1 Векторный анализ. Два полезных приема

Оператор ∇ един в двух лицах: с одной стороны, он является вектором, а с другой — дифференциальным оператором, действующим на функции координат. Чтобы разделить эти две ипостаси, удобно пользоваться техникой, которую можно назвать "помеченный множитель". Проиллюстрируем ее на примере вычисления $\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$.

Раз ∇ представляет собой оператор дифференцирования, то справедливо правило Лейбница: результат дифференцирования представляется суммой слагаемых, в каждом из которых дифференцируется только один множитель. Идея состоит в том, чтобы записать исходное выражение в виде суммы таких же выражений, в каждом из которых пометить тот множитель, который дифференцируется

$$\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \nabla(\color{red}{\mathbf{E}}\times\mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{E}\times\color{red}{\mathbf{B}}).$$

Я пометил множители красным цветом, ручкой на бумаге можно помечать их вертикальными стрелками $\downarrow$ сверху. Теперь можно уже забыть о том, что ∇ — дифференциальный оператор, и работать с ним просто как с вектором, то есть преобразовывать выражения согласно правилам векторной алгебры. Цель этих преобразований в том, чтобы переместить оператор ∇ и помеченный множитель так, чтобы получить правильную запись для оператора, действующего на функцию. В данном случае мы пользуемся циклическим свойством смешанного произведения $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ и антикоммутативностью векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Получаем

$$\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla\times\color{red}{\mathbf{E}}) - \mathbf{E}(\nabla\times\color{red}{\mathbf{B}}).$$

Теперь уже все множители стоят в правильном порядке: оператор ∇ действует на помеченный множитель, а все прочие множители стоят слева. Можно убрать пометки

$$\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\nabla\times\mathbf{B}).$$

Вот еще один пример

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{E}\mathbf{B}) &= \nabla(\color{red}{\mathbf{E}}\mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{E}\color{red}{\mathbf{B}}) = \\ &= \nabla(\color{red}{\mathbf{E}}\mathbf{B}) - \color{red}{\mathbf{E}}(\mathbf{B}\nabla) + \color{red}{\mathbf{E}}(\mathbf{B}\nabla) + \nabla(\mathbf{E}\color{red}{\mathbf{B}}) - \color{red}{\mathbf{B}}(\mathbf{E}\nabla) + \color{red}{\mathbf{B}}(\mathbf{E}\nabla) = \\ &= \mathbf{B}\times(\nabla\times\color{red}{\mathbf{E}}) + (\mathbf{B}\nabla)\color{red}{\mathbf{E}} + \mathbf{E}\times(\nabla\times\color{red}{\mathbf{B}}) + (\mathbf{E}\nabla)\color{red}{\mathbf{B}} = \\ &= \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Еще один полезный прием — умножение векторного выражения на произвольный постоянный вектор $\mathbf{a}$. Обычно он применяется, если предполагается использовать теорему Гаусса, в которой участвует скаляр (дивергенция вектора). Покажем, например, что $\int_G \mathbf{j}\,d^3r = 0$, если $\nabla\mathbf{j} = 0$ и $j_n|_{\partial G} = 0$. Пишем

$$\int_G (\mathbf{a}\mathbf{j})\,d^3r = \int_G \nabla[(\mathbf{a}\mathbf{r})\mathbf{j}]\,d^3r = \int_{\partial G} (\mathbf{a}\mathbf{r}) j_n\,dS = 0.$$

Первое равенство справедливо, так как

$$\nabla[(\mathbf{ar})\mathbf{j}] = (\mathbf{j}\nabla)(\mathbf{ar}) + (\mathbf{ar})(\nabla\mathbf{j}) = \mathbf{ja},$$

второе равенство получено с помощью теоремы Гаусса. Поскольку вектор $\mathbf{a}$ произвольный, из $\int_G(\mathbf{aj})\,d^3r = 0$ следует $\int_G \mathbf{j}\,d^3r = 0$.

2 Тензорная (индексная) запись

Еще одной полезной техникой, альтернативной векторному анализу, является использование тензорной записи. Под *тензором n-го ранга* понимают объект, описываемой в каждой декартовой системе координат совокупностью компонент $T_{i_1\ldots i_n}$, $i_1 = x, y, z, \ldots, i_n = x, y, z$ (всего 3^n штук), причем при переходе к другой системе координат компоненты преобразуются так же, как произведения компонент векторов.

Если компоненты вектора $\mathbf{b}$ преобразуются по закону

$$\begin{cases} b_{x'} = b_x \cos\phi + b_y \sin\phi, \\ b_{y'} = -b_x \sin\phi + b_y \cos\phi, \\ b_{z'} = b_z, \end{cases}$$

то произведение, например, $a_x b_x$ преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} a_{x'}b_{x'} = (a_x \cos\phi + a_y \sin\phi)(b_x \cos\phi + b_y \sin\phi) = \\ = a_x b_x \cos^2\phi + (a_x b_y + a_y b_x)\sin\phi\cos\phi + a_y b_y \sin^2\phi. \end{aligned}$$

Аналогично можно выписать преобразования всех других произведений. Так вот, компоненты тензора второго ранга T_{ij} преобразуются в точности как произведения $b_i b_j$

$$\begin{cases} T_{x'x'} = T_{xx}\cos^2\phi + (T_{xy} + T_{yx})\sin\phi\cos\phi + T_{yy}\sin^2\phi, \\ T_{x'y'} = (T_{yy} - T_{xx})\sin\phi\cos\phi + T_{xy}\cos^2\phi - T_{yx}\sin^2\phi, \\ T_{y'y'} = T_{xx}\sin^2\phi - (T_{xy} + T_{yx})\sin\phi\cos\phi + T_{yy}\cos^2\phi, \\ T_{x'z'} = T_{xz}\cos\phi + T_{yz}\sin\phi, \\ T_{y'z'} = -T_{xz}\sin\phi + T_{yz}\cos\phi, \\ T_{z'x'} = T_{zx}\cos\phi + T_{zy}\sin\phi, \\ T_{z'y'} = -T_{zx}\sin\phi + T_{zy}\cos\phi, \\ T_{z'z'} = T_{zz}. \end{cases}$$

Векторы и скаляры являются, таким образом, частным случаем тензоров: это тензоры 1-го и нулевого рангов. Тензоры, как и векторы, представляют собой геометрические объекты: хотя они и описываются компонентами, но операции над тензорами выражаются одинаково в любых декартовых системах координат.

Сложение тензоров и умножение тензора на число определяются аналогично векторам. Есть еще три инвариантные операции: перестановка индексов, свертка и прямое произведение.

Тензор $b_{ij\dots}$ (n-го ранга) называют полученным *перестановкой индексов* из тензора $a_{ij\dots}$ (n-го ранга), если

$$b_{ij\dots} = a_{ji\dots}.$$

Тензор, переходящий в самого себя (меняющий знак) при перестановке пары индексов, называют *симметричным (антисимметричным)* по этой паре индексов. Свойство симметрии/антисимметрии является инвариантным. Разумеется, переставлять можно любые индексы, а не только первые два, как в приведенной записи.

Тензор $b_{k\dots}$ ($(n-2)$-го ранга) называют *сверткой* тензора $a_{ijk\dots}$ (n-го ранга) по паре индексов (i, j), если

$$b_{k\dots} = \sum_i a_{iik\dots}.$$

Для упрощения записи применяется правило суммирования Эйнштейна: по повторяющемуся (немому) индексу автоматически предполагается суммирование, знак суммы $\sum$ не пишется. Например, свертка тензора второго ранга $\sum_a T_{aa}$ (являющаяся тензором нулевого ранга, то есть скаляром) записывается просто как T_{aa}, такая свертка называется еще *следом*. Разумеется, сворачивать тензоры можно по любой паре индексов, а не только по первым двум, как в приведенной записи.

Домашнее задание. Докажите, что перестановка индексов тензора второго ранга — инвариантная операция, то есть производится одинаково в любой декартовой системе координат. Докажите, что светка тензора второго ранга — скаляр.

Тензор $c_{i\dots j\dots}$ (ранга $k+p$) называется *прямым произведением* тензоров $a_{i\dots}$ (ранга k) и $b_{j\dots}$ (ранга p), если

$$c_{i\dots j\dots} = a_{i\dots} b_{j\dots}.$$

Например, из двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно посредством прямого произведения образовать тензор 2-го ранга $a_i b_j$. Свертка этого тензора, скаляр $a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (\mathbf{ab})$ будет скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Есть два полезных тензора — *единичный тензор* δ_{ij} и *единичный антисимметричный тензор* ε_{ijk}. Компоненты единичного тензора равны единице при совпадающих индексах и нулю при разных

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Единичный тензор симметричен $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ и имеет свойство

$$\delta_{ij} a_{j\dots} = a_{i\dots}.$$

Компоненты единичного антисимметричного тензора равны

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ или } i = k \text{ или } j = k, \\ 1, & (i,j,k) = (x,y,z) \text{ или } (y,z,x) \text{ или } (z,x,y), \\ -1, & (i,j,k) = (y,x,z) \text{ или } (x,z,y) \text{ или } (z,y,x). \end{cases}$$

Единичный антисимметричный тензор антисимметричен по перестановке любых двух индексов

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj},$$

все его ненулевые компоненты можно получить из $\varepsilon_{xyz} = 1$ перестановкой индексов.

Через единичный антисиметричный тензор записывается векторное произведение

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

смешанное произведение

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k,$$

двойное векторное произведение

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m,$$

а равенству

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

соответствует равенство

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

и следующее из него равенство $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjm} = -2\delta_{im}$.

Оператор ∇ представляется тензором 1-го ранга $\partial/\partial x_i$. Базовая производная

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

дивергенция

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\partial E_i}{\partial x_i},$$

ротор

$$(\nabla \times \mathbf{E})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j},$$

антисимметричная комбинация

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial E_m}{\partial x_l} \right),$$

а дифференцирование в сложных выражениях производится просто по правилу Лейбница. Рассмотрим еще раз уже приведенный выше пример $\nabla(\mathbf{EB})$

$$
\begin{aligned}
[\nabla(\mathbf{EB})]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} E_j B_j = B_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + E_j \frac{\partial B_j}{\partial x_i} = \\
= B_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) + B_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + E_j \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right) + E_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \\
= B_j \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial E_m}{\partial x_l} \right) + B_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + E_j \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \right) + E_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \\
= [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{B}]_i.
\end{aligned}
$$

Теоремы Гаусса и Стокса можно записать для тензоров произвольного ранга

$$
\int_G \frac{\partial T_{i\ldots}}{\partial x_i}\, d^3 r = \int_{\partial G} T_{i\ldots} n_i\, dS, \qquad \int_S \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T_{k\ldots}}{\partial x_j} n_i\, dS = \int_{\partial S} T_{k\ldots} \tau_k\, dl.
$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, а $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к кривой.

Рассмотрим еще раз пример с током. Пишем

$$
\frac{\partial}{\partial x_k} x_i j_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} j_k + x_k \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = j_i,
$$

поэтому

$$
\int_G j_i\, d^3 r = \int_G \frac{\partial}{\partial x_k} x_i j_k\, d^3 r = \int_{\partial G} x_i j_k n_k\, dS = 0.
$$

Тензорная запись предоставляет все те же возможности, что и обычный векторный анализ, плюс позволяет работать с более сложными объектами (тензорами высших рангов) и делает ненужными приемы “помеченного множителя” и “умножения на произвольный вектор”.