения

$$m\dot{v}_x = eE_x + ev_yB, \quad m\dot{v}_y = -ev_xB, \quad m\dot{v}_z = eE_z.$$

Введем $\tilde{v}_y = v_y + E_x/B$, тогда уравнения для $(v_x, \tilde{v}_y)$ точно такие же, как в предыдущем случае

$$m\dot{v}_x = e\tilde{v}_yB, \quad m\dot{\tilde{v}}_y = -eV_xB, \quad m\dot{v}_z = eE_z.$$

Решение можно списать с предыдущего случая

$$\begin{gathered}
v_x = v_{x0}\cos\omega t + (v_{y0} + E_x/B)\sin\omega t, \\
v_y = -v_{x0}\sin\omega t + (v_{y0} + E_x/B)\cos\omega t - E_x/B, \quad v_z = v_{z0} + eE_zt/m, \\
x = \frac{v_{x0}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{y0} + E_x/B}{\omega}(\cos\omega t - 1) + x_0, \\
y = \frac{v_{x0}}{\omega}(\cos\omega t - 1) + \frac{v_{y0} + E_x/B}{\omega}\sin\omega t - E_xt/B + y_0, \\
z = z_0 + v_{z0}t + eE_zt^2/2m.
\end{gathered}$$

Траектория также представляет из себя подобие спирали, однако по сравнению с предыдущим случаем есть несколько отличий. Радиус спирали связан с начальной скоростью более сложным соотношением $\omega^2R^2 = v_{x0}^2 + (v_{y0}+E_x/B)^2$. Центральная линия спирали имеет форму параболы: имеется *дрейф* со скоростью E_x/B в направлении оси y (отметим, что дрейф происходит в направлении, перпендикулярном приложенному электрическому полю) и ускоренное движение по оси z.

4.4 Движение в слабо неоднородном магнитном поле

Рассмотрим слабо неоднородное аксиально симметричное магнитное поле, то есть поле, которое в цилиндрических координатах записывается как

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_rB_r(r, z) + \mathbf{e}_zB_z(r, z),$$

причем будем считать, что поле мало отличается от однородного в направлении оси z. В качестве базовой возьмем величину $B_0(z) = B_z(0, z)$. Частица в однородном поле движется по спирали с шагом $h = 2\pi v_z/\omega =$

$2\pi m v_z/eB$. Поэтому условие слабой неоднородности поля выразится в виде $hB_0'/B_0 \sim m v_z B_0'/eB_0^2 \ll 1$.

Восстановим поле по $B_0(z)$, используя уравнения $\nabla \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, которые в цилиндрических координатах для аксиально симметричного случая запишутся так (у ротора пишем только ϕ-компоненту)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0.$$

Будем искать их решение в виде разложения

$$B_r(r,z) = rC(z) + r^3 F(z) + \ldots, \quad B_z(r,z) = B_0(z) + r^2 D(z) + \ldots$$

Подставляя в уравнения и приравнивая члены при одинаковых степенях r, последовательно найдем коэффициенты C, D, F

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}B_0'(z) + \frac{r^3}{16}B_0'''(z) + \ldots, \quad B_z(r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}B_0''(z) + \ldots$$

Как видно, следующие члены разложения включают высшие производные от медленно меняющегося $B_0(z)$, то есть являются поправками к основным, первым членам. В дальшейшем будем ограничиваться только учетом первых членов разложения.

Для записи уравнений движения (также в цилиндрических координатах) нам нужно еще найти первую и вторую производные радиус-вектора

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

Учитывая, что орты $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\phi$ зависят от ϕ, и $\partial \mathbf{e}_r/\partial\phi = \mathbf{e}_\phi$, $\partial \mathbf{e}_\phi/\partial\phi = -\mathbf{e}_r$, находим

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r\dot{r} + \mathbf{e}_\phi r\dot{\phi} + \mathbf{e}_z\dot{z},$$
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \mathbf{e}_\phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) + \mathbf{e}_z\ddot{z}.$$

Добавки $r\dot{\phi}^2$ и $2\dot{r}\dot{\phi}$ представляют собой центробежное и кориолисово ускорения. Итого, уравнения движения в проекциях на орты цилиндрической системы координат имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = e(r\dot{\phi})B_0(z),$$
$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = e\left[\dot{z}\left(-\frac{r}{2}B_0'(z)\right) - \dot{r}B_0(z)\right],$$
$$m\ddot{z} = -e(r\dot{\phi})\left(-\frac{r}{2}B_0'(z)\right).$$

Чтобы распутать эти уравнения, пренебрежем в первом $\ddot{r}$, считая его малым. Тогда получим, что частота обращения частицы определяется локальным значением магнитного поля B_0

$$\dot{\phi} = -eB_0(z)/m.$$

Второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(er^2B_0(z)/2),$$

то есть в виде сохранения величины

$$-L = mr^2\dot{\phi} + er^2B_0(z)/2.$$

Учитывая предыдущее равенство,

$$L = er^2B_0(z)/2$$

и мы получаем важный вывод: *поток магнитного поля* через виток, описываемый частицей, остается неизменным в процессе движения. Это определяет зависимость радиуса спирали r от z. Как видно, радиус, вместе с $B_0(z)$, меняется медленно, так что пренебрежение $\ddot{r}$ законно.

Наконец, подставляя все найденные величины в третье уравнение, найдем

$$m\ddot{z} = -\frac{eLB_0'(z)}{m}.$$

Таким образом, движение частицы описывается как совокупность трех движений: 1) вращения по окружности с циклотронной частотой, определяемой локальным значением $B_0(z)$, 2) изменения радиуса окружности, так чтобы сохранялся поток магнитного поля через нее, 3) движения центра окружности по оси z. Заметим, что уравнение движения центра окружности имеет вид

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad U = \frac{eLB_0(z)}{m},$$

а потому справедлив “закон сохранения энергии”

$$E = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{eLB_0(z)}{m}.$$

Фактически, магнитное поле $B_0(z)$ играет роль потенциальной энергии. Если в какой-то области оно меньше, а по краям больше, то возникает “потенциальная яма”, от краев которой частица будет отражаться. На этом принципе основаны магнитные ловушки.

Множитель eL/m можно еще написать в виде

$$\frac{eL}{m} = \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2B_0} = \frac{mv_\perp^2}{2B_0},$$

что позволяет сразу выразить его из начальных условий.

5 Пример. Цилиндрический диод в магнитном поле

Диод представляет собой два коаксиальный цилиндра, катод радиусом a и анод радиусом $b > a$. К диоду приложено анодное напряжение U (плюсом к аноду). Считая, что электроны покидают катод с нулевой начальной скоростью, найти, какое магниное поле B нужно приложить вдоль оси диода, чтобы они не долетали до анода.

Найдем прежде всего электрическое поле в диоде. Из симметрии очевидно, что отлична от нуля лишь радиальная компонента E_r, а из теоремы Гаусса следует, что $E_r \sim 1/r$. Пишем $E_r = A/r$, а постоянную найдем, вычислив разность потенциалов между катодом и анодом

$$\int_a^b E_r\, dr = \phi(a) - \phi(b) = -U,$$

откуда $A = -U/\ln(b/a)$ и

$$E_r = -\frac{U}{r\ln(b/a)}.$$

У магнитного же поля по условию задачи есть только компонента B_z.

Пишем уравнения движения в проекциях на орты цилиндрической системы координат (по оси z движения, очевидно, не будет)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -eU/r\ln(b/a) + e(r\dot{\phi})B_z,$$
$$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = -e\dot{r}B_z.$$

Как и выше, второе уравнение переписываем в виде закона сохранения

$$L = mr^2\dot{\phi} + er^2B_z/2.$$

Значение L можно найти из начальных условий, $L = ea^2B_z/2$. Выражаем $\dot{\phi} = (eB_z/2m)(a^2/r^2 - 1)$ и подставляем в первое уравнение

$$m\ddot{r} = \frac{e^2a^4B_z^2}{4mr^3} - \frac{eU}{r\ln(b/a)} - \frac{e^2B_z^2r}{4m}.$$

Это уравнение имеет вид $m\ddot{r} = -\partial W/\partial r$, где

$$W(r) = \frac{e^2a^4B_z^2}{8mr^2} + \frac{eU\ln(r/a)}{\ln(b/a)} + \frac{e^2B_z^2r^2}{8m}$$

— *эффективный радиальный потенциал.* Справедлив закон сохранения энергии $E = m\dot{r}^2/2 + W(r)$. Значение E можно определить из начальных условий, $E = W(a)$. Электроны перестанут долетать до анода, если $\dot{r}$ при $r = b$ будет обращаться в нуль, то есть будет $E = W(b)$. Иначе говоря, решением задачи является $W(a) = W(b)$

$$\frac{e^2a^2B_z^2}{4m} = \frac{e^2a^4B_z^2}{8mb^2} + eU + \frac{e^2B_z^2b^2}{8m},$$

откуда (не забываем, что заряд электрона отрицателен)

$$B_z = \frac{b}{b^2 - a^2}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}}.$$